ہندسہ بالجبر تمام صفحہ ۱۸۸ [illegible]

بتاریخ ۲۶ اکتوبر سنہ ۱۸۴۵ء

دلشیر خان

Waud's

Algebraical Geometry

translated by Ramchund teacher of European sciences & Radhakishun senior scholar of the Delhie College

ہندسہ بالجبر واڈ صاحب کا ترجمہ کیا ہوا رامچند مدرس علوم انگریزی

اور رادھا کشن سکالر اعلیٰ دہلی مدرسہ کا

باہتمام بندہ محمد حسین پرنٹر و پبلشر مطبع دہلی اردو اخبار مکان متعلقہ

امام باڑہ وقفی مولوی محمد باقر صاحب میں چھپا

فہرست مضامین ہندسہ بالجبر

حصہ اول

مطالب

رسالہ ہندسہ بالجبر

حصہ اول

مشتمل اوپر اوس فرع اس علم کی جسمین دو بُعد کی مقدار وان ہندسی کا ذکر آتا ہی

باب اول

آغاز

(۱) اس رسالہ کی تالیف سی یہہ غرض ہی کہ حل کرین ہم اشکال اور مسئلون ہندسی کو جبر و مقابلہ کی ذریعہ سی واضح ہو کہ جسوقت مین جبر و مقابلہ نی ملک یورپ مین رواج پایا اوس کے تہوڑی ہی مدت بعد اکثر سوالات ہندسی بذریعہ جبر و مقابلہ کی حل کئی گئی اسطرح کہ بجای خطوط کی حروف فرض کرکی عمل جبر و مقابلہ کے جاری کئے گئی لیکن اس طریقہ کی حل کرنیسی کچھہ فایدہ عظیم وقوع مین نہین آیا اسواسطے کہ موافق اس طریق کے ہر سوال مین نئی نئی ترکیبین واسطے حل کرنی ہر سوال کے نکالنی پڑتے ہین اور ہیواسطے کوئی قاعدہ کلیہ اس طریق سی نہ نکلا موجد اس طریقہ عام کا جسکے ذریعہ سے جبر و مقابلہ کے مدد سے سب قسم کی سوالات ہندسی حل ہو سکتی ہین مہندس دیکارتیز تہا ایک وقت مین یہہ مہندس ایک ہندسی شکل حل کر رہا تہا اور جواب اکثر اس سوال کے بیشمار تہی اور واسطے حل کرنی اس سوال کے اوسنے دو مقدارین مجہول لا اور کہ فرض کین اور بعد نکالنی ایک ایسی مساوات کی جسمین یہہ دو مقدارین مجہول پائی جاتی تہین اوسنی یہہ بات ثابت کردی کہ یہہ مساوات متعلق ہی ایک ایسہ سلسلہ نقاط سے جنکی یہہ خطوط قرین یعنی یہہ مساوات تعلق رکہتی ہی کسی خط منحنی سی جو مرکب ہے ان سب نقاط سی اور اس خط منحنی کو لوگ مساوات مذکور کی کہتی ہین ۔

(۲) ظاہر ہی کہ جسوقت ہم قواعد جبر و مقابلہ کو ہندسہ کی مسایل پر جاری کرنا چاہین اوسوقت

ہمین یہہ بات خوب اچھی طرح سے سمجھنی چاہیے کہ کس معنی مین علامات جبریہ سلم ہندسہ مین
مستعمل ہوسکتی ہین جسوقت ہم ایک گز یا ایک فٹ کا ذکر کرتے ہین یا دسوقت ہمین ان
پیمانونکا خیال مطابق کرنیسی ساتھہ ایک پیمانہ مقرر کے آتا ہی اور اس پیمانہ مقررہ کو واحد کہتے
ہین یہہ واحد کبھی ہوسکتا ہی مثلاً اگر ہووے ایک انچ تو اوس صورتمین ایک فٹ کو حاصل
جمع بارہ ایسی آحاد کا خیال کرنا چاہیے اور اسیطرح تعبیر ہوسکتا ہی ایک فٹ عدد ۱۲ کی سے
اور اگر واحد مذکور ایک گز ہووے تو ایک میل تعبیر ہوسکتا ہی ۱۷۶۰ سی لیکن کوئی خط
مستقیم مثل ا ب
اب کو واحد مذکور قرار دیسکتی ہین اور اگر کوئی اور خط مثل س د مین یہہ خط کئی دفعہ پایا
جاتا ہو مثلاً پورا ط دفعہ تو ہم کہتی ہین کہ خط س د کا مساوی ہی ط آحاد خطی کے اور لفظ
آحاد خطی کا حذف کرکی ہم کہا کرتی ہین کہ س د مساوی ہی ط اب کے شکل (۱) مین
س د = ۳ مثال اب کی یعنی س د = ۳ اگر ایسا ہو کہ خط اب کا پورا کئی دفعہ
س د مین نہین پایا جاوی یعنی آحاد س د کی پوری نہین بٹ سکتی ہون آحاد اب
پر تو فرض کرو کہ ی ہے مقسوم علیہ مشترک ان دونو خطون کا دیکھو (شکل ۱)
اور فرض کرو کہ س د ہی م امثال ی کے یعنی س د = م ی اور اب برابر ن ی
تب ظاہر ہی کہ س د اب سی وہی نسبت رکھتا ہی جو م ن سی رکھتا ہی کی یعنی جو م
رکھتی ہی ن سے یعنی جو م/ن رکھتا ہی اب سے اور یہان سے یہہ معلوم ہوا کہ س د ہی م/ن امثال اب کے
یعنی س د = م/ن ص شکل (۲) مین س د = ۵/۳ امثال اب
= ۵/۳ اگر خطوط اب اور س د مین کوئی مقسوم علیہ مشترک نہو تو ہمین جمع

کرنا چاہی طرف اون ترکیبون کی جن پر موقوف ہے مسئلہ مقادیر نزولی کا
علم حساب مین یہہ تحقیق ہے کہ √۲ کو ہم تعبیر کرسکتی ہین کسی عدد صحیح یا کسور
محدودہ سے لیکن یہہ بات باسانی دریافت کرسکتی ہین کہ فلان مقدار محدود √۲ سی
زیادہ ہی اور فلانی مقدار چھوٹی اور یہہ بات جان کر کہ √۲ ہی حد جسکی قریب اتنی قریب
آسکتی ہین جتنا ہم چاہین علامت √۲ کا حساب مین استعمال کرسکتے ہین اب فرض کرو
کہ ق اب مین کئی پوری دفعہ پایا جاتا ہی لیکن وہ نہین پایا جاتا ہی پوری دفعہ
خط س د مین پس اب فرض کرو کہ ایک عدد م ایسا ہی کہ م ق کم ہی س د سی لیکن زیادہ
(م + ۱) ق سی یہہ بات بھی ظاہر ہے کہ ق کو اتنا کم فرض کرسکتی جتنا ہم چاہین کیونکہ جسوقت
اب ق پر قسمت پورا ہوسکی تو بالضرور اب قسمت ہوسکیگا ق کے نصف اور چوتھائی
اور آٹھوین حصہ وغیرہ پر بھی اور یہان سے یہہ معلوم ہوا اگر س د نہین تعبیر ہوسکتا ہی بصحت کمال
کسی اجزا جنسی اب مرکب سے لیکن ہم آدھی اتنا قریب ایسی مقدارون کی لاسکتی ہین جتنا ہم چاہین اور
یہان سے یہہ معلوم ہو کہ س د ہی حد کسی اون مقادیر کے جو اندازہ ہوسکتی ہین ق سے اور ٹھیک اسیطور جسطرح کہ
√۲ کی حد ایک ہے اون مقادیر کے جو اندازہ ہوسکتی ہین عدد اسی پس یہان سے یہہ نتیجہ نکلتا ہی
کہ خط س د کا تعبیر ہوسکتا ہی کسی حرف ط ص ع وغیرہ سے گر یہہ مقادیر یا تو کسور ہین یا صحیح یا مقدار
نزولی (۳) اگر ایک واحد خطی پر ایک مربع بنایا جاوی تو اس مربع کو واحد مربع کہتی ہین فرض
کرو کہ س د ف ی ایک سطح ہی اور اسکا ایک ضلع س ی ہی کہ اوسمین ط کتنی احاد خطی مشتمل ہین م

اور م ن وغیرہ کے ہین اور دوسرا ضلع اوسکا س ی ہی کہ جسمین ص کتنی احاد خطی مثل
س ح اور ح ط وغیرہ ہین تقسیم کرو اس سطح کو احاد مربعوں مین کھینچے خطوط متوازی خط
س د کی نقطوں ح اور ط وغیرہ سی اور خط س ی کے نقطوں م اور ل وغیرہ سے اب ظاہر
ہی کہ سب سے اوپر کی قطار س ح د ق مین ط کتنی چھوٹی چھوٹی مربعے ہین یعنی ط کتنی
مربعے ہین اور اتنی آحاد مربع ہین اس سے نیچے کی قطار مین اور علی ہذا القیاس واسطے باقی قطار کے
لیکن تعداد کل قطارونکے ص ہی پس معلوم ہوا کہ تعداد کل احاد مربعوں کی شکل مین ط × ص ہے
یعنی سطح س ف ط ص آحاد مربع ہین یعنے سطح مذکور مقدار مین برابر ہی ط ص احاد مربع
کی اور جسوقت حذف کرتے ہین ہم الفاظ آحاد مربع کو اوسوقت ہم کہا کرتے ہین کہ سطح
س ف مساوی ہی ط ص کے مثلاً اگر س د = ۵ فٹ اور س ی = ۳ فٹ تو سطح س ف برابر
۱۵ مربع فٹ ہوگی جو کچھ ہمنے اوپر بیان کیا ہی وہ اوسوقت درست ہوگا جسوقت کہ دونون
خط س د اور س ی ایک ہی واحد خطی سے اندازہ ہو سکتی ہین پس فرض کرو کہ خط س د کسی
خاص واحد خطی سے اندازہ کیا جاتا ہے دیکھو (شکل ۴) لیکن س ی اوسی واحد خطی سے تعبیر
نہین ہو سکتی لب اوس سے جو کچھ کہ پہلے بیان کیا گیا ہی یہ بات ظاہر ہی کہ ہم خط س م اور س ن
کے ایسی دریافت کر سکتی ہین جو اوسی واحد خطی سے اندازہ کئی جائین جس سے س د اندازہ کیا جاتا
ہی اور جو اوتنی قریب خط س ی کے ہون جتنا ہم چاہین اب کامل کرو سطحون س ط اور س ق
اب اسیجای ظاہر ہی کہ جسقدر خطوط س م اور س ن کی قریب تر خط س ی کے آتی جاتی ہین
اوسیقدر سطحین س ط اور س ق کی علیحدہ علیحدہ قریب تر سطح س ف کی آتی جاتی ہین
یعنی سطح خطون س د اور س ی کی حد ہی سطح س د اور س م کی یعنی اوس سطح کی جسکے

مساوی ہی حد خط س م کی اب فرض کرو کہ ط اور ص مین تعداد احاد خطی مفروض کے خطون س د اور س م کی اور یہہ بہی فرض کرو کہ س تعبیر کرتا ہی اوس مقدار نزولی کو جو تعبیر کرتی ہی خط س ی کو اور جو حد ھے خط س م پس سطح خطون س د اور س ی = حد سطح خطون س د اور س م = حد عدد ط ص کے = حاصل ضرب جدون ط اور ص کے = ط اور س کے حاصل ضرب کے اور یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ مقدار جبریہ کسی سطح کی مساوی ہوتی ھے حاصل ضرب اوسکی دو متصل ضلعون سے اگر ص = ط تو شکل س ی ہو جاتی ہی مربع خط س د کا اور یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ مربع س د کا مساوی ہی ط × ط کسی احاد مربع = ط * پس اب ہم تعبیر کر سکتی ہین بذریعہ جبر و مقابلہ کی تمام شکل سطوح مستقیم الاضلاع کو کیونکہ سب ایسی شکلین تبدیل کیجا سکتی ہین مثلثون مین اور مساحت مثلث کی مساوی ہوتی ہی نصف مساحت اوس سطح کی جو واقع ہو اوسی مثلث کے قاعدہ پر اور درمیان دو خط متوازی کے

(۴) اب اگر شکلون مجسم کو جبر و مقابلہ سے تعبیر کیا چاہین تو ہمین فقط یہہ لازم ہی کہ دریافت کرین ہم ترکیب واسطی تعبیر کرنی مساحت جسم ایک ایسی جسم متوازی السطوح کی جسکی زوایا مجسم قایمون سے مرکب ہون فرض کرو کہ ط اور ص اور س مین تعداد احاد خطی کے طول او عرض اور عمق شکل مجسم متوازی السطوح مین اب اگر کہینچین سطحین متوازی اوس جسم کے جہہ سطحون کے اور سے اوسکو احاد جسمی مین منقسم کرین تو ہم بطور گذشتہ کے ثابت کر سکتی ہین کہ تعداد احاد جسمی کے شکل مجسم متوازی السطوح مین ط + ص × س ہین یعنی جسم متوازی السطوح مساوی ط + ص × س کے ہی قریب اسطور سی یہہ بہی ثابت ہو سکتی ہی جبکہ کناری یعنی خطوط شکل مجسم مذکور کے ایسی ہون کہ وہ پورے عددین تعبیر ہو

ہو سکتی ہین یعنی جبکہ وہ کسور ہون اگر ص = س = ط تو جسم مذکور ہو جاتا ہے ایک شکل مکعب اور مساوی ہوتا ہے ط × ط × ط یعنی ط³ کے (۵) اب ہم دریافت کرینگے معنی صورتون جبریہ کے صورتون جبریہ مختلف جسم کو بذریعہ ان مساواتون کے کہ اونمین ہر جز حاصل ضرب مساوی مرتبہ کا ہی بآسانی تعبیر کر سکتے ہین جیسا کہ جدول آیندہ مین

لا = لا

لا² + ط لا = ص س

لا³ + ط لا² + ص س لا = د ی ف

لا⁴ + ط لا³ + ص س لا² + د ی ف لا = گ ہ ک ل

لا^م + ط لا^(م-۱) + ص س لا^(م-۲) وغیرہ .... ب ق ر وغیرہ م ا د ن ک ت

اول تو یہ سب صورتین جبریہ بذریعہ احاطے کے سمجھی جاتی ہین مثلاً اگر ہم بجائے الفاظ احاطے کے استعمال کیا جاوے تو صورتین جبریہ مذکور الصدر اسطور سے تعبیر کیجاینگے

لا دفع ح = ط دفع ح

لا² دفع ح + ط لا دفع ح یعنے (لا + ط لا) دفع ح = ص س دفع ح، (لا³ + ط لا² لا ص س لا + دی ف لا) دفع ح = گ ہ ک ل دفع ح) اور علیٰ ہذا القیاس اور صورتین بھی اسطور سے تعبیر ہو سکتی ہین اور اگر حل کرین ہم ان مساواتون کو تو ہر واحد ان مساواتون مین قیمت لا دفع ح کی معلوم ہو جاینگے بذریعہ ط اور ص اور س وغیرہ مثالون ہم کے پس اس صورتین ظاہر ہی کہ ط اور ص اور س وغیرہ نقط اعداد ہین کہ تعلق رکھتی ہین

خطوط سے اور نہین شکلون سے اگر ح حذف کیجائے تو بھی وہی مفہوم ہوتا ہے جو اوپر بیان ہوا ہے اور بسیط حروف ہم سمجھینگے اون تمام مساواتون کو جنکا مرتبہ تیسری مرتبہ سے زیادہ ہو کہ اونسے سمجھا جاتا ہے جبکہ ح تعبیر کرے واحد سطح یا واحد مکعبی کو (۶) علاوہ معنی گذشتہ کے ایک اور بھی معنی تصور توان جبریہ کے ہوتے ہین دو مثلاً مساوات ادبہ ے جدول گذشتہ مین تعلق رکھتی ہین سطحون سے یعنے اوس سے یہہ بات تعبیر ہوئی ہے کہ حاصل جمع دو سطحون کا مساوی ہے ایک تیسرے سطح کی اور اسطور سے مساوات تیسری تعلق رکھتی ہے شکلون مجسم سے یعنی اوس سے یہہ بات تعبیر ہوتی ہے کہ حاصل جمع تین مجسم متوازی السطوح کا مساوی ہے ایک چوتھے مجسم متوازی السطوح کے علاوہ ازین ایک مساوات جو متعلق ہے سطحون سے متعلق خطون سے بھی تصور ہو سکتی ہے کیونکہ سطحین بذریعہ مربعون کے تعبیر ہو سکتی ہین اور جسوقت مربع دو خطون کے مساوی ہوتا ہے اوسوقت وہ خط بھی مساوی ہوتے ہین لیس نکلنے مساوات خطونکی مساوات سطحونکی سے (۷) جو کچھ کہ اوپر مرقوم ہوا اوس سے یہہ ہویدا ہے کہ مساوات دوم اور سوم درجہ بالضرور تعبیر ہو کہ کوئی شکل ہندسی مثلاً مساوات $لا^2 = ط (ط - لا)$ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مشہور شکل ہندسی جسکے ذریعے سے ہم تقسیم کر سکتے ہین کسی خط مفروض کو اسطور سے کہ کل خط اپنے جسم اطول سے وہی نسبت رکھے جو جسم اطول رکھے جسم اصغر سے اگر مساوات تیسرے مین دور کرین ہم دو سے اا تیسرے اجزا اور بدلین د اور ر اور ف کو ۲ ط اور ط اور ط سے علیحدہ علیحدہ تو حاصل ہو جاویگی ہمین مشہور شکل دوگنا کرنا شکل مکعب کے (۸) جسوقت مساواتین حل کیجاتی ہین اور مختلف قسمین مقدار مجہول کی نکلتی ہین تو اوسوقت دو ترکیبین ہین ایک تو یہ ہے کہ اول واسطے حروف ط ص س وغیرہ اعداد فرض کر کے بعد ازان وہ عمل جبریہ جو ضرور ہوں موافق علامات جبریہ کے کریں مثلاً

اگر ط = ۴ اور ص = ۵ اور س = ۶ پس صورتین اگر ہوویگے یہہ مساوات لا = ط
+ ط + س − ص = ۵ امثال واحد خطی کے اور لا = ط ص / س = ۲۰/۶ = ۳ ۲/۶ امثال
واحد خطی کے لا = ط س = √۲۴ = √۶ امثال واحد خطی کے غرض دوسری ترکیب تعبیر
کرنی مقدارون جبریہ کی بذریعہ علم ہندسہ کے ہی اور اس ترکیب کو مقدارونکا بنانا کہتی ہین
یہہ بہت لطیف ترکیب ہی اور علاوہ ازین اونکی واسطے بہت فایدہ مند ہی جو ایک کمال
علم ہندسہ بالجبر کا حاصل کیا چاہین ٭ بیان بنانے مقدارونکا ٭

(۹) فرض کرو کہ لا = خط × ص فرض کرو کہ نقطہ آ واقع ہی مقام پر جہان سے پیمایش خط
کی جو قیمت لا کی ہے شروع کیجاتی ہی

ا ——— د ——— ب ——— س ——— ل

پس اب فرض کرو کہ اب = ط اور ب س = ص اور اسیواسطی اس = اب + ب س =
ط + ص لا اور یہی قیمت لا کی ہی اب فرض کرو کہ لا = ط − ص اور اب فرض کرو کہ ب د
= ص ب اور ا د = اب − ب د = ط − ص ایک اور مثال یہہ ہی فرض کرو کہ لا =
ط ص / س پس دریافت کرو لا کو بذریعہ ہندسہ کے مساوات مفروض سے ظاہر ہی کہ لا : ط
:: ص : س پس معلوم ہوا کہ لا وہ خط ہی جو نسبت مین مقدارون معلوم ط اور ص
اور س سے معلوم ہوتا ہی یعنی لا وہ خط ہی جو اس نسبت سے حاصل ہوتا ہی س کو ص
سے وہی نسبت ہی جو نسبت ط کو کسی اور خط سے ہے اور اب (شکل ۶) مین خطوط س د

اور ب ی ایسے کھینچو کہ وہ نقطہ آ پر ملکی
آپس مین ایک زاویہ بناتے ہوون اور کاٹو

ا ب ی س د

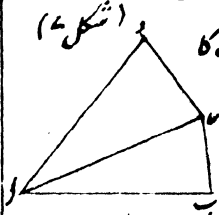
اب = س اور ب ی = ط اور اس = ص اور وصل کرو ایک خط نقطون س اور ب مین

اور نقطہ د سے ایک خط د ی کا متوازی ب س کے کھینچو پس اب موافق دوسری شکل
۶ مقالہ اقلیدس کے یہہ نسبت حاصل ہوگی ا ب : ا س :: ب ی : س د یعنی
ط : ص :: ط ی : س د کیونکہ س د = لا پس معلوم کر لیا ہمنے ایک خط س د کا جو ڈی
لا کی ایک اور مثال یہہ ہی فرض کرو کہ $\text{لا} = \frac{\text{ط ص س}}{\text{د ی}}$ یہہ چاہتی ہیں دریافت کرنا ایک خط مستقیم
مساوی لا کے بذریعہ ترکیب ہندسہ کے اسکی ترکیب یہہ ہی کہ فرض کرو $\text{د} = \frac{\text{ص س}}{\text{ی}}$ پس موافق
مرقومہ بالا کے جب خطوط ص اور س اور ی معلوم ہو جاوینگے اوسوقت خط د معلوم ہو جاویگا
اور چونکہ $\text{لا} = \frac{\text{ط ص س}}{\text{د ی}} = \frac{\text{ص س}}{\text{ی}} \times \frac{\text{ط}}{\text{د}} = \frac{\text{د ط}}{\text{د}}$ اور خط د کا معلوم ہی تو موافق
مرقومہ بالا کی خط لا بھی دریافت ہو سکتا ہی اسیطور سے خط لا معلوم ہو سکتا ہی جبکہ یہہ مساوی تین
مفروض ہوں $\text{لا} = \frac{\text{ط ص س}}{\text{د ا}}$ اور $\text{لا} = \frac{\text{ط ص}^2}{\text{د ا}^2}$ اور $\text{لا} = \frac{\text{ط}^3}{\text{د ا}^2}$ اور $\text{لا} = \frac{\text{ط ص س د}}{\text{ی د ہ}}$
ایک اور مثال یہہ ہی $\text{لا} = \frac{\text{ط ص س} + \text{د ی ف}}{\text{ح ہ}} = \frac{\text{ط ص س}}{\text{ح ہ}} + \frac{\text{د ی ف}}{\text{ح ہ}}$
اسکی ترکیب یہہ ہی کہ موافق مرقومہ بالا کی دو خط مساوی $\frac{\text{ط ص س}}{\text{ح ہ}}$ اور $\frac{\text{د ی ف}}{\text{ح ہ}}$ کی علیحدہ
دریافت کرلو تو لا مساوی اونکی حاصل جمع کی ہوگا (۱۰) $\text{لا} = \sqrt{\text{ط ص}}$ چونکہ $\text{لا}^2 = \text{ط ص}$
تو معلوم ہوا کہ لا ہی وسط فی النسبت مابین ط اور ص کے پس موافق آٹھوین شکل ۶ مقالہ اقلیدس
کی لا دریافت ہو سکتا ہی اسطور سے فرض کرلو ایک خط کہ مستقیم ا ب کا یہہ اور ا س =
ط کی اور س ب = ص کے بناؤ خط ا ب پر ایک نصف دایرہ اور نقطہ س سے ایک
عمود س ی کا قایم کرو پس عمود س ی کا خط لا ہوگا (شکل ۶)
اگر $\text{لا} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ص}}$ تو لو ا س = ص اور کھینچو
عمود س ی ا ب پر اور اوسمین سے کاٹو

س ی = ط اور وصل کرو ایک خط مابین ی اور آ کے اور قایم کرو ایک عمود ی ب اوپر ی آ کی پس موافق شکل ۸ مقالہ ۶ اقلیدس کے س ب = $\frac{ط^2}{ص}$ ∴ لا = ب س فرض کرو کہ لا = $\sqrt{طص + س د}$ ∴ $لا^2$ = طص + س د = ط (ص + $\frac{س د}{ط}$) اور فرض کرو کہ ص + $\frac{س د}{ط}$ = ر ∴ $لا^2$ = ط ر ∴ لا = $\sqrt{ط ر}$ اور چونکہ ر کی مساوی ایک خط معلوم ہوسکتا ہی تو جسوقت ہم ایک خط وسط فی النسبت مابین ط اور ر کے دریافت کرینگے تو خط مساوی لا کی ہوگا اس مثال مین لا کی قیمت ایک اور طرحسے بھی معلوم ہوسکتی ہی چونکہ $لا^2$ = طص + س د تو معلوم ہوا کہ لا ایک ایسا خط مستقیم ہی کہ اوسکا مربع مساوی دو سطحون طص اور س د کی ہی اور جب موافق ۱۴ھ شکل اول مقالہ اقلیدس ان دو سطحونکی ایک سطح بنالین اور موافق ۱۴ شکل مقالہ دوم کی اس سطح کی مساوی ایک مربع بنالین تو ایک ضلع اس مربع کا مساوی لا کی ہوگا فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 + ص^2}$

(شکل ۷)

تو ایک خط ا ب = ط اور نقطہ ب سے ایک عمود ص ب کا مساوی ص کے ا ب پر قایم کرو پس خط ا ص مساوی لا کی ہوگا فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 + ص^2 + س^2}$ اس پر ایک خط عمود س د مساوی س کے بناؤ تو ا د ایک خط لا کے مساوی ہوگا فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 - ص^2}$ = $\sqrt{(ط + ص)(ط - ص)}$ پس معلوم ہوا کہ لا وسط فی النسبت ہی مابین ط + ص اور ط − ص کے پس شکل گذشتہ سے ایک شکل بیچ مین فرض کرو کہ ا ب = ط اور ا ی = ص ∴ ب ی = $\sqrt{ط^2 - ص^2}$ فرض کرو کہ لا = $\sqrt{ط^2 + ص^2 - ص^2 - د^2}$ دریافت کرو د کو مساوات $ر^2$ =

ط² + ص² سی اور ع کو ع² = س² + د² سی اور لا کو لا² = ر² − ع² سے موافق

رقومۂ بالا کی فرض کرو کہ $لا = \sqrt{\frac{ط^2 + ص^2 س^2}{ص^2 - س^2}}$ دریافت کرو ر² = ط² + ص² اور

ع² = ص² − س² اور بعد ازان $لا = \frac{ط ر}{ع}$ کو

(۱۱) یہہ بات نہایت ظاہر ہی کہ اگر بجاے حروف ط اور ص وغیرہ اعداد

فرض کیے جائین تو بھی مثالین مذکورالصدر سیطور سے حل ہو سکتی ہین مثلاً $لا = \sqrt{۱۴}$

$= \sqrt{۷ \times ۲}$ پس اس صورتمین شکل گذشتہ سی پہلی شکل مین فرض کرو کہ س ا =

۲ اور ب س = ۷ پس ی س = $\sqrt{۱۴}$ = لا فرض کرو کہ $لا = \sqrt{۵} =$

$\sqrt{۲^2 + ۱^2}$ پس بذریعہ ۴۷ شکل اقلیدس کے ایک خط مساوی لا کے معلوم ہو

سکتا ہی $لا = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \therefore لا = \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}} = \sqrt{(\frac{۱}{۲})^2 + (\frac{۱}{۲})^2}$

(۱۲) جب مقادیر جبریہ مرکب ہوتی ہین تو اونکی مساوی خط دریافت کرنیکی واسطے یہہ

قاعدہ بنایا گیا ہی اونکی ہر جزو کے واسطے ایک ایک خط دریافت کرلین اور بعد

ازان ان سب خطوطنکی مساوی ایک خط دریافت کرلین لیکن اب ہم ایک ایسی

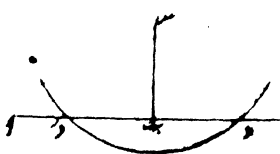
ترکیب لکھتی ہین کہ اوسکی ذریعہ سی مرکب مقادیر کے مساوی ایک خط ایک ہی شکل

کے ذریعہ بنالین مثلاً فرض کرو کہ $لا = ط \pm \sqrt{ط^2 - ص^2}$ (شکل ۸)

خط ا ل پر لو ا ب = ط اور نقطہ ب سی

کھینچو ب س = ص عمود اوپر ا ب کی

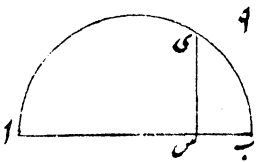
اور س کو مرکز مقرر کرکے اور ط کو نصف قطر

ایک دایرہ کھینچو اور فرض کرو کہ وہ خط ا ل کو

نقاط د اور دَ پر تقاطع کرتا ہی سبب ظاہر ہی کہ ا د اور ا دَ دو قیمتین ا ک کی ہین پس واضح ہو گا کہ ا د = اب + ب د = ط + مر ط۲ − ص اور ا دَ = اب − ب دَ = ط − مر ط۲ − ص یہہ ترکیب عمل مین نہین آسکتی ہی جس وقت ص زیادہ ہو ط۲ سی کیونکہ اسصورت مین دایرہ خط ا ل کہین تقاطع نہین کریگا اور یہی تمثال غیر ممکن ہونی جذر کی سی واضح ہوتا ہی — (۱۳) اشکال ہندسی یا تو خطوط کی باب مین یا سطحون یا جسمون کے باب مین ہوتی ہین تو جو مساواتین ان اشکال کو تعبیر کرین بالضرور متجانس ہونی چاہین ہین یعنے سب اجزا ایک سی صعود یا نزول کا حاصل ضرب ہونی چاہین اور اسیواسطی اگر کسی جا ایسی صورتین واقع ہون لا۲ = ط/ص اور لا = مر ط اور لا = مر ط۲ + ص وغیرہ تو قبل ازین جاری کرانی عملون ہندسی کے لازم ہی کہ ہم اول اون مقدارونکو جنکا مرتبہ صعود وغیرہ بہ نسبت اور مقدارونکے کم ہی عدد ایک مین ضرب کرلین مثلا صورتون گذشتہ کو بطور ذیل لکھنا چاہیئے لا۲ = ط/ص × ۱ اور لا = مر ط × ۱ اور لا = مر ط۲ + ص × ۱ اور بعد ازان عمل کرنا چاہیے —

باب دویم

سوالات منقطع کے بیان مین

(۱۴) سوالات ہندسی دو قسم کے ہوتی ہین منقطع اور غیر منقطع اول قسم کے وہ ہین جنکی جواب ایک یا زیادہ تعداد مین محدود ہین اور دوسری قسم کی وہ جنکی جواب کی تعداد بےنہایت ہی اگر (شکل ۹) مین ہم یہہ سوال کرین کہ ذ ہ دکھنا

نقطہ خط ات پر ہی کہ اگر اوس نقطہ سی ایک عمود نصف دایرہ تک کہ اوسی خط پر بنایا
جاے کہینچین تو وہ عمود مساوی نصف قطر دایرہ ہو
تو یہہ ظاہر ہی کہ یہہ سوال آیک سوال منقطع ہی
کسواسطی کہ فقط دو ایسی نقطے مساوی فاصلہ

ی ۹ ا س ب

پر مرکز کی دونون طرف واقع ہین جنسی عمود مطلوب کہیچا جا سکتا ہے لیکن اگر ہم یہہ سوال
کرین کہ ایک خط مفروض اب کے باہر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اوسمین اور دو سری نقطون
خط مفروض مین خطوط ملاے جائین تو زاویہ جو اس نقطہ پر بنیگا وہ قایمہ ہوگا آپ واضح
ہو کہ اس سوال کی بیشمار جواب ہین کسواسطیکہ اگر خط مفروض پر ایک نصف دایرہ بناوین
تو جتنی نقطے محیط نصف دایرہ مین ہین وہ سب ایسی نقطے ہین کہ جنمین صفت مطلوب پائی
جاتی ہی — سوالات منقطع اسقدر مفید اور مشکل نہین ہوتی ہین جسقدر کہ غیر منقطع
ہوتی ہین لیکن منقطع سوالون حل کرنے سی بہی ایک طرح کی استعداد زیادہ ہوتی ہی
اسیواسطے ہم اس قسم کی چند سوال اس جاہی حل کرتے ہین —

(۱۵) واسطے حل کرنی سوالات منقطع کی قواعد آیندہ بہت مفید ہین
قاعدہ اول ایک شکل ایسی بنالو جس سے سب شرایط سوال کی تعبیر ہو جائین قاعدہ دوم
کہینچو اور خطوط اگر ضرور ہون متوازی اور عمود خطون شکل مذکور پر قاعدہ سیوم اون
خطوط کو جو معلوم ہین ط اور ص اور س وغیرہ سی تعبیر کرد اور غیر معلوم خطون کو
حروف لا اور تر اور ق وغیرہ سی قاعدہ چہارم تمام خطون اصلی شکل کو بطور مقادیر معلوم
کی تصور کرلو اور بعض خواص ہندسی کو جو اوس شکل مین پائے جاتے ہون ایک یا زیادہ

ایسی مساواتین بناؤ کہ اونین مقادیر معلوم اور غیر معلوم دونوں بائے جائین —

قاعدہ پنجم ان مساواتون کے ذریعہ سے مقادیر مجہول کی قیمت دریافت کرو —

قاعدہ ششم ان قیمتونکی مساوی خط بناؤ اسطورسے کہ وہ شکل مفروض مین موجود ہو جائین — (۱۶) سوال بناؤ ایک مربعہ ایک مثلث اب س مفروض مین فرض کرو کہ دی ف ح مربعہ مطلوب ہے اور س ہ کا ارتفاع مثلث کی ہی پس اس سوال مین نقطہ یہ بات دریافت کرنا چاہئے کہ نقطہ ہ کس جای

س کہ پر واقع ہی اسواسطےکہ اس صورت مین مقام ہ کہ کا معلوم ہو جائیگا اور مربعہ آپ بنجائیگا آب فرض کرو کہ س ک = ط اور اب = ص اور س ہ = لا تب موافق شرایط سوال کے دی = ہ کہ اور دی : اب :: س ہ : س کہ یا دی : ص :: لا : ط ∴ دی = $\frac{\text{ص لا}}{\text{ط}}$ اور ہ کہ = ط — لا ∴ $\frac{\text{ص لا}}{\text{ط}}$ = ط — لا ∴ لا = $\frac{\text{ط}^2}{\text{ط + ص}}$ پس پایا اسی معلوم ہوا کہ ل : ط :: ط : ط + ص اب خط س ا مین سے کاٹ لو س ل = ط اور خارج کرو س ا کو م تک اسطور سے کہ ل م = ص وصل کرو م ک کو اور نقطہ ہ سے کھینچو ہ ل متوازی ک م کے پس س ہ قیمت مطلوبہ معلوم ہو گئی —

ہین یعنی ایک مثلث قایمہ الزاویہ دیا ہوا ہے جو حادہ زاویون کے نقطونسے مقابل کے ضلعونکے وسط مین جاکر ملتی ہین اور دریافت کیا جاہتی ہین ہم مثلث مذکور کو

فرض کرو کہ بی ی = ط اور ب د = ص اور ا د = س د = لا اور ا ی =

ی ب = ک اب ظاہر ہی کہ

ط۲ = ۴ لا۲ + ک۲ اور

ص۲ = لا۲ + ۴ ک

اور حل کرنے ان دو مساواتون کے معلوم ہوگا کہ ک = ± √((۴ ص۲ − ط۲) / ۱۵)

بناؤ کوئی زاویہ قایمہ اور کاٹو ایک ضلع اوسکی دو ضلعون مین سے برابر ط/۲ کو

مرکز گرد انکے کہینچو دو دایرہ جنکے نصف قطر برابر ہون ۲ ا ط اور ص کے اور

فرض کرو کہ ان دو دایرون نے قطع کیا خط ب ا کو اوپر دو نقطون ک اور ہ کے

اب ملاؤ ایک خط درمیان نقطون ف اور س کی اور کہینچو خط ک د کو متوازی خط

ہ ف کی پس ۲ ا ی برابر ہوگا د ک کے —

(۱۶) تقسیم کرو ایک خط کو ایسی دو قسمون مین کہ سطح اون دونون کا برابر ہو مربع ایک

خط معلوم ق س کے فرض کرو کہ ا ب = ط اور ا ح = لا ∴ ب ح = ط − لا

اب موافق دعوی کے ا ح × ب ح = ص۲ یا لا (ط − لا) = ص۲

∴ ط لا − لا۲ = ص۲ یعنے لا۲ − ط لا = − ص۲ موافق قاعدہ مساوات کے —

(۱۹) نقطہ م کا واقع ہی برابر فاصلون پہ ب ب' اور ا ا' سے جو متقاطع علی القوایم ہین

اس نقطہ مین سی گذرتا ہوا کھینچو خط ف م ق اسطرحسی کہ جز ق ف جو مابین خطون ا ا' اور ب ب' کی محدود ہی مساوی مقدار معروض ص کی ہو نقطہ م سی کھینچو عمود م ص اور م د اور فرض کرو کہ م د = ط اور د ق = لا اور ص ف = ر آب ظاہر ہی کہ ف ق = ف م + م ق ∴ $ص = \sqrt{ط^2 + ر^2} + \sqrt{ط^2 + لا^2}$ اور $\frac{لا}{ط} = \frac{ط}{ر}$ اسواسطیکہ مثلث ف ص م اور م د ق آپسمین متشابہ ہین ∴ $ص = \sqrt{ط^2 + \frac{ط^4}{لا^2}} + \sqrt{ط^2 + لا^2} = \sqrt{ط^2 لا^2}\left(1 + \frac{ط}{لا}\right)$ اور یہانسی یہہ مساوات حاصل ہوتے ہی $لا^4 + 2ط لا^3 + (2ط^2 - ص^2) لا^2 + 2ط^3 لا + ط^4 = 0$ اس مساوات کے حل کرنیسی چار قیمتین لا کی معلوم ہوسکتی ہین اور شکل کہیچ سکتی ہی لیکن دریافت کرنا قیمتون چوتہی درجہ کی مساوات کا

طویل اور مشکل ہی اسواسطے اس سوال کو اور طور سے حل کرتی ہین چونکہ چار خط ف م ق اور ف م قَ اور س م اور رَ س م ایسی کہینچی جاسکتی ہین کہ اون شرایط سوال کی پوری ہوسکتی ہین تو اس سے معلوم ہوتا ہی کہ اس سوال کے چار جواب ہین لیکن چونکہ نقطہ م کا خطوط ا اَ اور ب بَ سی نسبت ایک طرح پر واقع ہی اسواسطے ہم خیال کرسکتی ہین کہ خطوط مطلوبہ بہی ا اَ اور ب بَ کی نسبت ایک ہی طرح پر واقع ہون مثلاً ایک خط ف م ق اور دوسرا ف م قَ ہو تو ضرور ہی کہ و قَ = و ف اور و فَ = و ق و س = و سَ اور و ر = و رَ پس اگر ہم بجاے مقدار مجہول کے لیوین اوس عمود کو جو نقطہ د سی اوپر خط س رَ کی کہینچا جاوے اور فرض کرین اوسی = ر تو نقطہ دو قیمتین اوس خط مجہول کی ہونگی ایک تو متعلق خطوط س ر اور سَ رَ کی ہوگی اور دوسری ف ق اور فَ قَ کی پس وہ مساوات جسی حل کرنا ہوگا درجہ دویم ہوگی یعنے یہہ ہوگے $ر^٢ + ٢ ط ر - ص ط = ٠$ اب چونکہ م ر = م رَ اور نقطہ ہ پر خط س ر نصف ہوتا ہی تو بجاے مقدار مجہول کے ہم خط م ہ کا لیسکتے ہین اور اس فرض کی موافق ہم ایسی مساوات حاصل کرسکتے ہین کہ وہ درجہ دویم کی ہو یا درجہ دویم کیطرف تحویل ہوجاویگی فرض کرو کہ م ہ = لا $\therefore$ م ر = لا + $\frac{ص}{٢}$ اور م س = لا − $\frac{ص}{٢}$ اور م ر : م ہ :: ر س : س و = $\frac{ط ص}{لا + \frac{ص}{٢}}$ اور م س : د د :: ر س : ر و = $\frac{ط ص}{لا - \frac{ص}{٢}}$ لیکن $ر س^٢$ = $ر و^٢$ + $س و^٢$ تو معلوم ہوا کہ $ص^٢ = \left(\frac{ط ص}{لا + \frac{ص}{٢}}\right)^٢ + \left(\frac{ط ص}{لا - \frac{ص}{٢}}\right)^٢ \therefore لا^٤ - (٢ ط^٢ + \frac{ص^٢}{٢}) لا^٢ + \frac{ص^٤}{١٦} - \frac{ط^٢ ص^٢}{٢} = ٠ \therefore لا = \pm \sqrt{ط^٢ + \frac{ص^٢}{٤} \pm ط \sqrt{ط^٢ + ص^٢}}$

یہہ ایسی صورت ہی کہ اسکی وسیلہ سی شکل بآسانی کھینچ سکتے ہی اسمین مقدار منفی لا کے
بیفایدہ ہے اور باقی دو قیمتون مین سے وہ قیمت جسمین ط + $\sqrt{ط^2 + ص^2}$ مثبت ہی ہمیشہ ممکن
رہتی ہی اور خطون م س ر اور م س ر سی متعلق ہی اور دوسری قیمت جسمین ط − $\sqrt{ط^2 - ص^2}$
منفی ہوتی ہی ایسی ہوتی ہی کہ وہ متعلق ف م ق اور ف م ق سی ہوتی ہی لیکن یہہ
قیمت غیر ممکن ہوتی ہی جبکہ ص^2 کم ہو ۸ ط^2 سے یعنی جبتو ثبت ملا دین ہم خط و م اور کھینچین
خط ف م ق عمود و م پر تو اس صورت مین اگر ص کم ہو ف م ق سی تو لا کی قیمت
غیر ممکن ہوگی یہہ سوال نیوٹن صاحب کی علم حساب عامہ سی نکالا گیا ہی اور اس سے یہہ بات معلوم
ہوجاتی ہی کہ حل کرنے مسایل ریاضی مین کونسی مقدار کا مجہول فرض کرنا زیادہ مناسب ہے تاکہ
آسانی سی مساوات حل ہوسکی اگر کسی شکل کو حل کرنا ہو تو مجہول ایسا فرض کرنا چاہیے
جسمین تبدیلی بہت کم واقع ہو — (۲۰) شکل گذشتہ مین نقطہ م پر سی گذرتا ہوا ایک
خط ف م ق ایسا کھینچو کہ حاصل جمع مربعون ف م اور م ق کا مساوی ہو ربعہ مفروض ص^2
کے اگر بطور اول جز فقرہ گذشتہ کی حروف بجای خطوط مختلفہ کی فرض کیے جاین تو حاصل ہونگے
یہہ مساواتین لا^2 + ط^2 + ر^2 + ط^2 = ص^2 اور لا ر = ط^2 ∴ لا^2 + ر^2 + ۲ لا ر =
ص^2 اور لا + ر = ± ص یا لا + $\frac{ط^2}{لا}$ = ± ص اور اس مساوات سی حاصل ہوتی ہی
یہہ قیمت لا کی لا = ± $\frac{ص}{2}$ ± $\sqrt{\frac{ص^2}{4} - ط^2}$ اب واسطے اس امر کی کہ بجای ان چار قیمتون لا کے
خطوط شکل مین کھینچے جاوین لازم ہی کہ م کو مرکز گردانکی بفاصلہ نصف قطر $\frac{ص}{2}$ کی ایک دایرہ
کھینچین اور فرض کرو کہ خط ا ا کو یہہ دایرہ نقاط ل اور ل پر تقاطع کرتا ہی اور بعد
ازان ل اور ل کو مرکز گردانکی بفاصلہ $\frac{ص}{2}$ نصف قطر کی دو اور دایری کھینچو تو ظاہر ہی کہ

یہہ دو دایری خط اا کی چار نقطون مین کاٹین گے اور یہہ ہی چار نقطے نقاط مطلوبہ ہین

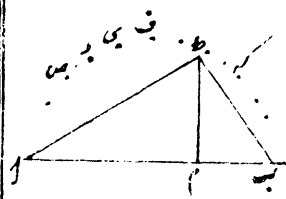
(۲۱) ہم ایک ایسا مثلث اب س دریافت کیا چاہتے ہین کہ اوسکی ضلع ا س اور ب س اور ب ا اور عمود ب د سب کے سب اجزا سلسلہ ضرب کے ہین فرض کرو کہ کسیکو خط مفروض مین سے = ط اور ب س = لا اب ا [illegible] ب س :: س ب : ب ا :: ب ا : ب د اور یہان سے موافق ساتوین شکل چھٹی مقالہ اقلیدس کے ضرور ہے کہ مثلث ا س ب اور ا ب د آپسمین مساوی الزوایا ہون اور ا ب س کا ایک قایمہ ہی اور ا س = $\frac{لا^2}{ط}$ پس مربع ا س = مربع ب س + مربع ا ب ∴ $\frac{لا^4}{ط^2} = لا^2 + ط^2$ یعنے $لا^4 - ط^2 لا^2 - ط^4 = 0$ اور اس مساوات سی یہہ قیمت لا کی دریافت ہوتی ہی $لا = \pm\sqrt{\frac{ط^2 \pm ط^2\sqrt{5}}{2}}$

ان چار قیمتون لا کی مین سی دو غیر ممکن ہین کیونکہ $ط^2\sqrt{5}$ زیادہ ہی $ط^2$ سے اور باقی دو مین سی ایک جو منفی ہی وہ بیکار ہی اب خارج کی ہوئی مین سے فرض کرو کہ ب ی = $ط\sqrt{5}$ (۱۱) اور ی ف = $\frac{ط}{2}$ اور ا ف پر کہینچو ایک نصف دایرہ اور کہینچو عمود ی گ پس اسصورتمین ی گ = $\sqrt{\frac{ط}{2}(ط + ط\sqrt{5})}$ = $\sqrt{\frac{ط^2 + ط^2\sqrt{5}}{2}}$ اور یہہ ہی قیمت مطلوبہ لا کی ہی

باب سیوم

نقطہ اور خط مستقیم کے بیانمین

(۲۲) باوجود حساب کی کہ سوالات منقطع بہت عجیب ہوتی ہین لیکن اسکا واسطے کہ اونسی کوئی بات بڑی [illegible] نفع خلق قابل بہت توجہ کی نہین مگر جب

اول دفعہ جبر و مقابلہ یورپ میں مروج ہوا اوسوقت اسی فرع علم ہندسہ میں جبر
و مقابلہ کا استعمال کیا گیا لیکن ڈسکارٹیز نے جو فرانسیسی حکیم تھا اوس نے ۱۶۳۷ کے
ابتدا میں موجود تھا اول دفعہ جبر و مقابلہ کا اوس باتوں میں استعمال کیا وہ جبر و مقابلہ
کو خطوط کے باب میں کام میں لایا اور سطح پر اوس نے ایک نیا علم ایجاد کیا جسکا نام
علم ہندسہ بالجبر رکھا گیا ڈسکارٹیز کی ترکیب ایک سہل مثال سے بخوبی ہویدا ہوگی
فرض کرو کہ چاہتے ہیں ہم دریافت کرنا ایسے نقطہ کو کہ وہ واقع ہو باہر ایک خط مستقیم
اب کے اور مجموعہ مربعوں اط اور ب ط
کا مساوی ہو مربع اب کے فرض کرو کہ ط
نقطہ مطلوبہ ہے اور اوس نقطہ سے عمود
طم کا خط اب پر کھینچو اور فرض کرو کہ ام = لا اور م ط = ر اور اب = ط
پس موافق شرایط سوال کے ظاہر ہے کہ مربع اب = مربع اط + مربع ب ط
= مربع ام + مربع طم + مربع طم + ب م یعنی ط² = (لا² + ر²) + ر² +
(ط − لا)² = ۲ر² + ۲لا² − ۲طلا + ط² ∴ ر² = طلا − لا² اب ظاہر
ہے کہ اس مساوات میں بیشمار قیمتیں واسطے لا کے فرض کیجا سکتی ہیں مثلاً واسطے
لا یا ام کی ط/۲ اور ط/۳ اور ط/۴ وغیرہ فرض کرسکتے ہیں اور ان فرضوں
کی موافق اوتنی ہی قیمتیں ر یا طم کی دریافت ہونگی اور ہر واحد ان قیمتوں
سے ایک نقطہ جس سے شرایط سوال پوری ہونگی دریافت ہوگا فرض کرو کہ ص
ق ی ف وغیرہ وہ نقاط ہیں جو اسطرح دریافت ہوئے ہیں تعداد قیمتوں

تر کی زیادہ ہوسکتی ہی اگر واسطے لا کے ایسی قیمتین لیوین کہ وہ مابین قیمتون
مذکورہ بالا کی واقع ہوون اور اس صورت مین ظاہر ہی کہ بے نہایت قیمتین تر کی
دریافت ہوسکتی ہین اور ان قیمتون کی وسیلہ سے بے نہایت نقطی مثل ص ق ی ت
وغیرہ کی دریافت ہوسکتی ہین اور یہ نقطے آپسمین بہت کم فاصلہ پر واقع ہونگے
اور آخر کو ان نقطون سی ایک خط بن جاویگا اس خط ا ص د ی ف وغیرہ کو
خواہ خط مستقیم ہو خواہ خط منحنی خط اس مساوات کا کہتی ہین ——
اس طور سی حل کرنا سوالات غیر منقطع کا گویا تحقیق کرنا مساواتون غیر منقطع
کی خطون کا ہی اور یہی فرع علم ریاضی بہت بڑی ہی اور اس سے بہت سی باتین معلوم
ہوسکتی ہین ——

(۳۰) اسباب کی واسطے کہ تحقیقات خطون مساوات کی آسانی ہوسکی ریاضی
دانون نی مساواتون کی دو قسمین کی ہین اول مساوات جبریہ دویم مساوات
غیر جبریہ مساوات جبریہ اوسی کہتی ہین جسمین دو مقدارین غیر مقررہ لا اور ر
پائی جاوین اور اوسکی اجزا محدود ہون اور قوای ر اور لا کی اعداد صحیح ہون
اور مساوات مین مقادیر مقررہ بہی پائی جاوین اور اوس مساوات جبریہ کو
کامل کہتی ہین جسمین [illegible] ایک مجموعہ مقادیر غیر مقررہ کی اور ایک مجموعہ مقادیر
مقررہ کا پایا جاوے [illegible] قوای مقادیر غیر مقررہ [illegible]
ہین [illegible] دو مساواتین ہین ——

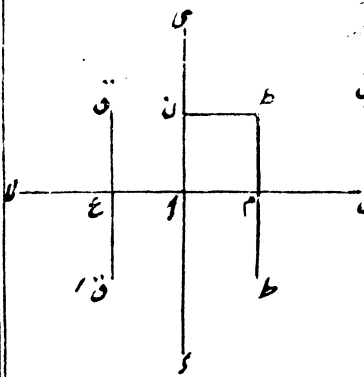
اور [illegible] مساوات کا کہتے ہین

ط ر + ص لا + س = ۰   ط ر۲ + ہ ص لا ر + س لا۲ + د ر + ی لا + ف = ۰

اول مساوات کامل مساوات درجہ اول کی ہی اور دوسری کامل مساوات درجہ دویم
کی ہی اور جہی قیاس کرنا چاہئے اور درجہ کے مساواتون کا اون مساواتونکو جنمین
مقادیر غیر مقررہ لا ر اور ر آتی ہین لیکن اونکی اجزا غیر مقررہ محدود اور غیر کسری
نہین ہین مساوات غیر جبریہ کہتی ہین مثلاً ر = جیب لا ... ملا مساواتین
غیر جبریہ ہین — (۲۴) نام خطون مساواتون کا اونکی مساوات
کی موافق ہوتا ہی مثلاً خط اول درجہ کی مساوات کو خط اول درجہ کا کہتی ہین اور خط
دوسری درجہ کی مساوات کو دوسری درجہ کا خط کہتی ہین
اور خط مساوات غیر جبریہ کو خط غیر جبریہ کہتی ہین مساوات جبریہ مین ہمیشہ یہہ نہین ہوتا
کہ اوسکی کوئی خط ضروری تعلق رکہی اسواسطے کہ مساوات ایسی بہی ہوسکتی ہی کہ جسکی کوئی
قیمت ممکن نہو اسکی مثال یہہ ہی ر۲ + لا۲ + ط۲ = ۰ یہہ ایک ایسی مساوات ہی کہ
جسمین کچہہ ہی قیمت لا کیواسطے فرض کرین پہر بہی کوئی قیمت ممکن ر کی واسطے دریافت
نہین ہوسکتی اور بہیا لسنی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ کوئی خط اس مساوات سی متعلق نہین ہی

دریافت کرنا مقام کسی نقطہ کا خاص سطح مین

(۲۵) مقام ایک نقطہ کا کسی سطح مین اسطرح دریافت ہوسکتا ہی کہ معلوم کرلین ہم
اوسکا مقام بلحاظ بعض اشیاء مقررہ کے کہ سطح مذکور مین واقع ہون لیکن جب یہہ
معلوم ہوا تو فرض کرلی ہین ہم کہ سطح کاغذ کی سطح مفروض ہی اور مان لیتی ہین ہم
کہ نقطہ تقاطع ر دو خطون غیر محدود لا لا اور ر ر کا اور زاویہ جو مابین ان

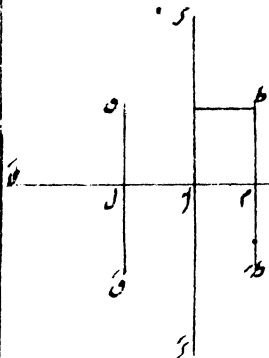
دونون خطون کے واقع ہی معلوم ہی اب کسی نقطہ ط سی کہ اسی سطح مین واقع ہی
کھینچو ط م متوازی آی کی اور ط ن متوازی آل کے پس اس صورت مین ظاہر ہی
کہ مقام ط کا معلوم ہوجاویگا اگر مقدار خطون آم اور آن کی معلوم ہون اسواسطے
کہ دلیل مذکور سی یہہ بآسانی ثابت ہو سکتا ہی کہ مابین زاویہ آل کے فقط ایک ہی ایسا
نقطہ ہی کہ اسکی فاصلے متوازی آی اور آل سے ط ن اور ط م ہین
آم کو وتر العرض نقطہ ط کا کہتی ہین اور
آن یا اوسکے مساوی ط م کو وتر کہتی ہین
اور آم اور ط م دونون کو اوتار
نقطہ ط کی کہتی ہین - آل کو محور
اوتار وتر العرض کا اور آی کو محور
وترون کا کہتی ہین اور نقطہ آ کو جسپر
دونون محور تقاطع کرتی ہین نقطہ شروع کہتی ہین محورون کو ترچھا یا متقاطع علی
القوایم کہا کرتی ہین جب کہ زاویہ ی آل ترچھا یا قایمہ ہو اس رسالہ مین محور
متقاطع علی القوایم کا اکثر استعمال کیا ہی اسواسطے کہ اوسمین بہت سہولت ہولی
فرض کرو کہ آم = لا اور م ط = ی پس جسوقت پیمایش کرتی ہین ہم ان خطون
کو تو دریافت ہوتا ہی کہ اول ط ہی اور دوسرا ص پس واسطے دریافت کرنی مقام
نقطہ ط کے دو مساواتین کفایت کرتی ہین لا = ط اور ی = ص
مقام اسی نقطہ کا اس مساوات سی بہی دریافت ہو سکتا ہی $(ی - ص)^2 + (لا - ط)^2 =$ ۰

اسواسطی کہ شرط اس مساوات کی اوسیوقت پوری ہو سکتی جبکہ ث = ا ا = ط
اور ر = ص پس یہانسی عام قاعدہ یہہ نکلتا ہی کہ جو کوئی ایسی مساوات ہو کہ اوسکی
شرط نقطہ ایک ایک قیمت لا اور ر کی ایسی پوری ہوتی ہو وہ مساوات متعلق اوس نقطہ
کی ہوگی جسکا مقام بذریعہ قیمتون مذکورہ کی متعین ہوتا ہی ——
(۲۶) اسیطور سے مقام کسی نقطہ کا درمیان زاویہ ی آل کی دریافت ہو سکتا ہی لیکن
واسطی دریافت کرنے مقام اون نقاط کی جو زاویہ ی آ لا کی درمیان مین واقع
ہون چند اور باتون کا بہی لحاظ رکہنا ضرور ہی فقرہ (۱۸) مین ایک مسئلہ کی
حل کرنے مین ہمنی بیان کیا ہی کہ مقادیر منفی کی پیمایش ایک خاص سمت مین ہوا
کرتی ہی پس اگر اسی خیال کو ہم زیادہ وسعت دین اور آیندہ کی باتین حاصل ہو سکینگے
جب کسی مقدار پر علامت نفی کی ہم پاتی ہین تو اوس سے ہمارا مراد یہہ نہین ہوتی ہی کہ
اوسکی مقدار مین کچہہ فرق آگیا بلکہ یہہ مراد ہوتی ہی کہ اوسپر ایک طرح کا عمل کرین اور
اور اوسی خاص سمت مین پیمایش کرین مثلاً مقدار مطلق — ہ کی وہی ہی جو + ہ
کی ہی لیکن — ہ سی فقط یہہ مراد ہی کہ ہ کو تفریق کرنا چاہیئے اور + ہ سی یہہ مراد
ہی کہ ہ کو جمع کرنا چاہیئے علامت اثبات یعنی + مختلف مقدارون پر واقع ہوتی ہی اور
اس علامت کی موافق مقدارین مختلف واسطے علامت نفی یعنی — سی ہوتی ہین
کچہہ ہی معنی واسطے + کی ہون لیکن ہر صورت مین یہہ مساوات ہوگی — ط + ط
= ۰ پس یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ — ط کی یہہ معنے ہین کہ اگر اوسپر + ط لگا دیتے
تو مجموعہ صفر ہو جاوے اور حقیقت مین یہی معنی علامت نفی کے ہوتی ہین کہ وہ ہمیشہ اوپر علامت

+ کی موقوف ہوتی ہی مثلاً اگر ایک بالشت پانی مین رکھین اور اوسپر نشان لگاوین
لگالین اور ایک خاص سیدہ یا نشان عظیم کرلین کہ اوس سے یہہ بات شمار کیا کرین کہ سطح
پانی کی کسقدر اونچی اوس نشان سے ہی پس اسصورتمین اگر پانی اونچا اس نشان سے ہو مثلاً
۱۱ انچ بلند ہو تو اس بلندی کو مثبت ۱۱ انچ کہا کرتی ہین لیکن اگر پانی نشان سے ۱۱
انچ نیچا ہو تو کہا کرتی ہین کہ پانی کی سطح نفی ۱۱ انچ اونچا نشان مذکور سی ہی اور اسکی
وجہ یہہ ہی کہ اگر اس نفی بلندی پر ۱۱ انچ مثبت زیادہ کرین تو بالضرور حاصل جمع
مساوی صفر کے ہوگا اور پانی کی سطح ٹہیک برابر نشان کے ہوگی اور اوسکا فاصلہ
اوسی نشان سی صفر انچ ہوگا فرض کرو کہ ایک آدمی ۶ گہنٹی مین ف میل
تعداد مین ایک خاص سمت مین سفر کرتا ہی اور اسیقدر وقت مین ق میل بعد واپس
سمت مخالف مین آتا ہی پس اسصورتمین ظاہر ہی کہ کل ۱۲ گہنٹہ مین وہ ف − ق
حرکت کریگا یعنی اوسکا فاصلہ مقام شروع سی ف − ق میل ہوگا مثلاً اگر ف =
۱۰ اور ق = ۶ میل تو بعد ۱۲ گہنٹہ کی اوسکا فاصلہ مقام شروع سے ۱۰ − ۶ = ۴
میل ہوگا لیکن فرض کرو کہ شخص مذکور ۱۰ ہی میل واپس سے آتا ہی تو اوسکا فاصلہ مقام
شروع سے ۱۰ − ۱۰ یعنی صفر میل ہوگا یعنی ۱۲ گہنٹی کی بعد وہ آدمی پہر اوسی مقام
پر آجایگا جہاںسی وہ چلا تہا فرض کرو کہ شخص مذکور ۱۵ میل واپس چلا تو ظاہر ہی کہ
اسصورتمین وہ بعد ۱۲ گہنٹہ مقام شروع صفر کی سی ۵ میل پیچہی ہٹ جایگا اسکی
جاے ہم لفظ پیچہی کا کام مین لاتی ہین اسواسطیکہ جبکہ اول دفع وہ مقام شروع صفر کر سکتا
تہا تو ہمنی یہہ بات مانلی تہی کہ وہ آگی کو چلتا ہی اور اسصورتمین ظاہر ہی کہ جب مسافر

۱۰ میل چلتا ہی اور ۱۵ میل پیچھے واپس آتا ہی تو ظاہر ہی کہ حقیقت مین وہ مقام شروع سی ۔۔۔ ۵ میل چلا یعنی ۵ میل آگی چلنا پہر ضرور ہہ تا کہ مسافر اپنی اصلی یعنی شروع کے مقام پر آجاوے فرض کرو کہ نقطہ آ سمت مثبت آ ل مین ایک خط پیمایش کیا جاوے اور پہر یہہ فرض کرو کہ ایک خط مستقیم بسبب حرکت اس نقطہ کی بنی اور جب وہ نقطہ مقام ب تک جاوے یعنی ل ——— ب ص ——— ا

م آحاد خطی طی کری اوسوقت وہ پہر اولٹا مقام ص تک چلی اور اس مسافت مین وہ ن آحاد خطی طی کری پس اسصورت مین ظاہر ہی کہ کل مقدار آگی چلنی نقطہ آ کی م-ن آحاد خطی سی تعبیر کیجاویگی پہر فرض کرو کہ ن زیادہ ہی م-ن سی پس اسصورت مین بھی ظاہر ہی کہ کل مسافت آگی چلنے آکے م-ن ہوگی لیکن اب م-ن ایک مقدار منفی ہوگی اور اس سے یہہ معلوم ہوگا کہ کسقدر نقطہ مفروض کو آگی لیجانا چاہیے تا کہ وہ اپنی شروع کی مقام پر پہر آجاوے اب ظاہر ہی کہ کوئی خط مثل اص کے نقطہ آ کی حرکت سی بنا ہوا تصور کیا جاتا ہی اور یہہ تصور دو طرح سے ہوسکتا ہی اول تو یہہ کہ وہ آ سی ص تک چلا اور دویم یہہ کہ وہ اول آ سی ب تک آگی کو پہونچا اور وہان سی اولٹا ص تک آیا اب ظاہر ہی کہ اگر ہم یہہ مان لین کہ جتنی مقدارین مقام آ سے طرف ل کی شمار کیجاوے وہ مثبت ہین تو بالضرور ہمین ماننا چاہئے کہ جو مقدارین سمت مخالف مین پیمایش کیجاوین وہ سب منفی خیال کیجاوین ل ——— ب ——— ا ——— س

(۱۱) آ۔ ظاہر ہی کہ مقام نقاط کی باآسانی معلوم ہوسکتی ہین اگر فرض کیا

جاوی اون خطوط کو جو کہ واقع ہوں سمت ا لا کیطرف مثبت اور اونکو جو کہ ا لاَ کی
طرف ہین منفی اور اسیطرح سی اونکو
جو کہ ا ی کیطرف ہین مثبت اور اونکو
جو ا یَ کیطرف ہین منفی اسیواسطی
موافق اس فرض کے اگلی فہرست
اوتار کی بخوبی واضح ہوجایگی

مقام نقطہ ط کا زاویہ لا ا ی مین .... + لا .... + ی

ق   ی ا لاَ .... — لا .... + ی

قَ   لاَ ا یَ .... — لا .... — ی

طَ   لا ا یَ .... + لا .... — ی

اسیواسطی مساواتین نقطہ ط مفروضہ کی لا = ط اور ی = ص

.... ق ... لا = — ط اور ی = ص

.... قَ ... لا = — ط اور ی = — ص

.... طَ ... لا = ط اور ی = — ص

(۲۸) اگر وتر العرض ا م ایک ہی رہی اور ط م کم ہوتا جاوے تو نقطہ ط کا نزدیک محور
ا لا کی آتا جاویگا اور جب مقدار ط م کی مساوی صفر کی ہوجاوی تو نقطہ ط کا محور ا لا
پر ہوگا اس صورتمین مساواتین نقطہ ط کی یہہ ہونگی لا = ط اور ی = ۰ یا
ی۲ + (لا — ط)۲ = ۰ اسیطورسے جب کہ نقطہ ط کا محور ا ی پر ہو تو اسکی

مساواتین یہہ ہونگی $لا = ۰$ اور $ی = ص$ $\therefore (ی - ص)^۲ + لا^۲ = ۰$

اگر دونو مقدارین ام اور م ط کی زایل ہوجاوین تو اسصورتین مساواتین گذشتہ

مساواتین نقطہ شروع آ کی ہوجاویگی $لا = ۰$ $ی = ۰$ یا $لا + ی^۲ = ۰$

مثال (۱) وہ نقطہ جسکی مساواتین $لا = ۴$ اور $ی = -۲$ واقع ہی درمیان

زاویہ لا آ ی کی جسکا فاصلہ $ام = ۴$ احاد خطی کے محور ی سے اور $م ط = $

۲ احاد خطی کے محور لا کی سے

مثال (۲) وہ نقطہ جسکی مساوات $(ی + ۳)^۲ + (لا + ۲)^۲ = ۰$ واقع ہی

درمیان زاویہ لا آ ی کی جسکی فاصلے $ال = ۲$ اور $ل ن = ۳$ محوروں سے ہین

مثال (۳) وہ نقطہ جسکے مساواتین $لا = ۰$ اور $ی = -۳$ واقع ہی خط آ ی پر

جسکا فاصلہ $= ۳$ احاد خطی کے ہی

مثال (۴) وہ نقطہ جسکے مساوات $ی^۲ + (لا + ط)^۲ = ۰$ واقع ہی محور آ لا

پر جسکے فاصلہ نقطہ شروع سے مساوی ط کی ہی یہہ تمام صورتین بآسانی ثابت ہوسکتے

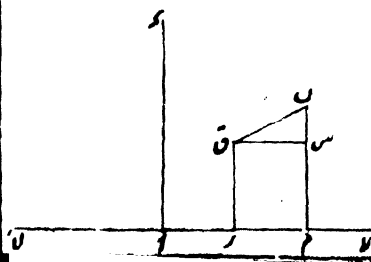
ہین جبکہ محور متقاطع علی القوایم ہوون —

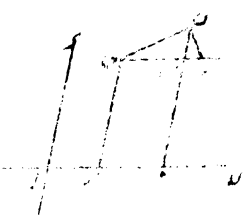
(۲۹) دریافت کرو ایک صورت واسطے ایک فاصلہ ق کے جوکہ درمیان نقاط ل

اور ق کی واقع ہی فرض کرو کہ محور

متقاطع علی القوایم ہون اور مان لو

کہ مساواتین نقطہ ن کے $لا = ط$

اور $ی = ص$ اور ق کی $لا = ط'$

اور ر = ص' یا فرض کرو کہ اوتار نقطہ ن کے ا م = ط اور م ن = ص اور
اوتار نقطہ ق کی ا ر = ط' اور ر ق = ص' اور کھینچو خط ق س کا متوازی خط
ا آ کی اسیواسطے مربع خط ق ن = مربع خط ق س + مربع ن س کو اور چونکہ ق س
= ر م = ا م − ا ر = ط − ط' اور ن س = ن م − ق ر = ص − ص'
∴ ف^{2} = ق ن^{2} = (ط − ط')^{2} + (ص − ص')^{2} اگر ق زاویہ ر ا آ
مین فرض کیا جاوے تو ا ر = −ط' ∴ ف^{2} = (ط + ط')^{2} + (ص − ص')^{2}
اگر نقطہ ق کا شروع پر فرض کیا جاوے تو ط' = ۰ اور ص' = ۰ ∴ ف^{2} = ط^{2} +
ص^{2} ∴ ف = $\sqrt{}$ط^{2} + ص^{2}

(۳۰) اگر محور متقاطع علی القوایم نہ فرض کی جاوین بلکہ زاویہ جو کہ محور آپس مین
بناتی ہین = ج اب واسطے ثبوت شکل مرقومہ بالا کے کھینچو خطوط ن م اور ط ر
کو متوازی ا آ کی اور ق س کو متوازی
ا آ کے اور ڈالو ایک عمود ن د کا خط ق س
پر تو مربع ق ن = مربع ق س + مربع
ن س + دو چند سطح ق س اور س د کو
اور چونکہ ق س = ط − ط' اور ن س
= ص − ص' اور س د = ن س جم ن س د = ن س جم ر ا آ = (ص − ص')
جم ج ∴ ف^{2} = (ط − ط')^{2} + (ص − ص')^{2} + ۲ (ط − ط') (ص − ص') [illegible]
اور جبکہ نقطہ ق کا نقطہ شروع ہوگا تو ط' = ۰ اور ص' = ۰ ∴ ف^{2} = ط^{2} +

ص۲ + ۲ ط ص جم ج

درباب مساوات اور خط کی جو کہ اول درجہ سی متعلق ہی

(۳۱) دریافت کرو خط اول درجہ کی مساوات کا جسمین دو مقدارین غیر مقررہ پائی جادین عام صورت ایسی مساوات کی یہ ہوگی ا ی + ب لا + س = ۰ یا ی = − ب/ا لا − س/ا یا ی = ط لا + ص اگر − ب/ا = ط اور − س/ا = ص اب ہم سب سے پہلی نہایت آسان صورت مساوات درجہ اول کی جو کہ ی = ط لا ہی حل کرینگے فرض کرو کہ ا لا اور ا ی محور متقاطع علی القوایم ہین اور اب ایک نقطہ فرض کرنی سی لا کو مساوات گزشتہ مین مساوی ایک خاص قیمت ۱ یا ۲ یا ۳ وغیرہ کی حاصل ہوسکتا ہی فرض کرو کہ ا م اور م ب اور ا ن اور ن ق ادنار نقطون ب اور ق کی ہین اور چونکہ ی = ط لا کی ہی

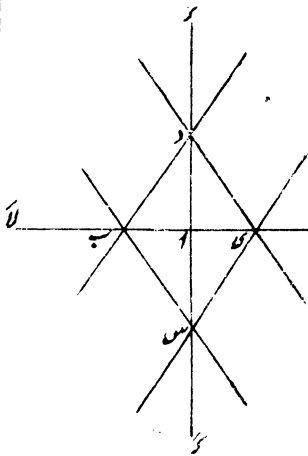
تو م ب = ط ا م اور ن ق = ط ا ن ∴ م ب : ا م :: ن ق : ا ن

یہان سی معلوم ہوا کہ مثلث ا م ب کا مشابہ ہی مثلث ا ن ق کو اور زاویہ م ا ب کا مساوی ہی زاویہ ن ا ق کی اسیواسطے خط ا ب منطبق ہوگا خط ا ق پر اگر ایک تیسرا نقطہ ر کا بھی اسیطور سے لیا جاوے تو اسیطرحسی ثابت ہوگا کہ خط ا ر منطبق ہے خطوط ا ب اور ا ق پر یہانسی ثابت ہوا کہ تمام نقطے ا ب ق ر وغیرہ ایک ہی خط مستقیم ا ر پر ہین اسیطور سی جبکہ لا کو قیمت منفی دیجاوین تو نقاط س وغیرہ

کی ہین مقدار ص کی مساوی فاصلہ ا ی یا مساوی وتر او س نقطہ کی سی جہان خط مستقیم تقاطع کرتا ہی محور ر کی سی اور مقدار ط تعبیر کرتی ہی مماس اُس زاویہ کو جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محور لا سی کیونکہ زاویہ ف ک ا = زاویہ ب ا م یہان سی معلوم ہوا کہ مس ف ک ا = مس ب ا م = ب م / ا م = ط اور واضح ہو کہ ط تعبیر کرتا ہی مماس زاویہ ف ک لا کو اور اسی مماس زاویہ ف ک لا کا بہی سمجہنا چاہیے

(۳۴) مساوات ر = ط لا + ص مین دو مقدارین ط اور ص کی مثبت یا منفی ہو سکتی ہین یا ایک انمین سی مثبت اور دوسری منفی ہو سکتی ہی اب ہم دریافت کرینگی مقام خط مستقیم کو ہر ایک صورت مین اور یہہ ظاہر ہے کہ بوسیلہ معلوم ہونی دو نقطونکی ایک خط مستقیم بآسانی کہچ سکتا ہی اسیواسطے اب ہم دریافت کرینگے اون نقاط کو جہانکہ یہہ خط مستقیم کاٹتا ہی دو محورونکو اور یہہ نقاط بآسانی معلوم ہو سکتی ہین

(۱) فرض کرو کہ ط اور ص مثبت ہین ∴ ر = ط لا + ص فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = ص محور ر ی سی کاٹو ا د = ص اور فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا = ص/ط لا لا مین سی کاٹو ا ب = ص/ط اور ملاؤ ب د تو خط مستقیم ب د وہ خط ہی جسکا دریافت کرنا منظور تہا (۲) فرض کرو کہ ط مثبت اور ص منفی ہی ∴ ر = ط لا − ص فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ر = − ص ا ر مین کاٹو ا س = ص اور فرض کرو کہ ر = ۰ ∴ لا = ص/ط او لا مین سی کاٹو ا ی = ص/ط اب ملاؤ س ی کو تو س ی خط مطلوب ہے (۳) فرض کرو کہ ط منفی اور ص مثبت ہی

∴ ی = − ط لا + ص فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ی = ص آ ی مین سی قطع کرو
ا د = ص اور فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا = ص/ط آ لا مین سی کاٹو ا ی = ص/ط
ملاؤ دی کو تو خط دی خط مطلوب ہی (۴) فرض کرو کہ ط اور ص دونون منفی

ہین ∴ ی = − ط لا − ص
اب فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ی = − ص
ا ی مین سی کاٹو ا س = ص
اور فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا =
− ص/ط ا لاَ مین سے قطع کرو
ا ب = ص/ط ملاؤ ب س کو تو
ب س خط مطلوب ہی —

(دفعہ ۴۳) مقدارین ط اور ص کی اپنی ذات مین بھی تبدیل ہو سکتی ہین یعنے کم و بیش
ہو سکتی ہین سوای بدلنی علامت کے فرض کرو کہ ص = ۰ ∴ ی = ± ط لا
اسکی وسیلہ سی ایسی دو خط مستقیم دریافت ہو سکتی ہین جو کہ گذرتی ہین نقطہ
شروع ہو سی اور جنکی میلان س + ط اور − ط ہی فرض کرو ط = ۰
∴ ی = ۰ لا ± ص یا ی = ± ص اور لا = ÷ پہلی مساوات سے معلوم
ہوتا ہی کہ ہر ایک نقطہ خط مستقیم مین مساوی فاصلہ پر ہی محور لا سی اور دوسری
مساوات یا (۰ لا = ۰) سی علوم ہوتا ہی کہ ہر ایک قیمت لا کی شرط مساوات کے
پورا کرتی ہی پس یہ معلوم ہوا کہ اس مساوات کی وسیلہ سے دریافت ہوگی دو خط

دو خط مستقیم جو کہ کہینچی جاوینگے دو نقطون ق اور س سے متوازی محور لا کے فقرہ (۲۸) مین بیان کیا گیا ہی کہ مساواتین ر = ص اور لا = ۰ تعلق رکھتے ہین ایک نقطہ سی اور ہمنی یہان ثابت کیا ہی کہ ر = ص اور لا = ÷ تعلق ایک خط سی رکہتی ہین یہان سی ثابت ہوا کہ لا = ÷ کا جسکو کہ اکثر چہوڑ دیتی ہین ضرور لحاظ کرنا چاہئے فرض کرو کہ ط = ۱/۰ اس صورت مین موافق فقرہ (۳۲) کے مساوات خط مستقیم اسطور سے لکہی جاویگی ر = ط لا ± ط ط' یا ر/ط = لا + ط' اور جبکہ لکہی ہمنی اسمین قیمت ط = ۱/۰ کی تو صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی ر = لا ± ط' یہان سی معلوم ہوا کہ لا = ± ط' اور ر = ÷ مساواتین دو خطوط مستقیم کے ہین جو کہ متوازی ہین محور ر کی فاصلہ ط' پر اور اب فرض کرو کہ ط = ۰ اور ص = ۰ اسیواسطی صورت ر = ط لا + ص اس شکل کی ہو جاویگی ر = ۰ لا + ۰ یہان سی معلوم ہوا کہ ر = ۰ اور لا = ÷ سی محور لا کا تعین ہوتا ہی اور اگر ط = ۱/۰ اور ص = ۰ کی ہو تو صورت مساوات یہہ ہو جاویگی ۰ ر = لا + ۰ ∴ لا = ۰ اور ر = ÷ اور یہہ مساواتین تعبیر کرتی ہین محور ر کو

(۴۶) موافق ترکیب گذشتہ کی ہر ایک خط جسکو کوئی مساوات تعلق رکہی آسانی سے کہینچ سکتا ہی مثالون آیندہ مین پہلے شکل کا لحاظ رکہنا چاہئے

مثال (۱) ۳ ر − ۵ لا − ۱ = ۰ فرض کرو لا = ۰ ∴ ر = ۱/۳

محور ر مین سی قطع کرو ا د = ۱/۳ احاد خطی کے تو اب معلوم ہوا کہ یہہ خط گذرتا ہی نقطہ د مین سے اور اب فرض کرو ر = ۰ ∴ لا = − ۱/۵

محور ا لاَ مین سے کاٹو اب = ½ احاد خطی کی تو اب معلوم ہوا کہ یہی خط بَ مین سی ہی گذرتا ہی ملاؤ ایک خط درمیان نقاط دَ اور بَ تب خط دَ بَ خط مطلوب ہوگا ۔

مثال (۲) ۱۰ ی — ۱۲ لا + ۶ = ۰ اس مساوات کی حل کرنی سی معلوم ہوگا کہ یہہ تعلق رکہنی ہی ایک ایسی خط سی جو کہ واقع ہوگا اوس سمت جسمین کہ خط س کہ واقع ہی مثال (۳) ی = لا = ۰ فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ی = ۰ یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ وہ خط جس سے یہہ مساوات تعلق رکہتی ہی نقطہ شروع پر سی گذرتا ہی اور چونکہ اس مثال مین ط = ۱ تو معلوم ہوا کہ خط مذکور محور سی زاویہ ۴۵° درجہ کا بناتا ہی اب کہیچو ایک ایسا خط جو کہ تنصیف کری زاویہ کو اَاَ ہو تو یہہ خط کہیچا ہوا خط مطلوب ہوگا مثال (۴) ۵ ی — ۲ لا = ۰ اس سے معلوم ہوتا ہی کہ وہ خط جسکے یہہ مساوات ہی نقطہ شروع پر سے گذرا ہی واسطے معلوم کرنے ایک دوسری نقطہ کی فرض کرو کہ لا = ۵ ∴ ی = ۲ یہانسی معلوم ہو کہ اب = ۵ اور نقطہ ب سی کہیچو ایک عمود (ب ب = ۲) اَاَ پر اور ملاکی نقاط اَ اور بَ کہیچو ایک خط جو کہ مطلوب ہے

(۵) ط ی + ص لا = ۰ اسکی وسیلہ سے ایک ایسا خط پیدا ہوگی جو کہ گذریگا نقطہ اَ مین سی متوازی ہوگا خط بَ سَ کو مثال (۶) ی² — ۳ لا = ۰ اسکی حل کرنی سی دو خط ایسی حاصل ہوگی جو کہ زاویہ ۹۰° کا بنادینگی محور لاَ سے

مثال (۷) ۳ ی — ۴ = ۰ قطع کرو اد = ۴/۳ احاد خطی کے تو اب ایک خط کہیچا

گیا نقطہ ٹین سے متوازی آلا کی خط مطلوب ہوگا   مثال (۸) لاَ + لا − ۲ = ۰ کا ٹو وی = ۱ اور اب = ۲ تو اب ایک خط کھیچا گیا نقاط ٹی اور ب مین سے   مثال (۹) ی + ۲ لا = ۴ مساوات خط مستقیم بآسانی اس صورت کی ہو سکتی ہے ی/ص + لا/ط = ۱ مقدارین ص اور ط فاصلے نقطہ شروع سے اس نقطہ سے ہین جہانکہ خط مستقیم تقاطع کرتا ہی محورون لا اور ی سی اب اگر ہم بدلین صورت مثال (۹) کی طرف ی/ص + لا/ط = ۱ کی تو ی/۴ + لا/۲ = ۱ صورت مساوات (۹) کی ہو جاویگی اد = ۴ اور ای = ۲ اور ملاو دی کو تو خط دی خط مطلوب ہوگا

(۳۷) اگر ایک مساوات اول درجہ مین جذر ایک مقدار منفی کا پایا جاوے تو یہہ مساوات خط مستقیم سی تعلق نہین رکھی سکے یہہ مساوات ایک نقطہ سی تعلق رکھی گے یا یہہ ناممکن ہوگی مثلاً مساوات ی + ۲ لا √−۲ − ط = ۰ ایک ایسی نقطہ سے تعلق رکھتی ہے جسکے وتر لا = ۰ اور ی = ط کیونکہ سوای اس قیمت لا کی کوئی اور قیمت اسکی ایسی نہی ہو سکتی ہی کہ جسکی وسیلہ سی ایک دوسری قیمت ی کی حاصل ہو اور مساوات ی + لا + ط √−۱ = ۰ ناممکن ہی کیونکہ کوئی قیمت لا کی ایسی نہین ہو سکتی کہ جسکی وسیلہ سی قیمت ی کی بھی حاصل ہو —

(۳۸) اب ثابت ہوا کہ مساوات خط مستقیم کی ی = ط لا + ص اور مقام اس خط کا موقوف دو مقدارون ط اور ص پر خط معلوم سی مراد ہی کہ اسکا مقام دیا ہوا ہی یعنی مقدارین ط اور ص کے معلوم ہین دریافت کرنے ایک

خط سے مراد ہے کہ ہم اسکا مقام دریافت کرنا چاہتے ہیں اور واسطے اس مطلب کے ہم
ی = ط لا + ص اسکی مساوات فرض کرتے ہیں اور بوسیلہ شرائط سوال کے مقادیر
ط اور ص کی دریافت کی جاتی ہیں اور اگر ایک ہی مقدار انمیں سے معلوم ہو سکی
تو دریافت ہوتا ہے کہ سوال کافی نہیں ہیں واسطے مقرر کرنے مقام خط کے
نقطہ معلوم سے ہم سمجھتے ہیں کہ اسکے اوتار معلوم ہیں اور ہم اکثر لاَ اور یاَ اوتار
نقطہ معلوم کی تعبیر کیا کرینگے واسطے اختصار کی اس نقطہ کو کہ جسکے اوتار
لاَ اور یاَ ہیں نقطہ لاَ اور یاَ کا تعبیر کرینگے اور اسیطور سے اس خط کو کہ جسکے
مساوات ی = ط لا + ص ہے خط ی = ط لا + ص کا تعبیر کرینگے۔ اگر ایک
شکل کے ثابت کرنے میں دو مساواتیں ی = ط لا + ص اور ی = ط' لا + ص'
لکھی جاویں تو ان دونوں مساواتوں میں لاَ اور یَ مختلف سمجھنی چاہئیں

(۳۹) بڑی افسوس کی بات ہے کہ اگلی شکلوں میں جو کہ درباب خطوط مستقیم کے
ہیں ہم یہ ایک سی مساواتوں کو کام میں بہی لا سکتے ہیں۔

شکلیں درباب خطوط مستقیم کے

(۴۰) دریافت کرو مساوات ایک ایسی خط کا جو کہ گذرتا ہو ایک نقطہ مفروض سے
چونکہ نقطہ مفروض ہے اسیواسطے اسکے اوتار معلوم ہونگے تو اب فرض کرو کہ لاَ اور
یاَ اسکے اوتار ہیں اور فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہہ ہے ی = ط لا + ص
اور ظاہر ہے کہ مساوات خط مستقیم کے نقطہ مفروضہ پر یہہ ہو جاویگی یاَ = ط لاَ
+ ص ∴ ص = یاَ - ط لاَ لکھو اس قیمت ص کو مساوات اول میں

∴ ی = طلا + ی۱ − طلا۱ یا ی − ی۱ = ط (لا − لا۱) نہایت آسان
طریقہ واسطے دور کرنی مقدار ص کے یہہ ہی تفریق کرو مساوات دویم کو مساوات
اول مین سے اور یہہ طریقہ اکثر اختیار کیا گیا ہی چونکہ تا جو کہ سمت خط کو مقرر کردیتا ہی
اس مساوات مین معلوم نہین ہی تو معلوم ہوا کہ لانہایت خطوط نقطہ مفروضہ سے
کھچ سکتے ہین یہہ بات علم ہندسہ سے بہی ثابت ہو سکتی ہی اگر نقطہ مفروضہ محور لاَ پر
ہو تو ی۱ = ۰ کی ہو گا ∴ ی = ط (لا − لا۱) اور وہ محور یٓ پر ہو تو لا۱ = ۰
∴ ی − ی۱ = طلا اگر ایک یا دونوں اوتار نقطہ مفروضہ کی منفی ہوں تو علامت
اوتار کی موافق اس فرض کے لکھنی چاہئی مثلاً اگر نقطہ مفروضہ محور لاَ پر ہو یعنی منفی
سمت کیطرف نقطہ آ سی ہو تو اسکے اوتار − لاَ اور ۰ ہونگی اسیواسطے صورت
مساوات کی یہہ ہو جاویگی ی = ط (لا + لا۱)

(۱۴) دریافت کرو مساوات ایسی خط کی جو کہ گذرتا ہو دو نقطوں مفروضہ لاَ۱
اور یٓ۱ اور لا۲ اور ی۲ سی فرض کرو کہ مساوات مطلوب یہہ ہی
ی = طلا + ص (۱) اور چونکہ یہہ خط گذرتا ہی دو نقطوں مفروضہ سی اسواسطے
یہہ دو مساواتین ہمین حاصل ہونگی ی۱ = طلا۱ + ص (۲)
ی۲ = طلا۲ + ص (۳)
تفریق کرنی سی (۲) کو (۱) مین سی حاصل ہو گا یہہ ی − ی۱ = ط (لا −
لا۱) (۴) اور تفریق کرنیسی (۳) کو (۲) مین سے حاصل ہو گا یہہ
ی۱ − ی۲ = ط (لا۱ − لا۲) ∴ ط = (ی۱ − ی۲) / (لا۱ − لا۲) جبکہ لکھی جاتی یہہ قیمت

ط کی مساوات (۴۴) میں تو حاصل ہوگا یہہ $ی - ی_1 = \frac{ی_1 - ی_2}{لا_1 - لا_2} (لا - لا_1)$

دو شرطون کے وسیلہ سے مقدارین ط اور ص کی دریافت ہوئی ہین اوراونکی دُور کرنی سے مقام خط کا مقرر کیا گیا ہی اور یہی ہونا چاہئے تھا کیونکہ دونون نقطون مین سے صرف ایک خط گذر سکتا ہی صورت اس مساوات کی مختلف ہوگی موافق مختلف فرضون کی مثلاً اگر نقطہ لا۲ اور ی۲ محور لا پر ہو تو ی۲ = ۰

$\therefore ی - ی_1 = \frac{ی_1}{لا_1 - لا_2} (لا - لا_1)$ اور اگر وہ محور ی پر ہو تو لا۲ = ۰

$\therefore ی - ی_1 = \frac{ی_1 - ی_2}{لا_1} (لا - لا_1)$ اور اگر وہ نقطہ شروع پر واقع ہو تو

ی۲ = ۰ اور لا۲ = ۰ $\therefore ی - ی_1 = \frac{ی_1}{لا_1} (لا - لا_1)$

$= \frac{ی_1}{لا_1} لا - ی_1$

$\therefore ی = \frac{ی_1}{لا_1} لا$

یہہ مساوات اخیر کی بطور آیندہ کی بہی حاصل ہوسکتی ہی مساوات اس خط کی جو کہ نقطہ شروع سی گذری یہہ ہونی چاہئی ی = ط لا (۳۱) یہان ط تعبیر کرتا ہی مماس اوس زاویہ کو جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محور لا سے اور چونکہ یہہ خط گذرتا ہی نقطہ لا۱ اور ی۱ سی اسیواسطے $ط = \frac{ی_1}{لا_1}$ تو اب ثابت ہوا کہ $ی = \frac{ی_1}{لا_1}$ اگر ایک خط گذری تین نقطونین سے تو نسبت آیندہ ضرور ہونی چاہئے ان نقطون کے اوتار مین

(ی۱ لا۲ — لا۱ ی۲) — (ی۱ لا۳ — لا۱ ی۳) + (ی۲ لا۳ — لا۲ ی۳) = ۰

(۴۲) دریافت کرو مساوات ایسے خط کی جو کہ گذرے نقطہ مفروضہ سی تنصیف کرتا ہے ایک محدود خط کو فرض کرو کہ خط دیا ہوا محدود ہے درمیان دو نقاط کی لا۱ اور ی۱

اور لا۲ اور ی۲ اسیواسطے اوتار نقطہ تنصیف کے یہہ ہین $\frac{لا۱ + لا۲}{۲}$ اور

$\frac{ی۱ + ی۲}{۲}$ یہانسی صاف معلوم ہوتا ہی کہ مساوات مطلوب یہہ ھی ی ـ ی۳ =

$ط (لا - لا۳) = \frac{ی۱ + ی۲ - ۲ی۳}{لا۱ + لا۲ - ۲لا۳} (لا - لا۳)$

(۴۳) دریافت کرو مساوات ایسے خط کے جوکہ متوازی ایک خط مفروضہ کی ہو

فرض کرو کہ ی = ط لا + ص ....(۱) دیا ہوا خط ہی

ی = ط' لا + ص' ....(۲) وہ خط ہی جسکا دریافت کرنا مطلوب ہے

چونکہ خطوط متوازی ایک دوسری کے ہین اسیواسطے زاویے جوکہ یہہ خطوط محور لا سی بناوینگے

مساوی ہوسکنگے یا ط' = ط ∴ خط مطلوب یہہ ہی ی = ط لا + ص' (۳)

یہان مقدار ص کے ایک شرط سی معلوم نہین ہوسکتے ہی کیونکہ بیشمار خط ایک اور خط

مفروض کے متوازی کہچ سکتے ہین لیکن اگر ایک اور دوسری شرط دیجاوے تو ص'

معلوم ہوسکتا ہے مثلاً اگر خط مطلوب ایک اور نقطہ مفروضہ سی لا۱ اور ی۱ سی گذرے

توصورت مساوات (۲) کی یہہ ہوجاویگی ی ـ ی۱ = ط' (لا ـ لا۱)

اسیواسطے صورت مساوات (۳) کے یہہ ہوجاوینگے ی ـ ی۱ = ط (لا ـ لا۱)

(۴۴) دریافت مقام تنصیف دو خطون مفروض ب س اور ی د کا اسمین

صرف دریافت کرنا د کا ہی جہانکہ دونون خط تقاطع ایک دوسری کو کرتی ہین

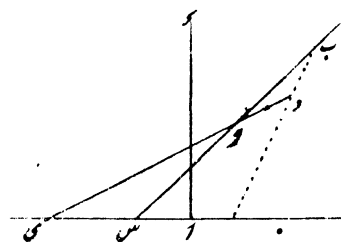
یہہ ظاہر ہی کہ نقطہ د پر اوتار دونون خطونکی ایک ہی ہونگی اور مان لو کہ وہ

ع اور ح ہین اب فرض کرو کہ ی = ط لا + ص مساوات س ب کی ہی اور

ی = ط' لا + ص' ... مساوات ی د کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ نقطہ آ پر

ح = ط ع + ص = ط' ع + ص' ∴ ع = (ص' − ص) / (ط − ط')

اور ح = ط ع + ص

= (ط ص' − ط' ص) / (ط − ط') + ص

مثال (۱) دریافت کرو نقطہ تقاطع ان خطوں کا جنکی مساواتیں یہہ ہیں ی = ۳لا + ۱ اور ی − ۲لا − ۴ = ۰ یہاں ع = ۳ اور ح = ۱۰ مثال (۲) دریافت کرو نقطہ تقاطع ان خطوں کا جنکی مساواتیں یہہ ہیں ی − لا = ۰ اور ۳ی − ۲لا = ۱ یہاں ع = ۱ اور ح = ۱ اگر ایک تیسرا خط جسکی مساوات ی = ط''لا + ص'' ہی گذری اس نقطہ تقاطع سی تو نسبت امثال مین یہہ ہوگی (ط ص' − ط' ص) − (ط ص'' − ط'' ص) + (ط' ص'' − ط'' ص') = ۰

(۵۴) دریافت کرو مماس اور جیب مستوی اور جیب التمام اوس زاویہ کی جوکہ درمیان دو خطوں کی ہی فرض کرو کہ ی = ط لا + ص مساوات خط س ک کی ہے

...... اور ی = ط' لا + ص' مساوات خط ی د کی ہے

اور فرض کرو کہ ر اور ر' وہ زاویہ ہین جوکہ یہہ دونوں خط بناتی ہین محور لا سی

تو اب مس د و ب = مس ی و س = مس (ر − ر') = (مس ر − مس ر') / (۱ + مس ر مس ر') = (ط − ط') / (۱ + ط ط')

اور جم د و ب = ۱ / قا د و ب = ۱ / √(۱ + (مس د و ب)²) = (۱ + ط ط') / √((۱ + ط²)(۱ + ط'²))

اور جیب د و ب = مس د و ب × جم د و ب = (ط − ط') / √(۱ + ط² × ۱ + ط'²)

(۴۲) دریافت کرو مساوات خط مستقیم کے جو کہ بناتا ہی ایک زاویہ مفروض دوسری خط مستقیم سی فرض کرو کہ ی = ط لا + ص مساوات خط مفروض س ب کی

.... اور ی = ط لا + ص مساوات خط مطلوب ی د کی ہی

فرض کرو م = مماس زاویہ مفروض د و ب تو اب ظاہر ہی کہ ط = مس د ی س

= مس (ب س لا — ب و د) = (مس ب س لا — مس ب و د)/(۱ + مس ب س لا مس ب و د) = (ط — م)/(۱ + ط م)

کاہی سے اس قیمت ط کو مساوات دوم مین ہمین حاصل ہوگا یہہ

ی = (ط — م)/(۱ + ط م) لا + ص اگر خط مطلوب نقطہ مفروض لا۱ اور ی۱ سے گذری

تو ی — ی۱ = (ط — م)/(۱ + ط م) (لا — لا۱) اگر د نقطہ مفروضہ لا۱ اور ی۱ کا ہو

تو صرف خط د و ی ہی کا نہین بلکہ ایک دوسرا خط (نقطہ دار جو کہ شکل مین ہی) کھنچ سکتا ہی بناتی ہوئی ایک زاویہ مفروضہ خط ب س سی اور اسکی مساوات بطور سابق یہہ ہوگی ی — ی۱ = (ط + م)/(۱ — ط م) (لا — لا۱) اور اب ظاہر ہی کہ دونون

مساواتین صورت آیندہ مین داخل ہوگئ ی — ی۱ = (ط ∓ م)/(۱ ± ط م) (لا — لا۱)

مثلاً وہ دو خط جو کہ گذرکی نقطہ د سے بناتی ہین ایک زاویہ ۴۵° کا خط ب س سے

مساواتون آیندہ کی وسیلہ سی دریافت ہو سکتی ہین

ی — ی۱ = (ط — ۱)/(۱ + ط) (لا — لا۱)

ی — ی۱ = (۱ + ط)/(۱ — ط) (لا — لا۱)

اور مساوات اس خط کی جو کہ نقطہ د سے گذرکی بناتا ہی زاویہ ۱۳۵° کا محور لا سے یہہ ہوگی

ی — ی۱ = م (لا — لا۱) = مس ۱۳۵° (لا — لا۱) = — (لا — لا۱)

(۴۷) اگر خط مطلوب عمود خط مفروض پر ہو تو م م لا نہایت ہوگا اسواسطے کہ

$\frac{ط - م}{۱ + ط م}$ = $\frac{ط}{م}$ ... = $-\frac{۱}{ط}$ یا ط َ = $-\frac{۱}{ط}$ یہاں سی ثابت ہوا کہ

مساوات اوس خط کی جو کہ عمود خط مفروض ی = ط لا + ص پر ہی یہہ ہوگی

ی = $-\frac{۱}{ط}$ لا + ص َ یہہ دعوی ایک اور آسان طریقہ سی ثابت ہوسکتا ہی

اور وہ یہہ ہی کہ کہینچو عمود د ی کا ب س پر شکل آئندہ مین تو ط َ = مس د ی لا =

$-$ مس د ی س = $-$ مم د س لا = $-\frac{۱}{ط}$ یہاں سی ظاہر ہی کہ اون دو خطوط

مستقیم کی مساواتوں مین جو کہ عمود ایک دوسری پر ہین ہمیں یہہ حاصل ہوگا

ط َ ط + ۱ = ۰ برعکس اسکے اگر دو خطوں کی مساواتوں مین یہہ ثابت ہو کہ ط َ ط + ۱

= ۰ تو معلوم ہوگا کہ یہہ دونوں خط عمود ایک دوسری پر ہین — اگر خط عمود

گذری نقطہ لا۱ و ی۱ سی بہی تو اسکی مساوات یہہ ہوگی ی $-$ ی۱ = $-\frac{۱}{ط}$ (لا $-$

لا۱) اور واضح ہو کہ اس مساوات کی مختلف صورتین ہوسکتی ہین موافق مختلف مقام

نقطہ لا۱ اور ی۱ کی مثلاً اگر وہ خط جو کہ عمود خط ی = ط لا + ص پر گذری نقطہ

شروع سی بہی تو اسکی مساوات یہہ ہوگی ی = $-\frac{۱}{ط}$ لا کیونکہ یہاں دونوں لا۱

اور ی۱ = ۰

(۴۸) دریافت کرو طول ایک خط کا جو کہ کہینچا گیا ہی عمود نقطہ مفروض د (لا۱

ی۱) سے خط مفروض ر ب پر فرض کرو کہ ی = ط لا + ص ..... (۱)

مساوات س ب ہی تو ی $-$ ی۱ = $-\frac{۱}{ط}$ (لا $-$ لا۱) ..... (۲) مساوات

عمود د ی کی ہوگی — فرض کرو کہ ب = د و اور ع اور ح اوتار نقطہ ی

کی ہین جو کہ بوسیلہ (۱) اور (۲) کے
آسانی سی دریافت ہو سکتی ہین تو ب۲ =
(ع − لا)۲ + (ح − کا)۲ .... (۲۹)
مساوات (۲) سی ح =

ب د ق ۱ س ا م ی لا

کا − $\frac{1}{ط}$ (ع − لا) = طع + ص موافق مساوات (۱) کے

۰ = ط (ع − لا) + طلا + ص

∴ (ط + $\frac{1}{ط}$)(ع − لا) = کا − طلا − ص

∴ ع − لا = $\frac{ط}{1+ط^2}$ (کا − طلا − ص) اور ح − کا = − $\frac{1}{ط}$ (ع − لا)

∴ ب۲ = (ع − لا)۲ + (ح − کا)۲

= (ع − لا)۲ + $\frac{1}{ط^2}$ (ع − لا)۲

= $\frac{1+ط^2}{ط^2}$ (ع − لا)۲

= $\frac{1+ط^2}{ط^2}$ $\frac{ط^2}{(1+ط^2)^2}$ (کا − طلا − ص)۲ = $\frac{1}{1+ط^2}$ (کا −
طلا − ص)۲ ∴ ب = ± $\frac{کا − طلا − ص}{\sqrt{1 + ط^2}}$ اوپر کی علامت کو اوس وقت
استعمال مین لانا چاہی جبکہ نقطہ مفروضہ خط مفروض کے اوپر اور نیچی کے علامت کو اوس
وقت جبکہ وہ نیچی ہو — اگر خط مفروض نقطہ شروع سی گذری تو ص = ۰
∴ ب = $\frac{کا − طلا}{\sqrt{1+ط^2}}$ اور اگر نقطہ شروع نقطہ مفروض ہو تو لا = ۰ اور
کا = ۰ ∴ ب = $\frac{\pm ص}{\sqrt{1+ط^2}}$ صورت واسطے ب کی ایک اور طور سے بہی حاصل ہو سکتی
چونکہ مساوات ی = طلا + ص ہر ایک نقطہ ... د ب کی ہو سکتی ہی اسیواسطی اس

نقطہ کی بہی ہوگی جہانکہ م د یا $ک_1$ قطع کرتا ہی س و ب کو ∴ م ق = ط $لا_1$ + ص

اور اب د و = د ق جیب د ق و اور د ق = د م − م ق = $ک_1$ − ط $لا_1$ − ص

اور جیب د ق و = جیب س ق م = جم ق س م = $\frac{1}{سث\ ق\ س\ م}$ =

$\frac{1}{\sqrt{1+(مس\ ق\ س\ م)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+ط^2}}$ ∴ د و یا ب = $\frac{ک_1 - ط\ لا_1 - ص}{\sqrt{1+ط^2}}$ یا $\frac{ط\ لا_1 + ص - ک_1}{\sqrt{1+ط^2}}$ اگر نقطہ د کا نیچی خط کی ہو

(۴۹) اگر خط د ی کا کہیچا جاوے بناتا ہوا ایک خاص زاویہ جسکا مماس م ہی خط مفروض د و سے تو فاصلہ د د کا بآسانی دریافت ہوسکتا ہی بجای مساوات (۲) کی ہمین یہہ مساوات حاصل ہوگی $ک - ک_1 = \frac{ط - م}{1 + ط م} (لا - لا_1)$ ....(۴۶)

تو اب استعمال مین لانی سے طریقہ گذشتہ کی ہمین حاصل ہوگا یہہ ب = $\pm \frac{ک_1 - ط\ لا_1 - ص}{\sqrt{1+ط^2}} \times \frac{\sqrt{1+م^2}}{م}$ یہہ صورت بوسیلہ علم مثلث کی آسانی سی حاصل ہوسکتی ہی فرض کرو کہ ح = جیب زاویہ مفروضہ کی تو اب د و = د ق $\frac{جیب\ د\ ق\ و}{جیب\ د\ و\ ق} = \frac{ک_1 - ط\ لا_1 - ص}{\sqrt{1+ط^2}} \times \frac{1}{ح}$

(۵۰) مساوات خط مستقیم اگلی شکل کے ثابت کرنی مین بہت فایدہ مند ہونگے

اگر ایک مثلث کی تینون زاویون سے عمود مقابل کے اضلاع پر کہیچے جاوین تو یہہ تینون عمود ایک نقطہ پر ملینگے مثلث اب س کی تین نقطون ا ب س سی کہیچو تین عمود س ف اور ا ی اور ب د یا فرض کرو کہ خطوط ا ی اور ب د کی ملی ہین نقطہ و پر تو اب یہہ شکل ثابت ہوگی اگر ا ف و تر العرض و کا ثابت ہو جاوے اور اوسکو اب ہم ثابت کرینگے

فرض کرو کہ آ نقطہ شروع اونار کا اور اب محور لا اور اہ محور ی کا ہی اور فرض کرو کہ اونار
نقطہ س کی لا اور ی آ ہین .... ب ... لا۲ ... ہین تو اب مساوات آس کی یہہ ہوگی
ی = (ی۱ / لا۱) لا موافق (۱۴) کی اسیواسطے مساوات ب د کی یہہ ہوگی ی = ط (لا - لا۲)
= - (لا۱ / ی۱) (لا - لا۲) (۴۷) اور مساوات ب س کی یہہ ہوگی ی - ی۲ = (ی۱ - ی۲) / (لا۱ - لا۲)
(لا - لا۲) (۱۴) یا ی = (ی۱ / (لا۱ - لا۲)) (لا - لا۲) کیونکہ ی۲ = ۰ ∴ مساوات آ ی یہہ ہوگی
ی = ط لا = - ((لا۱ - لا۲) / ی۱) لا چونکہ نقطہ د پر (جوکہ مقام تقاطع خطوط ب د اور
ا ی کا ہی) وتر ی دونون مساواتون ب د اور آ ی مین ایک ہی ہوگا اسیواسطے جبکہ لکھا
ہمنے ان دونون قیمتون ی کو مساوی ایک دوسرے کے تو حاصل ہوگا یہہ - (لا۱ / ی۱) (لا - لا۲) =
- ((لا۱ - لا۲) / ی۱) لا یا لا۱ لا - لا۱ لا۲ = لا۱ لا - لا۲ لا ∴ لا۲ لا = لا۱ لا۲ یا لا = لا۱
یعنے وترالعرض نقطہ د کا مساوی نقطہ س کے وترالعرض کے ہی اسیطرح ثابت ہوسکتا ہی
کہ اگر ایک مثلث کی تینون خطون کو تنصیف کرکے نقاط تنصیف سی عمود کھینچی جاوین
تو یہہ تینون عمود بہی ایک ہی نقطہ پر ملاقی ہونگے —

(۵۱) ہمنی ابتک محور دنکو متقاطع علی القوایم فرض کیا ہی لیکن اگر وہ عمود ایک دوسری
پر نہون تو سر لا مساوات خط مستقیم مین مماس اوس زاویہ کا جوکہ خط مذکور بناتا ہی
محور لا سی نہین ہوگا فرض کرو کہ ک = اوس زاویہ کی جوکہ محور ایک دوسری سے بناتی ہین
اور ﻫ = اوس زاویہ کی جوکہ خط مستقیم بناتا ہی محور لا سی تو اب ط = (جس ﻫ) / (جس (ک - ﻫ))
= (جس ﻫ) / (جس (ک - ﻫ)) (۳۳) ہس اس صورت مین بہی مساوی اوس فاصلہ کے ہی جوکہ
واقع ہی درمیان نقطہ شروع اور اوس نقطہ کی جہاں کہ خط مذکور کاٹتا ہی محور ی کو سے

اسیواسطے $\text{ی} = \frac{\text{جیب ر}}{\text{جیب (ک − ر)}}\,\text{لا} + \text{ص}$ چونکہ یہہ صورت مثل صورت $\text{ی} = \text{ط لا} + \text{ص}$
کی ہی تو تمام صورتین جو کہ ہم ثابت کر آئی ہین وہ اس صورت مین بہی صحیح ہونگی کیونکہ
اونکی ثبوت مین کسیطرح کی تبدیلی $\frac{\text{جیب ر}}{\text{جیب (ک − ر)}}$ مین نہین آویگی واضح ہو کہ صورت ۴۰
اور ۴۱ اور ۴۲ اور ۴۳ اور ۴۴ مین کسی نوع تبدیلی واقع نہوگی ـ دریافت کرو ماس
(م) اوس زاویہ کا جو کہ واقع ہی درمیان دو خطون مفروض کی فرض کرو کہ ($\text{ی} = \text{ط لا} + \text{ص}$ اور
$\text{ی} = \text{ط}'\,\text{لا} + \text{ص}'$) مساواتین خطون مفروض کی ہین ـ قیمت $\text{ط} = \frac{\text{جیب ر}}{\text{جیب (ک − ر)}}$
سی ہم دریافت کر سکتے ہین $\text{مس ر} = \frac{\text{ط جیب ک}}{\text{۱} + \text{ط جم ک}}$ اور اسیطرح سے $\text{مس ر}' = \frac{\text{ط}'\,\text{جیب ک}}{\text{۱} + \text{ط}'\,\text{جم ک}}$
یہان سی معلوم ہوا کہ $\text{م} = \text{مس (ر − ر}') = \frac{(\text{ط} - \text{ط}')\,\text{جیب ک}}{\text{۱} + \text{ط ط}' + (\text{ط} + \text{ط}')\,\text{جم ک}}$ دریافت کرو
مساوات ایک خط کی جو کہ گذر کی نقطہ مفروض لا_1 اور ی_1 سی بناتا ہی ایک زاویہ
مفروض ایک خط مفروض سے فرض کرو کہ م مماس زاویہ مفروضہ کی ہی اور $\text{ی} = \text{ط لا} +$
ص خط مفروض ہے اور $\text{ی} - \text{ی}_1 = \text{ط}'\,(\text{لا} - \text{لا}_1)$ خط مطلوب ہی موافق پچہلے
صورت کی $\text{ط}' = \frac{\text{ط جیب ک} - \text{م}\,(\text{۱} + \text{ط جم ک})}{\text{جیب ک} + \text{م}\,(\text{ط} + \text{جم ک})}$ اسیواسطے مساوات مطلوبہ یہہ ہونگی

$$\text{ی} - \text{ی}_1 = \frac{\text{ط جیب ک} - \text{م}\,(\text{۱} + \text{ط جم ک})}{\text{جیب ک} + \text{م}\,(\text{ط} + \text{جم ک})}\,(\text{لا} - \text{لا}_1)$$

اگر خطوط مذکور عمود ایک دوسرے
پر ہون تو $\text{م} = \frac{\text{۱}}{\text{۰}}$ $\therefore$ $\text{ط}' = \frac{\text{۱} + \text{ط جم ک}}{\text{ط} + \text{جم ک}}$ تو اب مساوات مطلوب یہہ ہوگی
$\text{ی} - \text{ی}_1 = -\frac{\text{۱} + \text{ط جم ک}}{\text{ط} + \text{جم ک}}\,(\text{لا} - \text{لا}_1)$ دریافت کرو طول ایک عمود کا جو کہ کہینچا گیا ہے
ایک نقطہ مفروضہ سی ایک خط مفروض پر بجاے مساوات (۲) فقرہ (۳۸) کی مساوات
گذشتہ کام مین لاؤ جو کہ ابہی ثابت کر آئی ہین اور اختیار کرو وہی طریقہ دریافت کرنے
طول عمود کا جو کہ ہم لکہہ آئی ہین تو اسکا حاصل ہوگا $\text{ب} = \pm \frac{(\text{ی}_1 - \text{ط لا}_1 - \text{ص})\,\text{جیب ک}}{\sqrt{\text{۱} + \text{۲ ط جم ک} + \text{ط}^2}}$

واضح ہو کہ اس قسم کی محوروں کو حتی الامکان کام میں نہیں لاتی ہیں اور یہہ فایدہ مند
وہاں ہوگی جہاں کہ نقاط اور خطوط سے بحث کرتی ہیں اور جہاں کہ ذکر زاویہ کا ہوگا وہاں
اسکا استعمال نہیں ہو سکتا ہے شکل آیندہ کو بطور مثال کے درج کرتی ہیں —

(۵۲) اگر ایک مثلث کی اضلاع کو قطر فرض کرکے ایسی متوازی الاضلاع کھینچی جاویں
جنکے اضلاع متوازی دو خطوط مفروضہ کی ہوں تو اقطار ان متوازی
اضلاعوں کی ایک ہی نقطہ پر ملیں گے
فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہے اور ا لا
اور ا ی خطوط مفروضہ ہیں اور ی ب د س
اور س ف ا ک اور ہ ا ے ب
متوازی الاضلاع ہیں تو اب اقطار د ی اور ف ک اور ہ ے نقطہ و پر ملاقی
ہونگے فرض کرو کہ ا نقطہ شروع ترچھی محوروں ا لا اور ا ی کا ہے اور فرض کرو کہ لا۱
اور ی۱ اوتار نقطہ ب کی ہیں اور لا۲ اور ی۲ . . . . س اب دریافت کرو مساوات
خط د ی کی فرض کرو کہ مساوات اس خط کی ی = ط لا + ص تو صورت اس مساوات کے
نقطہ د پر یہہ ہوگی ی۲ = ط لا۱ + ص ∴ ی − ی۲ = ط (لا − لا۱) اور شکل
مساوات کی نقطہ ی پر یہہ ہوگی ی۱ − ی۲ = ط (لا۲ − لا۱) ∴ ی − ی۱ =
(ی۱ − ی۲)/(لا۲ − لا۱) (لا − لا۱) . . . . (۱) اور اب دریافت کرو مساوات ف ک کی اور فرض
کرو کہ مساوات اسکی ی = ط لا + ص تو نقطہ ف پر ی۲ = ۰ + ص ∴
ی − ی۲ = ط لا اور مساوات نقطہ ک پر ۰ − ی۲ = ط لا۲ ∴ ی − ی۲ =

— $\frac{ک\,ت}{لا ہ}$ لا ..... (۲) اور اب دریافت کرو مساوات ہ سے کی فرض کرو کہ
اسکی مساوات یہہ ہی ی = ط لا + ص اور نقطہ ہ پر ی ا = ۰ + ص ∴ ی - ی ا =
ط لا اور نقطہ ت پر ۰ - ی ا = ط لا ا ∴ ی - ی ا = $\frac{ی ا}{لا ا}$ لا ..... (۳) چونکہ
نقطہ ق پر قیمتین اوتار اقطار متوازی الاضلاع کے آپسمین مساوی ہو نگی اسیواسطے اب لکھو قیمتین
ی کی جو کہ (۱) اور (۲) مین ہین مساوی ایک دوسرے کی تو اب حاصل ہوگا ع =
$\frac{لا لا ۲ (ی ا - ی ۲)}{ی ا لا ۲ - لا ا ی ۲}$ اسیطرحسے جبکہ لکھی ہین قیمتین ی کی جو کہ (۲) اور (۳) مین ہین
مساوی ایک دوسری کی تو اسکی وسیلہ سے قیمت ع کی وہی حاصل ہوگی جو کہ پہلی
ابھی نکالی ہی یہاںسے ثابت ہوا کہ وتر العرض ہرایک دو قطرونکی مساوی ہین آپسمین
یعنی اگر ایک بار دو قطرونکے تقاطع کے وسیلہ سے قیمت وتر العرض نقطہ تقاطع کی نکالین
تو مساوی اوسی قیمت وتر العرض کی ہوگی جو کہ دو اور قطرونکی تقاطع سے حاصل ہوگی یہانسے
صاف معلوم ہوتا ہی کہ تینوں اقطار د ت اور ہ سے اور ف ک ایک ہی نقطہ ق پر ملتی ہین
اسیطور سے ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر ایک مثلث کے تینوں زاویوں سے تین خطوط وا سطی تنصیف
کرنی اضلاع مقابل کے کھینچے جاوین تو وہ تینوں ایک ہی نقطہ پر ملینگے ---

بیان تبدیل اوتار کا

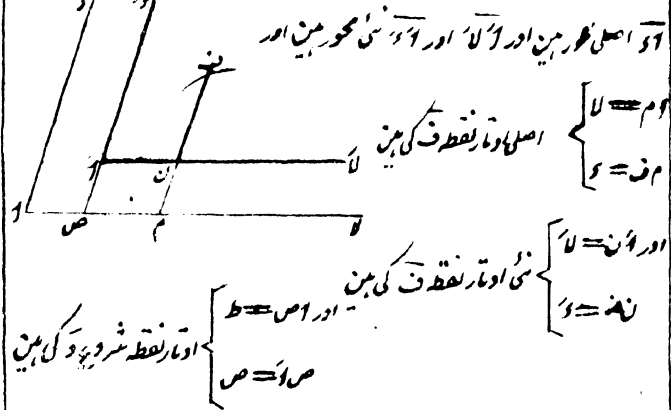
(۵۲) پیشتر بحث مساوات دوسری درجہ وغیرہ کی ہم ترکیب تبدیل کرنی مقام اوتار
کا بیان کرینگی مطلب اس سے یہہ ہی کہ محورونکو ایک ایسی جگہ رکھنا چاہیے کہ صورت مساوات
کے نہایت آسان ہوجاوے اور برعکس اسکی مساوات مین اکثر اوقات مقادیر غیر مقررہ
واسطی کم کرنے اجزا کی داخل کرتے ہین اور اسطرحسے وہ مساوات آسانی سے حل ہوجاتے

ہی اور اسطرح سی وہ خط جس سے وہ تعلق رکہتی ہی معلوم ہوجاتا ہی واضح ہو کہ اس قسم کی تبدیل سی شکل خط منحنی مین کسیطرح کی تبدیلی نہین ہوتی ہی لیکن صورت مساوات مین ایک طرح کی تبدیل ہوجاتی ہی مثلاً مساوات عام خط مستقیم کی ی = ط لا + ص صورت یہہ ہوجاویگی ی = ط لا جبکہ خط مستقیم نقطہ شروع پر سی گذریگا فقرہ (۴۶) اور (۵۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ آسانی مساوات کی موقوف ہی اوس زاویہ پر جو کہ محور آپس مین بناتی ہی یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ تبدیلی نقطہ شروع اور سمت محورون سی بہت فایدہ ہوسکتا ہی اور اس تبدیلی کو بدلنا محوروں کا تعبیر کرتے ہین —

(۵۴) بدلو اوس مساوات کو جسکا نقطہ شروع آ ہی اوس مساوات سی جسکا نقطہ شروع آ' ہی جبکہ آ' لا' متوازی آ لا اور آ' ی' متوازی آ ی کی ہو فرض کرو کہ آ لا اور آ ی اصلی محور ہین اور آ' لا' اور آ' ی' نئی محور ہین اور

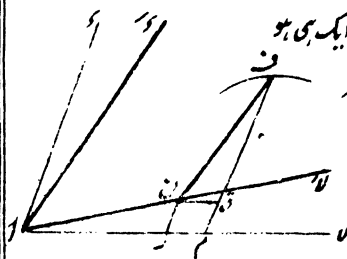
آ م = لا ، م ف = ی } اصلی اوتار نقطہ ف کی ہین

اور آ' ن = لا' ، ن ف = ی' } نئی اوتار نقطہ ف کی ہین

اور آ ص = ط ، ص آ' = ص } اوتار نقطہ شروع جدید کی ہین

تو اب م ف = م ن + ن ف یعنے ی = ص + ی' اور آ م = آ ص + ص م یعنی لا = ط + لا' جبکہ لکھینگے ہم یہہ قیمتین لا اور ی کی کسی مساوات مین تو حاصل ہوگی ہمین ایک ایسی مساوات جسمین اوتار لا' اور ی' پائے جاوینگی جو کہ نئے نقطہ

شروع آ سے شمار کی جاتی ہین -

(۵۵) بدلو ایک مساوات کو جسکے ترچھی محور ہین ایک ایسی مساوات سی جسکی اور ترچھے محور ہون لیکن نقطہ شروع دونون کا ایک ہی ہو

فرض کرو کہ ا لا اور ا ی اصلی محور اور ا لاَ اور ا یَ نئی محور ہین اور

ا م = لا ، م ف = ی } اصلی اوتار نقطہ ف کی ہین

اور ا ن = لاَ ، ن ف = یَ } نئی اوتار نقطہ ف کے ہین

فرض کرو کہ زاویہ لا ا ی = ک

اور لا ا لاَ = ر اور لا ا یَ = رَ اور کھینچو خط ن ر کا متوازی م ف کی اور ن ق متوازی ا م کی تو ی = م ف = م ق + ق ف = ن ر + ق ف =

ا ن $\frac{\text{جس ن ا ر}}{\text{جس ن ر ا}}$ + ف ن × $\frac{\text{جس ف ن ق}}{\text{جس ف ق ن}}$ = لاَ $\frac{\text{جس ر}}{\text{جس ک}}$ + یَ $\frac{\text{جس رَ}}{\text{جس ک}}$ اور لا = ا م

= ا ر + م ر = ا ر + ن ق = ا ن $\frac{\text{جس ا ن ر}}{\text{جس ا ر ن}}$ + ف ن $\frac{\text{جس ن ف ق}}{\text{جس ن ق ف}}$ =

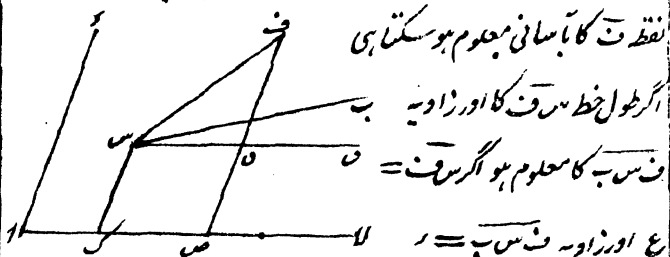
لاَ $\frac{\text{جس (ک − ر)}}{\text{جس ک}}$ + یَ × $\frac{\text{جس (ک − رَ)}}{\text{جس ک}}$ ∴ ی = $\frac{\text{لاَ جس ر + یَ جس رَ}}{\text{جس ک}}$ اور لا = $\frac{\text{لاَ جس (ک − ر) + یَ جس (ک − رَ)}}{\text{جس ک}}$

(۵۶) فرض کرو کہ اصلی محور ترچھی ہون اور نئی محور متقاطع علی القوایم یا رَ − ر = ۹۰° ∴ ی = $\frac{\text{لاَ جس ر + یَ جم رَ}}{\text{جس ک}}$ اور لا = $\frac{\text{لاَ جس (ک − ر) − یَ جم (ک − ر)}}{\text{جس ک}}$

(۵۷) فرض کرو کہ اصلی محور متقاطع علی القوایم یا ک = ۹۰° ∴ ی = لاَ جس ر

+ یَ جم رَ اور لا = لاَ جم ر – یَ جس رَ (۵۸) اب فرض کرو کہ اصلی اور نئی محور متقاطع علی القوایم
ہین یا رَ = ۹۰ اور ر – رَ = ۹۰ ی = لاَ جس ر + جس ر اور لا = لاَ جم ر + یَ جم رَ
(۵۹) یہہ تمام صورتین بوسیلہ پہلی صورت کی نکالی گئین لیکن یہہ بغیر اسکی مدد کی بہی
حاصل ہو سکتے ہین پہلی اور اخیر کی صورتین بہت مفید ہین اور یقین ہے کہ وہ اچہی طرح
یاد رہین گے اگر بطور آیندہ لکہی جاوین اگر دونو یعنے اصلی اور نئی محور ترچہی ہون تو
صورتین (۵۵) اس صورت کی ہو جاوین گی ی = {لاَ جس لاَ ا لا + یَ جس یَ ا لا}
× 1/جس لا ا ی اور لا = {لاَ جس لاَ ا ی + یَ جس یَ ا ی 1/جس لا ا ی} اگر دونون یعنی
اصلی اور نئی محور متقاطع علی القوایم ہون تو صورتین (۵۸) اس صورت کی ہو جاوین گی
ی = لاَ جم لاَ ا ی + یَ جم یَ ا ی اور لا = لاَ جم لاَ ا لا + یَ جم یَ ا لا اگر مقام نقطہ
شروع کا بہی تبدیل کیا جاوے جبکہ سمت محوروں کی تبدیل کی گئی ہی تو اس صورت مین صرف
قیمتین لاَ اور یَ پر مقدار ین ط اور ص زیادہ کرنی چاہیئن یعنے لاَ پر ط اور یَ پر
ص زیادہ کرنا چاہیئے اگرچہ یہہ طور بہت آسان ہے لیکن پہر بہی یہہ تبدیلی علیحدہ علیحدہ
کرنی چاہیئی اور اگر نئی محور لاَ کا نیچی محور لاَ کے واقع ہو تو زاویہ رَ کا منفی ہوگا اسی واسطے
اسکی جیب مستوی منفی ہوگی اور جیب التمام مثبت یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ صورتون تبدیلی
مین واسطے اس خاص صورت کے کچہہ تبدیل کرنا چاہیئے چونکہ قیمتین لاَ اور یَ کی ہر ایک
صورتین مین پہلے درجہ کی مساوات مین حاصل ہوتی ہے تو اب یہانسی معلوم ہوا کہ تبدیل کرنے
اوتار میں کسیطرح کی تبدیلی قوای مساوات مین نہین ہوتی —
(۶۰) اب تک ہمنی مقام نقطہ کا ایک سطح مین بوسیلہ اسکے فاصلون کے دو محوروں سے
معلوم کیا ہی لیکن اب ہم ایک اور مفید طریقہ اسکی دریافت کرنے کا بیان کرینگے فرض

فرض کرو کہ س ایک نقطہ قایم ہی اور س ب ایک خط قایم ہی تو اس صورت مین مقام نقطہ ف کا بآسانی معلوم ہو سکتا ہی

اگر طول خط س ف کا اور زاویہ ب ف س ب کا معلوم ہو اگر س ف = ع اور زاویہ ف س ب = ر

تو ع اور ر اوتار قطبی نقطہ ف کی کہلاتی ہین نقطہ س کو قطب کہتی ہین اور س ف کو نصف قطر متحرک کیونکہ ایک خط منحنی حرکت اس نصف قطر سی بن سکتا ہی جبکہ س ف غیر منقطع فرض کیا جاوی ٹھہری ہوئی خط س ب کو کبھی محور بہی کہتی ہین ۔ بدلوا ایک مساوات کو جسکی اوتار لا اور ر ہین ایک اور مساوات سی جسکی محور قطبی ع اور ر ہین کھیچو خط س ق کا متوازی ا لا کی اور فرض کرو کہ زاویہ ب س د = ھ اور زاویہ د ا لا = ک اور

فرض کرو کہ ا م = لا اور م ف = ر اور ا ص = ط اور س ص = ص تو

$$\left.\begin{aligned} ر = م ف = م ق + ق ف = ص + ع \frac{جس(ر+ھ)}{جس ک} \\ اور لا = ا م = ا ص + س ق = ط + ع \frac{جس ک-(ر+ھ)}{جس ک} \end{aligned}\right\} (۱)$$

فرض کرو کہ س ب منطبق خط س د پر ہوا یا ھ = ۰

$$\left.\begin{aligned} \therefore ر = ص + ع \frac{جس ر}{جس ک} \\ اور لا = ط + ع \frac{جس(ک-ر)}{جس ک} \end{aligned}\right\} (۲)$$

(۶۱) فرض کرو کہ اصلی محور بہی متقاطع علی القوایم

یا ک = $\frac{\pi}{۲}$ یعنی ک = ۹۰° تو

$$\left.\begin{aligned} ر = ص + ع جس ر \\ اور لا = ط + ع جم ر \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۳)$$

اور اگر نقطہ شروع پر آ فرض کیا جاوے تو ط = ۰ اور ص = ۰

∴ ی = ع جس ر ⎫
اور لا = ع جم ر ⎭ ... (۴) (۶۲) برعکس اسکے دریافت کرو ر اور ع کو اجزا لا اور ی مین بموجب (۱) کی

∴ جس ک کث (ر + ک) − جم ک = جس (ک − (ر + ک)) / جس (ر + ک) = (لا − ط) / (ی − ص)

∴ ر + ک = مس^-۱ (ی − ص) جس ک / (لا − ط + (ی − ص) جم ک) = مس (ر + ک)

{(ی − ص) جس ک / (لا − ط + (ی − ص) جم ک)} جہانکہ مس^-۱ ط سے یہہ مراد ہے (وہ قوس دایرہ کی جسکا نصف قطر (آ) ہے اور مماس ط) اور ع^۲ = (لا − ط)^۲ + (ی − ص)^۲ + ۲ (لا − ط) (ی − ص) جم ک ...... (۳۰) (۶۳) اگر محور متقاطع علی القوایم

ہون یا ک = π/۲ اور قطب نقطہ شروع پر (تو ط = ۰ اور ص = ۰) اور ک = ۰

کے بہی فرض کیا جاوے اسیواسطے ی/لا = مس ر اور بصورتین ر = مس^-۱ ی/لا اور

ر^۲ = لا^۲ + ی^۲ ...... (۲۹) اور یہہ صورتین اکثر کام آتی ہین بوسیلہ اس مساوات کی

مس ر = ی/لا جم ر = ۱ / √(۱ + (مس ر)^۲) = ۱ / √(۱ + ی^۲/لا^۲) = لا / √(ی^۲ + لا^۲)

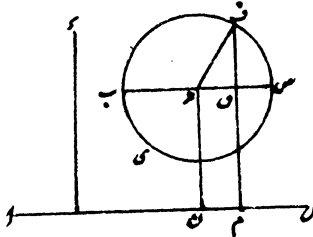
اور جس ر = جم ر × مس ر = ی / √(ی^۲ + لا^۲) ان مساواتون کے وسیلہ سے قیمت ر کی بطور

آیندہ کی بہی حاصل ہوسکتے ہیں ر = جس^-۱ ی / √(ی^۲ + لا^۲) یا ر = جم^-۱ لا / √(ی^۲ + لا^۲)

دایرہ کی بیان مین

(۶۴) واضح ہو کہ عام مساوات درجہ دویم سے جسمین دو مقدار ین غیر مقررہ ہون کئی خط منحنی شکل دایرہ اور بیضوی اور قریب البیضوی وغیرہ متعلق ہین چنانچہ مساوات درجہ دوم کی حل کرنے سے اور اوسکے خواص جاننے سے یہہ بات دریافت

ہوجاویگی اور ان خطوں مین سی دایرہ ایک نہایت سیدہے شکل ہی اور اوسکی خواص
بآسانی معلوم ہوسکتی ہین گو ہم پہلی سی عام مساوات درجہ دویم سی بحث نہ کرین اسیواسطے
قبل از بیان کرنے عام مساوات کی ہم اول دایرہ کی خواص بیان کرتے ہین —

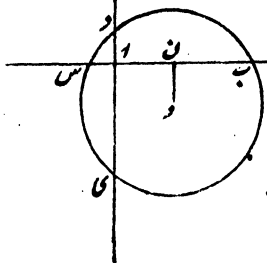
(۶۵) مساوات دایرہ کی اسطور سے معلوم ہوتی ہی فرض کرو کہ ا ب اور ا ل محور
متقاطع علی القوایم ہین اور و مرکز دایرہ
ی ب ف س کا ہی اور چونکہ و ایک
خاص نقطہ ہی اسیواسطے اوسکی دو وتر
مقدارین مقررہ ہین اور اسیواسطے
فرض کرتی ہین ہم کہ ا ن = ط اور ن و = ص اور فرض کرو کہ ا م = لا اور
م ف = ی دو وتر ہین اوس نقطہ مثلا ف کی جو محیط پر واقع ہی اور نصف قطر ف و
= نق اب ظاہر ہی کہ ق و = م ن = ا م − ن ا = لا − ط اور ف ق =
م ف − ق م = م ف − و ن = ی − ص اور چونکہ و ق² + ف ق² = و ف²
∴ (لا − ط)² + (ی − ص)² = نق² اور یہی مساوات عامہ دایرہ کی اگر محور لا
یا ی مرکز دایرہ پر سے گذری تو ان دونون صورتوں مین یہہ دو علیحدہ مساواتین حاصل
ہونگی (ی − ص)² + لا² = نق² ...(۱) ی² + (لا − ط)² = نق² .... (۲)
اگر نقطہ شروع کسی نقطہ مثل ی. محیط دایرہ پر منطبق ہوجاوے تو ظاہر ہے کہ یہہ مساوات
حاصل ہوگی ط² + ص² = نق² پس اگر مساوات عامہ دایرہ کی صورت مفصلہ
دریافت کرین اور اوسمین بجاے ط² + ص² کی نق² درج کرین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی

ی۲ − ۲صی + لا۲ − ۲طلا = ۰ ۰۰۰۰ (۳) اگر نقطہ شروع مقام ب پر ہو
اس صورت مین ب و محور لا کا ہوجاویگا اور ∴ ص = ۰ اور ط = نق
اور ∴ ی۲ + لا۲ − ۲نق لا = ۰ یعنے ی۲ = ۲نق لا − لا۲ ۰۰۰۰ (۴)
اب اگر فرض کرین کہ نقطہ شروع مرکز دایرہ پر ہی تو ظاہر ہے کہ ط = ۰ اور ص = ۰
اور اسیواسطے مساوات عام اس شکل کی ہوجایگی ی۲ + لا۲ = نق۲ ۰۰۰۰ (۵) یہہ سب
مساواتین بہت مفید ہین —— (۴۶) اگر مساوات عامہ دایرہ کی
صورت مفصلہ دریافت کرین تو حاصل ہوگا یہہ ی۲ + لا۲ − ۲صی − ۲طلا
+ ط۲ + ص۲ − نق۲ = ۰ اب ظاہر ہی کہ اس مساوات اور عام مساوات درجہ دوم مین
فرق ہی کہ اسمین سر ی۲ اور لا۲ عدد ایک ہی اور وہ جزو جسمین حاصل ضرب لا ی
ہوتا ہی اسمین نہین ہی — اگر کوئی مساوات دایرہ کی دیجاوے اور اوسی اس مساوات
عام دایرہ سی مطابق کرین تو ہمکو مقام مرکز کا اور مقدار دایرہ کی معلوم ہوجایگی
مثلاً فرض کرو کہ کسی دایرہ کی یہہ مساوات ہی ی۲ + لا۲ + ۴ی − ۸لا − ۵ = ۰
اور اگر اسکو اور مساوات عامہ دایرہ کو آپسمین مطابق کرین تو یہہ دریافت ہوگا
ص = − ۲ اور ط = ۴ اور ط۲ + ص۲ − نق۲ = − ۵ ∴ نق۲ =
ط۲ + ص۲ + ۵ = ۴۵ ∴ نق = ۵ فرض کرو کہ ا نقطہ شروع ہی محور دن
ای اور الا کا ا ن پر پیمایش کرو ایک خط ا ن = ۴ اور خط الا پر
قایم کرو نیچی کیطرف عمود ن د = ۲ پس ظاہر ہی کہ د مرکز دایرہ کا ہوگا اور
اس مرکز پر ایک دایرہ بناؤ کہ جسکا نصف قطر ۵ ہو پس دایرہ مطلوب ہے وہ

وہ نقاط جہان دایرہ محور لا کو کاٹتا ہی دریافت ہو جاتی ہین؟

جسوقت ر = ۰ کی فرض کرین

∴ لا^۲ — ۸لا — ۵ = ۰

∴ لا = ۴ ± √۲۱ ∴ اب = ۴ + √۲۱

اور اس = ۴ — √۲۱ اسیطور اگر لا = ۰

تو ہم پاتی ہین کہ اد = ۱ اور ای = — ۵

(۶۷) نہایت سہل ترکیب بنانی دایرہ کی جسکی مساوات معلوم ہو یہہ ہی کہ مساوات مفروض کو اس صورت کیطرف تحویل کرین (ر — ص)^۲ + (لا — ط)^۲ = ن^۲ مثلاً اگر مساوات دایرہ کی یہہ ہو ر^۲ + لا^۲ + س ر + د لا + ی = ۰ تو عمل مساوی جبر اور نقصان $\frac{س^۲}{۴}$ اور $\frac{د^۲}{۴}$ سے یہہ حاصل ہوتا ہی ر^۲ + س ر + $\frac{س^۲}{۴}$ + لا^۲ + د لا + $\frac{د^۲}{۴}$ + ی — $\frac{س^۲}{۴}$ — $\frac{د^۲}{۴}$ = ۰ ∴ (ر + $\frac{س}{۲}$)^۲ + (لا + $\frac{د}{۲}$)^۲ = $\frac{س^۲ + د^۲}{۴}$ — ی پس اس صورت مین صاف ظاہر ہی کہ — $\frac{د}{۲}$ اور — $\frac{س}{۲}$ دو وتر مرکز کی ہین اور $\sqrt{\frac{س^۲ + د^۲}{۴} — ی}$ نصف قطر دایرہ مطلوب کا ہی — مثالین اس طریقہ کی یہہ ہین (۱) ر^۲ + لا^۲ + ۴ ر — ۴ لا — ۸ = ۰ پس موافق ترکیب گذشتہ کی لازم ہی کہ ر اور لا کی نصف سرونکی مجذور کو زیادہ اور کم کرین اور ∴ حاصل ہوگا یہہ ر^۲ + ۴ ر + ۴ + لا^۲ — ۴ لا + ۴ — ۱۶ = ۰ ∴ (ر + ۲)^۲ + (لا — ۲)^۲ = ۴^۲ ∴ معلوم ہوا کہ دو وتر مرکز دایرہ مطلوب کے ص = — ۲ اور ط = ۲ ہین اور نصف قطر ۴ ہی مثال (۲) ۲ ر^۲ + ۲ لا^۲ — ۴ ر — ۴ لا

+ ۱ = ۰ جواب ط = ۱ اور ص = ۱ اور نق = √(۳/۲) مثال (۳)
ی^۲ + لا^۲ − ۶ی + ۴لا − ۳ = ۰ جواب ط = −۲ اور ص = ۳ اور نق = ۴
مثال (۴) ۶ی^۲ + ۶لا^۲ − ۱۲ی − ۸لا + ۱۴۱ = ۰ جواب ط = −۲/۳ اور
ص = ۲/۳ اور نق = ۱۳/۱۲ مثال (۵) ی^۲ + لا^۲ + ۴ی − ۳لا = ۰ جواب
ط = ۳/۲ اور ص = −۲ اور نق = ۵/۲ مثال (۶) ی^۲ + لا^۲ − ۴ی + ۲لا
= ۰ جواب ط = −۱ اور ص = ۲ اور نق = √۵ آخیر دو مثالون مذکورہ
بالا مین کچھ ضرور نہین کہ مقدار نصف قطر کو دریافت کرین کیونکہ نقطہ شروع محیط دایرہ پر
واقع ہی اور اسیواسطے وہ خط جو مابین مرکز دایرہ اور نقطہ شروع کی وصل کیا جاوے
مساوی نصف قطر کی ہوگا واضح ہو کہ یہی حال سب ایسی مثالون مین ہوتا ہی جنمین جزو
اخیر یعنی مقدار مقررہ نہین ہوتے ہی۔ مثال (۷) ی^۲ + لا^۲ − ۴ی = ۰ جواب
ط = ۰ اور ص = ۲ اور نق = ۲ مثال (۸) ی^۲ + لا^۲ + ۶لا = ۰ جواب
ط = −۳ اور ص = ۰ اور نق = ۳ مثال (۹) ی^۲ + لا^۲ − ۶لا + ۸ = ۰
جواب ط = ۳ اور ص = ۰ اور نق = ۱ ان مثالون مین مرکز دایرہ کا
محورون پر واقع ہی۔

(۶۸) ہمنے پہلے بیان کیا ہی کہ وہ مساوات
دایرہ کی جو موافق محورون متقاطع علی القوایم کی ہو ایک ایسی مساوات درجہ دوم
کی ہوتی ہی کہ اوسمین سر ی^۲ اور لا^۲ کا علیحدہ علیحدہ ایک ایک ہوتا ہی اور علاوہ
ازین اوسمین جزو لا ی کا نہین پایا جاتا ہی اور یہہ بھی ہمنے بیان کیا ہی کہ ایسی مساوات
اکثر دایرہ ہی سے متعلق ہوتی ہین لیکن اسجا بھی واضح ہو کہ یہہ قاعدہ کلیہ نہین ہی کہ

کہ ایسی مساوات کسی دایرہ سے ہمیشہ متعلق ہوتی ہی گو اسطیکہ بعض صورتین ایسی ہو سکتی ہیں
کہ مساوات دایرہ سی متعلق نہین ہوتی بلکہ ایک خط مستقیم یا ایک نقطہ سی مثلاً
مساوات ی^2 + لا^2 − ۸ی − ۶لا + ۲۵ = ۰ دایرہ کی معلوم ہوتی ہی لیکن اسکا
لوکس دایرہ نہین ہے بلکہ ایک ایسا نقطہ ہی جسکی وتر لا = ۳ اور ی = ۴
کیونکہ مساوات گذشتہ کو بطور پر لکھہ سکتے ہین (ی − ۴)^2 + (لا − ۳)^2 = ۰
یہاںسی معلوم ہوتا ہی کہ لا = ۳ اور ی = ۴ اور یہی حال ہمیشہ ایسی مساواتوں کا
ہوگا جنمین نق^2 = ۰ یہاںسی ثابت ہوا کہ نقطہ کو بھی ایک ایسا دایرہ کہہ سکتی
ہین جسکا نصف قطر لانہایت چھوٹا ہو اور دوسری مساوات ی^2 + لا^2 − ۴ی
+ ۲لا + ۹ = ۰ کی صورت یہہ ہو سکتی ہی (ی − ۲)^2 + (لا + ۱)^2 = −۴
لیکن اسکی وسیلہ سے قیمت لا اور ی کی ایسے دریافت نہین ہو سکتے ہین جنسی شرط مساوات
کی پوری ہو جاوی اسیواسطی ثابت ہوا کہ اسکا لوکس غیر ممکن ہی (۲۴) —

(۲۹) دریافت کرو مساوات مماس دایرہ کی — فرض کرو کہ مرکز نقطہ شروع اوتار
کا ہی اور لاَ اور یَ دو وتر اس نقطہ کی ہین جو محیط پر ہی اس صورت مین مساوات
اوس خط کی جو اس نقطہ پر سے گذرتا ہی یہہ ہی ی − یَ = ط (لا − لاَ)
اور مساوات اوس نصف قطر کی جو اس نقطہ پر سے گذری یہہ ہوگی ی = $\frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}}$ لا اور
چونکہ مماس نصف قطر عمود پر ہوتا ہی اسیواسطی ط = − $\frac{\text{لاَ}}{\text{یَ}}$ ∴ ی − یَ =
− $\frac{\text{لاَ}}{\text{یَ}}$ (لا − لاَ) یا ییَ − یَ^{2} = − لالاَ + لاَ^{2} ∴ ییَ + لالاَ =
یَ^{2} + لاَ^{2} = نق^2 مساوات مماس ییَ + لالاَ = نق^2 یاد رہ سکتی ہے

بوسیلہ مساوات دایرہ کی کیونکہ مساوات مماس کی حاصل ہو سکتی ہی اس مساوات
یَ² + لاَ² = نی² سے بوسیلہ بدلنے یَ² کے ی یَ سے اور لاَ² کے لالاَ سے اگر ہم
فرض کریں عام مساوات دایرہ کی (ی − ص)² + (لا − ط)² = نی² تو مساوات
نصف قطر کی (ی − ص) = (یَ − ص)/(لاَ − ط) (لا − ط) ...... (۱۳) ∴ ط =
− (لاَ − ط)/(یَ − ص) اور مساوات مماس کی ی − یَ = ط (لا − لاَ) = − (لاَ − ط)/(یَ − ص)
(لا − لاَ) بوسیلہ مساوات (یَ − ص)² + (لاَ − ط)² = نی² کی مساوات
مماس کو تحویل کر کی اس صورت کیطرف بدل سکتی ہیں (ی − ص) (یَ − ص)
+ (لا − ط) (لاَ − ط) = نی²

(۷۰) دریافت کرو مساوات مماس کے جو کہ متوازی ایک خط مفروض کے ہو فرض
کرو کہ ی = ط لا + ص خط مفروض ہے اور ی = − لاَ/یَ لا + نی²/یَ یا
ی یَ + لالاَ = نی² مساوات اوس مماس کی ہی جسکا دریافت کرنا منظور ہی
لیکن اسمیں مقدار لاَ اور یَ کے مجہول ہیں اور چونکہ یہہ خطوط متوازی ایک دوسرے
کی ہیں ∴ − لاَ/یَ = ط (۴۳) یا − √(نی² − یَ²)/یَ = ط ∴ یَ =
± نی/√(۱ + ط²) اگر اس قیمت یَ کو مساوات ی = − لاَ/یَ لا + نی²/یَ میں لکھیں
اور بجای − لاَ/یَ کی ط لکھیں تو حاصل ہوگا یہہ ی = ط لا ± نی √(۱ + ط²)
یہاں سی ثابت ہوا کہ دو مماس متوازی ایک خط مفروض کے کہیچ سکتے ہیں —

(۷۱) دریافت کرو مقام تقاطع ایک خط اور ایک دایرہ کا — فرض کرو کہ مرکز
دایرہ کا نقطہ شروع [illegible] دونوں کا ہی اور مان لو کہ مساواتیں دونوں کی یہہ ہیں ی

ی = ط لا + ص اور ی^2 + لا^2 = ن^2 اب ظاہر ہی کہ نقطہ تقاطع پر مقدارین لا اور ی کی دونون کی واسطے ایک سی ہونگی ∴ ن^2 − لا^2 = (ط لا + ص)^2 یہانسی حاصل ہوتا ہی لا = (−ط ص ± √(ن^2 (۱ + ط^2) − ص^2)) ÷ (۱ + ط^2) چونکہ قیمت لا کی دو ہین اسیواسطے دو نقطون پر خط اور دایرہ مفروض تقاطع کرینگے ان قیمتون کے وسیلہ سی نقطۂ تقاطع دریافت ہوسکتی ہین اگر ن^2 (۱ + ط^2) = ص^2 تو دونون قیمتین لا کی مساوی ہین اور اس صورت مین خط مفروض دایرہ کو مس کریگا اور اگر ن^2 (۱ + ط^2) کم ہو ص^2 سے تو اس صورت مین خط مفروض دایرہ سے نہین ملیگا۔ مثال (۱) ی^2 + لا^2 = ۲۵ اور ی + لا = ۱ ∴ لا = ۴ یا −۳ اور ی = −۳ یا ۴: مثال (۲) ی^2 + لا^2 = ۲۵ ی + لا = ۵ ∴ لا = ۵ یا ۰ اور ی = ۰ یا ۵ مثال (۳) ی^2 + لا^2 = ۲۵ ۴ی + ۳لا = ۲۵ خط مس کریگا دایرہ کو یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ شامل کرنی سی مساوات اول درجہ کو مساوات دویم درجہ سے ایک مساوات درجہ دویم کی پیدا ہوگی یہانسے ثابت ہوا کہ صرف دوہی نقطون پر تقاطع ہوسکتا ہی —

(۲۲) اگر محور ترچھی فرض کئے جاوین اور زاویہ اونکی درمیان کا ر ہو تو اس صورت مین مساوات دایرہ کی یہہ ہوگی (ی − ص)^2 + (لا − ط)^2 + ۲ (ی − ص). (لا − ط) جم ر = ن^2 ..... (۳۰) اور ی^2 + لا^2 + ۲ لا ی جم ر = ن^2 مساوات اوس دایرہ کی ہی جسکا مرکز نقطہ شروع ہو یہانسی معلوم ہوا کہ مساوات ی^2 + س لا ی + لا^2 + د ی + ی لا + ف = ۰ علاقہ رکھتی ہی دایرہ سے ایک خاص صورت مین جبکہ

محوروں کے زاویہ کی جیب التمام $= \frac{۱}{۲}$ جبکہ مطابق کیا ہمنے اس مساوات کو مساوات
عامہ سی تو حاصل ہوگا ۲ جم ر $=$ س اور -۲ص -۲ط جم ر $=$ د اور
-۲ط -۲ص جم ر $=$ ی اور ط^۲ $+$ ص^۲ $+ ۲$ط ص جم ر $-$ ن^۲ $=$ ف ان
مساواتوں کے وسیلے سے ہم حاصل کرینگے ط $= \frac{۲ی - س د}{۴}$ اور ص $= \frac{۲د - س ی}{س^۲ - ۴}$
اور ن^۲ $= \frac{س ی د - ی^۲ - د^۲}{س^۲ - ۴} -$ ف یہاں سے ثابت ہوا کہ اگر اوتار مرکز
کی اور نصف قطر معلوم ہو تو لوکس بآسانی معلوم ہوسکتا ہی مثال (۱) ی^۲
$+$ لا ی $+$ لا^۲ $+$ ی $+$ لا $- ۱ = ۰$ یہاں ظاہر ہی کہ ۲ جم ر $= ۱$ $\therefore$ ر $= ۶۰^\circ$ یہاں سے
ثابت ہوا کہ اس مساوات سی ایک دایرہ پیدا ہوگا اگر محوروں کی درمیان میں زاویہ
۶۰° کا واقع ہو اور اوتار مرکز کے یہہ ہوں ط $= -\frac{۱}{۳}$ اور ص $= -\frac{۱}{۳}$ اور
ن $= \frac{۲}{\sqrt{۳}}$ اگر فرض کریں اس مساوات کی محوروں کو متقاطع علی القوایم اور
مرکز کو نقطہ شروع تو اس صورت میں مساوات یہہ ہوگی ی^۲ $+$ لا^۲ $=$ ن^۲
$= \frac{۴}{۳}$ مثال (۲) ی^۲ $+ ۲\sqrt{۳}$ لا ی $+$ لا^۲ $- ۹ = ۰$ یہہ مساوات پیدا ہوگی
جبکہ محور زاویہ ۱۵۰° کا بناوینگے اور مرکز نقطہ شروع اور ن $= ۳$ اور واضح ہو
کہ س یہاں مساوی یا زیادہ ± ۲ سے نہیں ہوسکتا کیونکہ جم ر ایک سی کم ہی
اگر ا لا اور ا ی ترچھی محور فرض کئے جاویں اور ک م ایک دایرہ ہو اور ط ص
نصف قطر اور ن ط مماس دایرہ کا نقطہ ط سی کھینچا گیا ہی اور کھینچو خط ط س
اور ص ح متوازی محور ا ی کے اور کھینچو خط ن ص ا متوازی محور ا لا کے اور
اب کھینچو عمود ط د کا خط ن ص پر اور عمود س ر کا خط ط س اور فرض کرو کہ

اص = لاً اور طس = یٔ
اور اج = ط، اور
جص = ص، اور فرض
کرو زاویہ ب ا لا = گ
اور ظاہر ہے کہ مساوات
نصف قطر کی موافق ترچھی محوروں ا لا اور ا ی کی یہہ ہوگی ی - ص =
$\frac{ی - ص}{لاً - ط}$ (لا - ط) اور ظاہر ہے مثلث ط د ہ مشابہ مثلث ہ ر ص کی ہے
∴ ہ ص : د ہ :: ط ہ : ہ ر یا د ص : ط ر :: ہ ص : ط ہ یعنی
(لاً - ط) + (یٔ - ص) جم گ : (یٔ - ص) + (لاً - ط) جم گ :: لاً - ط
: یٔ - ص اسیواسطے $\frac{یٔ - ص}{لاً - ط}$ = $\frac{(یٔ - ص) + (لاً - ط) جم گ}{(لاً - ط) + (یٔ - ص) جم گ}$ یہاں سے
دریافت ہوا کہ مماس اوس زاویہ کا جو کہ نصف قطر محور سے بناتا ہے یہہ ہے
$\frac{یٔ - ص + (لاً - ط) جم گ}{(لاً - ط) + (یٔ - ص) جم گ}$ اسیواسطے مماس اوس زاویہ کا جو کہ مماس محور سے بناتا ہے
یہہ ہوگا $\frac{(لاً - ط) + (یٔ - ص) جم گ}{(یٔ - ص) + (لاً - ط) جم گ}$ — اب ظاہر ہے کہ مساوات
مماس ن ط کی یہہ ہوگی ی - یٔ = — $\frac{(لاً - ط) + (یٔ - ص) جم گ}{(یٔ - ص) + (لاً - ط) جم گ}$ (ا - لاً)
اور جبکہ مختصر کرینگے ہم اس مساوات کو موافق فقرہ (۶۰) کے تو حاصل ہوگا یہہ
(ی - ص) (یٔ - ص) + (ا - ط) (لاً - ط) + (لا - ط) (یٔ - ص) جم گ
+ (لاً - ط) (ی - ص) جم گ = ن² — ∴ ∵ ∴
(۶۳) چاہتے ہیں دریافت کرنا قطبی مساوات دایرہ کا فرض کرو کہ نقطہ قطبی نقطہ شروع ہے

پر ہی اور زاویہ ف س م (= ر) پیمایش کیا
جاتا ہی محور لا سے فرض کرو

س م = لا
م ف = ی } اوتار متقاطع علی القوایم نقطہ ف کے ہین

فرض کرو کہ س ف = ع اور س و = س
اور س ن = ط
ن و = ص } ایضاً و کی ہین اور زاویہ و س لا = رَ تو اس صورت مین

موافق (۶۱) کے یا بوسیلہ شکل کے ی = ع جس ر اور لا = ع جم ر اور ط =
س جم رَ اور ص = س جس رَ لکھو ان قیمتون کو مساوات ی² + لا² − ۲ ص ی − ۲ ط لا
+ ط² + ص² − ق² = ۰ تو حاصل ہوگا یہہ ع² (جس ر)² + ع² (جم ر)²
− ۲ س ع جس رَ جس ر − ۲ س ع جم رَ جم ر + س² (جم رَ)² + س² (جس رَ)²
− ق² = ۰ یا ع² − ۲ س ع (جس ر جس رَ + جم ر جم رَ) + س² − ق² = ۰
یا ع² − ۲ س ع جم (ر − رَ) + س² − ق² = ۰

(۷۲) اگر ط اور ص کی قیمت اجزای قطبی س اور رَ مین نہ لکھی جاوے تو مساوات
قطبی اس صورت کی ہو جاویگی ع² − ۲ (ص جس ر + ط جم ر) ع + ط² + ص² −
ق² = ۰ اگر نقطہ شروع محیط دایرہ پر فرض کیا جاوے تو مساوات دایرہ کی یہہ ہوسکے گی
ط² + ص² = ق² اسیواسطے مساوات قطبی اس صورت مین یہہ ہوجاویگی
ع = ۲ (ص جس ر + ط جم ر) اگر محور لا کا مرکز پر سی گذری تو ص = ۰ اور
مساوات قطبی کی صورت یہہ ہوگی ع² − ۲ ط ع جم ر + ط² − ق² = ۰ یہان سے

معلوم ہوگا کہ ی = ط جم ر ± √(ق² − ط² (جس ر)²) اور یہہ مساوات شکل گذشتہ سی بے بغیر استعانت مساوات کی نکل سکتے ہیں۔

باب ششم

عام مساوات درجہ دویم کے بیان مین

(۵۷) عام صورت مساوات درجہ دویم کی یہہ ہی ا ی² + ب لا ی + س لا² + د ی + ی لا + ف = ۰ اسمین ا اور ب اور س وغیرہ مقادیر مقررہ ہین اگر ہم حل کرین اس مساوات کو واسطے دریافت کرنے قیمتون لا اور ی کی تو حاصل ہوگی یہہ دو مساوات

ی = − (ب لا + د)/۲ ا ± ۱/۲ ا √((ب² − ۴ ا س) لا² + ۲ (ب د − ۲ ا ی) لا + د² − ۴ ا ف) ... (۱)

اور لا = − (ب ی + ی)/۲ س ± ۱/۲ س √((ب² − ۴ ا س) ی² + ۲ (د ب − ۲ س د) ی + ی² − ۴ س ف) (۲)

چونکہ اول مساوات مین جذر پر ± کی علامت ہی تو اسیواسطے قیمت ی کی اکثر دو ہوتی ہین اور یہانسی معلوم ہوا کہ دو وتر مطابق ایک ہی وتر العرض کے یہہ دو وتر کھیچی جا سکتے ہین جبکہ قیمتین وتر العرض کی ایسی ہون کہ جب او نہین صورت نزولی مین لکھین تو وہ صورت ممکن ہو یعنی صفر اور غیر ممکن نہو جاوے کیونکہ اگر وہ صفر ہو جاوے تو فقط ایک ہی وتر ہوگا اور اگر غیر ممکن ہووی تو کوئی وتر نہین کھیچا جا سکتا یہانسے معلوم ہو جاویگا کہ کوئی نقطہ خط منحنی پر مطابق اس قیمت لا کی نہین ہے پس یہانسے معلوم ہوا کہ اگر ہم وسعت اور حدود خط منحنی کی دریافت کیا چاہین تو لازم ہی کہ پہلے دریافت کرین اس امر کو کہ کس صورت مین مقدار نزولی صفر ہو سکتے ہی اور کس صورت مین ممکن اور کونسی صورت مین غیر ممکن دریافت کرنا اس امر کا موقوف ہی اوپر علامت مقدار ذیل کے

(ب٢ — ٤ ا س) لا٢ + ٢ (ب د — ٢ ا ی) لا + د٢ — ٤ ا ف .... (ط)

واضح ہو کہ اس صورت مین واسطے لا کی ایسی بڑی قیمت فرض کیجا سکتی ہی کہ علامت ساری مقدار کی موقوف ہوجاوے اول جزو کی امثال یعنے (ب٢ — ٤ ا س) کی علامت پر اسواسطے کہ لا٢ ہمیشہ مثبت رہیگا لا کیواسطے کیسی ہی قیمت فرض کیجاوے دلیل اس بات کی کہ لا کیواسطے ایسی قیمت فرض کر سکتے ہین کہ علامت ساری مقدار کی موقوف ہوجاوے علامت (ب٢ — ٤ ا س) پر واسطے اسبات کی لکھو صورت (ط) کو اسطور پر م (لا٢ + ن/م لا + ف/م) اور فرض کرو کہ ن/م اور ف/م مین جو مقدار بڑی ہے بغیر لحاظ علامت کی = ق اور یہہ بہی فرض کرو کہ ر = ± (ق + ١) = لا اور لکھو اس قیمت لا کو اس صورت مین لس اب حاصل ہوگی یہہ صورت م (ق٢ + ٢ ق + ١ ± ن/م ق ± ن/م + ف/م)

اب ظاہر ہی کہ قیمت اس صورت اخیر کی مثبت رہیگی ن/م اور ف/م کی واسطے کچہہ ہی فرض کرین اور یہی بات ثابت ہوسکتی ہی جبکہ لا کی واسطے قیمت (ق + ١) سی زیادہ فرض کیجاوے پس معلوم ہوا کہ علامت ساری صورت کی موقوف ہی علامت م پر ——

جبکہ (ب٢ — ٤ ا س) ایک مقدار منفی ہووے تو اوسوقت ایسی ممکن قیمتین لا کیواسطے فرض کیجا سکتی ہین کہ وہ مثبت ہون یا منفی لیکن زیادہ ہون ± ر سی اور اسمین ظاہر ہی کہ ی یعنے وتر غیر ممکن ہوجاویگا اس سے یہہ معلوم ہوا کہ خط محدود ہوگا دونو سمت مین یعنے مثبت اور منفی سمتون لا کی مین جبکہ (ب٢ — ٤ ا س) مثبت ہو تو اس صورت مین اگر فرض کرین ہم واسطے لا کی ایسی قیمتین جو ± ر سی کم نہون تو ظاہر ہی کہ ی یعنے وتر ممکن اور یہان سی معلوم ہوا کہ خط منحنی کا طول دونون سمتون لا کی مین

بی حد ہی اور جبکہ (ب۲ – ۴ا س) = ۰ تو مقدار جو بیچ علامت جذر کی واقع ہوئی وہ

بہ رہیگی ۲ (ب د – ۲ا ی) لا + د۲ – ۴ا ف اب اگر (ب د – ۲ا ی) مثبت ہووے

تو ظاہر ہی کہ ممکن اور مثبت قیمتین لا کیواسطے ایسی فرض کیجا سکتی ہین کہ قیمت ر کی ممکن

ہی لیکن اگر لا کی واسطے کوئی قیمت منفی زیادہ $\frac{د^۲ - ۴ا ف}{۲(ب د - ۲ا ی)}$ سی فرض کیجاوے

تو ر غیر ممکن ہوجاویگا اور یہاںسی معلوم ہوا کہ خط منحنی طول لا انتہا سمت مثبت لا مین

رکہیگا اور محدود ہوگا سمت مخالف مین لیکن اگر (ب د – ۲ا ی) منفی ہووے تو نتایج

معکوس حاصل ہونگی یعنی طول خط منحنی کا لا انتہا ہوگا سمت لا نفی مین اور محدود ہوگا

سمت مخالف مین — اب اگر مساوات (۲) سی بحث کرین تو نتایج مثل مرقومہ بالا

حاصل ہونگی پس معلوم ہوا کہ خطوط منحنی جو مساوات عام درجہ دویم سی تعلق رکہتی ہین

تین قسم کی ہوتی ہین — قسم اول جبکہ ب۲ – ۴ا س = مقدار منفی تو خطوط

منحنی محدود ہر سمت مین ہوتی ہین — قسم دویم جب کہ ب۲ – ۴ا س = مقدار مثبت

تو خطوط منحنی غیر محدود ہر سمت مین ہوتی ہین — قسم سویم جبکہ ب۲ – ۴ا س

= ۰ تو خطوط منحنی محدود ایک سمت مین اور سمت مخالف مین غیر محدود ہوتے ہین

(۷۶) بیان اول قسم کا جسمین ب۲ – ۴ا س = مقدار منفی کے — فرض کرو کہ

$\frac{ب}{۲ا}$ = ط اور $\frac{د}{۲ا}$ = ل اور $\frac{ب^۲ - ۴ا س}{۴ا^۲}$ = – ع اور فرض

کرو کہ لا۱ اور لا۲ قیمتین مساوات آیندہ کی مین (ب۲ – ۴ا س) لا۲ + ۲

(ب د – ۲ا ی) لا + د۲ – ۴ا ف = ۰ اب ظاہر ہی کہ مساوات (۱)

یعنے ر = – $\frac{ب لا + د}{۲ا}$ ±

اس شکل کی ہوجاوے $\sqrt{\frac{ب^2 - ۴ ا س}{۴ ا}} \left(لا^2 + ۲ \frac{(ب د - ۲ ا ی)}{ب^2 - ۴ ا س} لا + \frac{د^2 - ۴ ا ف}{ب^2 - ۴ ا س} \right)$

فرض کرو کہ (۱) ..... $ی = ط لا + ل \pm \sqrt{- ع (لا - لا۱)(لا - لا۲)}$

ہی نقطہ شروع اور تار کا اور ا لا اور ا ی ترچہی محور ہین اور یہہ بہی فرض کرو کہ ح ح د خط ہی جسکے مساوات $ی = ط لا + ل$ ہی اور م و اوسکا ایک وتر ہی جسکی قیمت مطابق اوس وتر العرض لا کی ہی جو واقع ہی مابین لا۱ اور لا۲ کی فرض کرو کہ و ف اور و ف اوپر م ف کی ایسے خط ہین کہ ہر واحد اینن کا مساوی ہی

$\sqrt{- ع (لا - لا۱)(لا - لا۲)}$ کے

پس اب ظاہر ہی کہ ف اور ف دو نقطہ خط منحنی پر ہین — اسواسطے کہ م ف = $م و + و ف = ط لا + ص + \sqrt{- ع (لا - لا۱)(لا - لا۲)}$ اور م ف = $ط لا + ص - \sqrt{- ع (لا - لا۱)(لا - لا۲)}$ اگر ہم اسطرح کہینچین خطوط مطابق مختلف قیمتون لا کے جنکی وسیلے سے مقدار نزولی ممکن رہی تو ہم دریافت کرینگی مختلف نقاط خط منحنی کے — ممکن ہونا ی کا موقوف ہی اوپر ممکن ہونے مقدار نزولی کی اور اسکا ہونا موقوف ہی اوپر صورت اجزای ضربی (لا - لا۱) اور (لا - لا۲) کے

یعنی اوپر قیمتون لا۱ اور لا۲ کے اَب ظاہر ہی کہ یہہ قیمتین لا۱ اور لا۲ تین طرح
پر مساوات مین آسکتی ہین — اول صورت یہہ ہی کہ ممکن اور غیر مساوی ہون — دوسرے
یہہ کہ ممکن اور مساوی ہون — تیسری یہہ کہ غیر ممکن ہون صورت اول فرض کرو
کہ لا۱ اور لا۲ ممکن اور غیر مساوی ہین اور کاٹو اب = لا۱ اور ات = لا۲
پس اگر اس صورت مین لا = لا۱ یا لا = لا۲ تو مقدار — ع (لا − لا۱)
(لا − لا۲) صفر ہوجاویگی اور و نز خط منحنی کا منطبق اور مساوے وتر قطر کے ہوجاویگا
اسیواسطے جبکہ کھینچین ہم خط ب ز اور ت ز ایسی کہ وہی گذرتے ہوئی نقاط
ز اور ز مین متوازی ہون ا د کی تو معلوم ہوجاویگا خط منحنی قطر کو مقام ز
اور ز پر کاٹتا ہی اگر فرض کرین ہم واسطے لا کی ایسی قیمتین کہ واقع ہون مابین
لا۱ اور لا۲ کے تو حاصل ہوگی دو قیمتین ممکن ز کی اسیواسطے کہ (لا − لا۱) مثبت ہی
اور (لا − لا۲) منفی اور یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ — ع (لا − لا۱) (لا − لا۲) مثبت
رہیگا۔ اگر لا کو ایسا فرض کرین ہم کہ وہ زیادہ ہو لا۲ سی یا کم لا۱ سی تو ظاہر ہی
کہ — ع (لا − لا۱) (لا − لا۲) منفی رہیگا اور مقدار زدل غیر ممکن ہوجاویگی اور ز
کی ی کوئی قیمت ممکن دریافت نہوگی یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی درمیان خطوط
ب ز اور ت ز کی محدود ہی — جسطرح ہمنی مساوات (۱) کا حال بیان کیا ہی
اوسیطرح مساوات (۲) پر بھی عمل کرین تو دریافت کرینگے ہم کہ خط مستقیم و د
ایک قطر ہی اور خط منحنی اوسی نقاط ق ق پر کاٹتا ہی اور جسوقت کھینچینگے ہم خطوط
متوازی ا لا کے ایسی کہ وہ گذرتی ہون نقاط ق اور ق پر تو دریافت ہوگا کہ خط

منحنی مابین ان خطوط متوازی کی محدود ہی بس ہمنے ترکیب بالاسی دریافت کرلیا
کہ خط منحنی نقطہ خاص خطوط متوازیہ کی مابین واقع ہی گو اوسکی صورت ابتک دریافت
نہین ہوئی - جسوقت فرض کرین ہم واسطے لا کی مختلف قیمتین ایسی کہ واقع ہون
مابین لا۱ اور لا۲ کے تو دریافت کرلینگے ہم مختلف نقاط مثل ق ق وغیرہ کے
اور اسطرح سی ہمین درستی اوسکی شکل کا حاصل ہوگا لیکن قطع نظر اسکے ترکیب
دریافت کرنی شکل خط منحنی کے یہہ بات ظاہر ہی کہ اوسکی شکل شکل مرقومہ بالاسی بہت
مختلف نہین ہوسکتے اسواسطے کہ اگر اوسی مثل شکل (۲) کی فرض کرین تو ایک
خط مستقیم ایسا کہینچا جاسکتا ہی کہ وہ اس خط منحنی کو اوسی زیادہ نقطون پر تقاطع
کری اور یہہ بات غیر ممکن ہی اسلئی کہ وہ خطوط منحنی جو دوسری درجہ کی مساوات سی
تعلق رکہتی ہین اونمین یہہ بات نہین ہوتی - اس خط منحنی کو جسکا بیان ہوا بیضوی
کہتے ہین - اگر ہم اون نقاط کو دریافت کیا چاہین جہان کہ خط منحنی محور ا لا کو
تقاطع کرتا ہی تو لازم ہی کہ فرض کرین ہم ی = ۰ اور اس صورت مین قیمتون مساوات
س لا۲ + ی لا + ف = ۰ سی لو تار العرض نقاط تقاطع کی تعبیر ہونگے اور یہہ نقطے
دو ہونگی جب یہہ قیمتین ممکن اور غیر مساوی ہون اور ایک نقطہ ہوگا جب کہ یہہ قیمتین
ممکن اور مساوی ہون اور ایک نقطہ بہی نہوگا جب کہ یہہ قیمتین غیر ممکن ہون اسیطور سے
اگر فرض کرین ہم لا = ۰ تو ہم دریافت کرینگی اون نقاط کو (بشرطیکہ پائی جاوین)
جہان کہ خط منحنی محور ا ی کو تقاطع کرتا ہی - صورت دوسری
فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ ممکن اور مساوی ہین ∴ ی = ط لا + س ±

(لا - لا۱) ۲ = ع اور یہہ مقدار غیر ممکن ہی مگر اوس صورت مین جب کہ لا۱ = لا۲
پس معلوم ہوا کہ اس صورت خاص مین بجائے خط منحنی کے ایک نقطہ ہی جسکی وتر
لا۱ اور ط لا۱ + ص یا $\frac{۲ ا ی - ب د}{ب^۲ - ۴ ا س}$ اور $\frac{۲ س د - ب ی}{ب^۲ - ۴ ا س}$ ہین —
صورت تیسری فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ غیر ممکن ہین اس صورت مین ہم کہتی
ہین کہ کوئی ایسی قیمت لا کیواسطے فرض نہین کیجا سکتے کہ (لا - لا۱) (لا - لا۲)
مقدار منفی ہووے کیونکہ قیمتین غیر ممکن اس صورت کی ہوتی ہین ± ح + ق √-۱
اور ± ح - ق √-۱ ∴ (لا - لا۱) (لا - لا۲) = لا^۲ ± ۲ ح لا + ح^۲ + ق^۲ =
(لا ± ح)^۲ + ق^۲ اور یہہ مقدار مثبت ہی جسوقت ممکن قیمت لا کے واسطے فرض
کیجاوے پس معلوم ہوا کہ اس صورت مین مقدار نزولی غیر ممکن رہیگی اسلئی اس
شرط کی موافق خط منحنی نہین ہوسکتا — ہمنی اوس مساوات کا حال جسمین لا کی قیمت
نسبت ت کی دریافت کی گئی ہی نہین لکھا کیونکہ اس مساوات کی نتایج موقوف ہین
(۱) مساوات پر پس جسوقت مطابق کرین ہم مساواتون (۱) اور (۲) کو تو ہم
دیکھینگے کہ لا ۱ مساوات مین ت اوسی مقام پر واقع ہی جہان کہ ت (۲)
مساوات مین واقع ہی اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ مقادیر نزولی ایک ہی دفعہ دونون
مساواتون مین ممکن اور مساوی یا غیر ممکن ہوتی ہین بشرطیکہ آ اور ت کے علامت
ایک ہی ہو چنانچہ ایسا ہی واقع ہوتا ہی جب کہ ب^۲ - ۴ ا س مقدار منفی ہو —
جسوقت کوئی خاص مثال حل کرین تو چاہئے کہ مساوات مفروضہ کو ان شکلون کیطرف
تحویل کرین ی = ط لا + ص ± √-ع (لا - لا۱) (لا - لا۲)

$لا = ط' ی + ص \pm ہا \sqrt{-ع (ی - ی_۱)(ی - ی_۲)}$ پس اب تین صورتین ہین

صورت اول $لا_۱$ اور $لا_۲$ ممکن اور غیر مساوی ہون اس صورت مین خط منحنی بیضوی ہی اور اوسکی حدود قیمتون $لا_۱$ اور $لا_۲$ اور $ی_۱$ اور $ی_۲$ سی دریافت ہوتی ہین اور بوسیلہ مساواتون $ی = ط لا + ص$ اور $لا = ط' ی + ص'$ کے اوسکی قطر کہینچی جاسکتی ہین اور اوسکی نقاط تقاطع محوروان سے دریافت ہوسکتے ہین — جسوقت کہ فرض کرین ہم $لا$ اور $ی$ کو علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کی مساوات مفروض مین صورت دوم فرض کرو کہ $لا_۱$ اور $لا_۲$ ممکن اور مساوی ہین پس اس صورت مین خط منحنی ایک نقطہ ہوگا صورت سویم فرض کرو کہ $لا_۱$ اور $لا_۲$ غیر ممکن ہین پس اس صورت مین خط منحنی غیر ممکن ہوگا — مثال (۱) $ی^۲ - ۲ لا ی + ۲ لا^۲ - ۲ ی - ۴ لا + ۹ = ۰$ یہہ صورت متعلق شکل اول اور صورت اول کی ہی اور اسکی حل کرنی سی معلوم ہوگا کہ $اب = ۲$ اور $اب' = ۴$ اور $اس = ۴ - \sqrt{۲}$ اور $اس' = ۴ + \sqrt{۲}$ اور $اح = ۱$ مثال (۲) $ی^۲ + لا ی + لا^۲ + ی + لا - ۵ = ۰$ یہہ صورت اول سے متعلق ہی اسمین جسوقت کہ $اب = ۲\frac{۱}{۳}$ اور $اب' = -۳$ اور $اس = ۲\frac{۱}{۳}$ اور $اس' = -۳$ تو اوسوقت خط منحنی نقطون کو کاٹیگی بعد محورونکو فاصلون ۱٫۷ اور $-۲٫۷$ پر تقریبا یہہ چہ نقطہ کفایت کرتی ہین خط منحنی کی شکل دریافت کرنیکو — مثال (۳) $ی^۲ + ۲ لا ی + ۳ لا^۲ - ۴ لا = ۰$ یہہ صورت اول سے متعلق ہے۔ مثال (۴) $ی^۲ - ۲ لا ی + ۲ لا^۲ - ۲ ی + ۴ لا = ۰$ ایضا (۵) $ی^۲ + ۲ لا^۲ - ۱۰ لا + ۱۲ = ۰$

— یہہ صورت اول سی متعلق ہی — مثال (۶) ی۲ — ۲لای + ۳لا۲

— ۱۲ — ۱۰لا + ۱۶ = ۰ صورت دویم سی متعلق ہی (۷) ی۲ — ۴لای

+ ۵لا۲ + ۲ی — ۴لا + ۲ = ۰ صورت سویم سی متعلق ہی — ان مثالون کی

حل کرنیسی دریافت ہوگا کہ بخوبی صورت خط منحنی کی دریافت ہوگی فقط یہہ معلوم

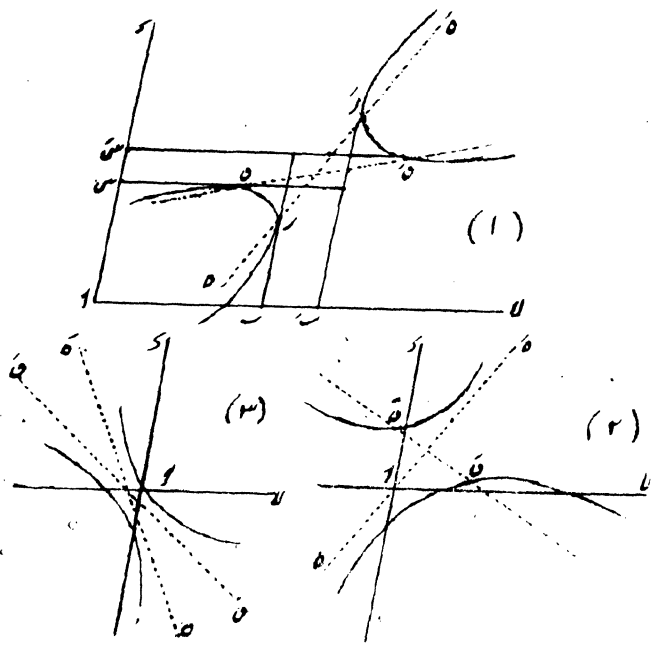
ہوجاویگا کہ خط منحنی کس مقام پر واقع ہی —

بیان دوسری قسم کی خط منحنی کا جسمین ب۲ — ۴اس مثبت ہوتا ہی

اسصورتمین ظاہر ہی کہ ع‾ — ع‾ + ہوجاویگا اور اسیواسطے مساوات (۱) اس

شکل کی ہوجاویگی ی = طلا + ص ± √ع (لا — لا۱) (لا — لا۲)

(۱)

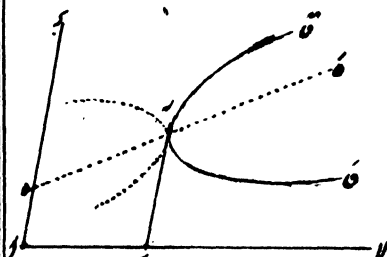
(۳) (۲)

فرض کرو کہ شکل (۱) مین ہ ہَ قطر ہی جسکی مساوات یہہ ہی کہ = ط لا + ص
پس اس صورتین موافق گذشتہ کی تین صورتین قیمتون لاآ اور لاآ کی ہونگی —
صورت اول مین فرض کرو کہ لاآ اور لاآ ممکن اور غیر مساوی ہین اور یہہ بہی فرض کرو
کہ لا = اب اور لا = اَ کہینچو ب ر اور ت ر متوازی ا ز کے اب ظاہر
ہی کہ خط منحنی قطر سے نقطون ر اور رَ سی ملتا ہی — ظاہر ہی کہ مقدار نزولی یعنے
جو علامت جذر کے نیچے واقع ہی غیر ممکن ہوجاویگی اوس صورت مین جبکہ لاآ کو مابین لاآ
اور لاآ کے فرض کرین اور ممکن ہوجاویگی اوس صورتمین جبکہ لاآ کی قیمتین ان حدود سے
باہر ہون اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ کوئی جزو خط منحنی کا مابین خطوط متوازی ت ر
اور ت رَ کی واقع نہین ہی بلکہ وہ خط منحنی غیر نہایت ادہر اودہر اسکی پہیلا ہوا ہی اب
اگر حل کرین مساوات کو واسطی دریافت کرنے قیمت لاآ کے نسبت زآ کی تو قطر و وَ کا
کہینچ سکتے ہین اور معلوم کرسکتے ہین خطون س و اور سَ وَ کو جو متوازی ہی ز لاآ
کی ہین اور جنکی درمیان مین کوئی جزو خط منحنی کا واقع نہین ہی اور محور لاآ ہی اسکی
ادہر اودہر ممکن رہتا ہی اس بیان سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی جو متعلق اس مساوات
کی ہی ایسا ہی کہ اوسکی شکل کچھہ مطابق شکل (۱) کی ہی اور اوسکی دو قوسین
جو غیر محدود ہین اس خط منحنی کو بعید البیضوی کہتی ہین یہان یہہ بیان کرنا چاہیے کہ
قطر دوسرا یعنے و وَ ضرور نہین کہ خط منحنی سے ملا ہی کری اسواسطی کہ ممکن اور
غیر ممکن ہونا مقدار نزولی کا ایک ہی وقت مین موقوف ہی اوپر علامتون آ اور
سَ کے اور یہہ علامتین بعید البیضوی مین مختلف ہوسکتے ہین یعنی ممکن ہی کہ ایک مقدار

نزولی کی قیمت ممکن ہو اور دوسری کی غیر ممکن — صورت دوسری فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ ممکن اور مساوی ہین پس حاصل ہوگی یہہ مساوات ی = ط لا + ص ± (لا − لا۱) ما ع اور یہہ مساوات دو خطوط مستقیم سے تعلق رکھتی ہی — صورت تیسری فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ غیر ممکن ہین اس صورت مین ظاہر ہی کہ کتنی ہی ممکن قیمتین لا کیواسطے فرض کیجاوین سب صورتون مین مقدار نزولی ممکن رہیگے یہانسی یہہ معلوم ہوا کہ خط منحنی کی چار شاخین غیر محدود ہونگے — چونکہ ما ع (لا − لا۱) (لا − لا۲) کبھی زایل نہین ہوسکتا اسواسطے کہ بیضوی کی بیان مین ثابت ہوا ہی پس قطر ہ ہَ خط منحنی سے کبھی نہین مل سکتا لیکن دوسرے قطر د دَ کو کھینچ سکتے ہین اور اگر دونون قطر خط منحنی سی نہ ملین تو بھی اتنا دریافت ہوسکتا ہی کہ خط منحنی کون سی جگہہ نہین پایا جاتا اور اس صورت مین دریافت کرنہ چاہئے کہ خط منحنی کس کس جگہہ محورون سی تقاطع کرتا ہی — اگر ان ترکیبون سے نقاط خط منحنی کے اسقدر دریافت ہوسکین کہ جنسی مقام خط منحنی کا معلوم ہوجاوے تو اون ترکیبون کا استعمال کرنا چاہئے جنکا آگی بیان ہوتا ہی — جب کسی خاص مثال کو حل کیا چاہین تو مساوات عام کو اس صورت سی لکھنا چاہئے ی = ط لا ± ما ع (لا − لا۱) (لا − لا۲) لا = ط ی + ص ± ما ع (ی − ی۱) (ی − ی۲)

اب اسکی بھی تین صورتین ہین صورت اول فرض کرو کہ لا۱ اور لا۲ ممکن اور غیر مساوی ہین اس صورت مین خط منحنی بعید البیضوی ہی اور اوسکی حدود

مقداروں لاا اور لا۲ اور دا اور د۲ کے وسیلہ سے دریافت ہو سکتی ہیں اور
دونوں قطر اوسکے مساواتوں ی = ط لا + ص اور لا = ط ی + ص سے
دریافت ہو سکتے ہیں اور اوسکے نقاط تقاطع محوروں سے بھی دریافت ہو سکتی ہیں
جبکہ فرض کریں ہم لا اور ی کو علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کے —
صورت دوسری لاا اور لا۲ ممکن اور مساوی ہیں اس صورت میں خط منحنی
دو خط مستقیم ہونگے جو آپسمیں متقاطع ہونگے — صورت تیسری
لاا اور لا۲ غیر ممکن ہیں اس صورتمیں خط منحنی بعید البیضوی سے کہیچو دونوں قطر
اور اگر کوئی نقطہ ایسا ہو کہ جہاں خط منحنی محوروں یا کسی قطر سے تقاطع کرتا ہو اوسے
بھی دریافت کرو — مثال (۱) ی۲ − ۳ لا ی + لا۲ + ۱ = ۰ صورت اول
شکل (۱) سے متعلق ہے اسمیں نقطہ شروع وہان ہے جہاں دونو شاخیں بعید البیضوی
کی آپسمیں تقاطع کرتی ہیں مساواتیں قطروں کی یہہ ہیں ی = ۳ لا / ۲ لا = ۲ ی / ۳
اور یہہ ظاہر ہے کہ اب = ۲ / ۵√ اور اب = − ۲ / ۵√ اور اس = ۲ / ۵√ اور اس
= ۲ / ۵√ مثال (۲) ی۲ − ۲ لا ی − لا۲ + ۲ = ۰ صورت اول
متعلق ہے اسمیں دونوں قطر نقطہ شروع پر سے گذرتی اور محوروں سے ۴۵° کا زاویہ
بناتی ہیں اور دوسرا قطر ق ق خط منحنی سے کبہی ملتا اور اب = ۱ اور اب = ۲
اور خط منحنی سے محور و تر العرض ان فاصلوں پر ± ۲√ تقاطع کرتا ہے مثال (۳)
۴ ی۲ − ۴ لا ی − ۳ لا۲ + ۸ ی + ۴ لا + ۱۲ = ۰ صورت اول سے متعلق ہے مثال
(۴) ی۲ − ۴ لا ی − ۵ لا۲ − ۱۰ ی + ۴۰ لا − ۲۶ = ۰ ایضاً

(۵) ی۲ - ۶ لا ی + ۹ لا۲ + ۲ لا - ۱ = ۰ صورت دوسری اس مساوات
مین جزو مساوات خطوط مستقیم کے یہہ نکل سکتے ہین ی - ۳ لا + ۱ = ۰ اور
ی - ۲ لا - ۱ = ۰ ۔ (۶) ی۲ + ۳ لا ی + ۲ لا۲ + ۲ ی + ۳ لا + ۱ = ۰
صورت دوسری (۷) ی۲ - ۴ لا - لا۲ + ۴ لا - ۴ = ۰ صورت تیسری شکل (۲)
(۸) ی۲ + ۳ لا ی + لا۲ + ی + لا = ۰ صورت تیسری شکل (۳) اس صورت
مین بہی ایک قطر خط منحنی سے نہین ملتا لیکن خط منحنی نقطہ شروع مین سے گذرتا ہی
اور محور لا کو فاصلہ -۱ پر تقاطع کرتا ہی اور محور ی سی بہی اسی فاصلہ پر تقاطع
کرتا ہی ۔ (۹) ی۲ - لا۲ - ۲ ی + ۵ لا - ۴ = ۰ صورت تیسری اس
مثال مین قطر متوازی محور ی کی ہین اور خط منحنی اوس قطر سی کبہی نہین ملتا جسکی
مساوات یہہ ہی لا = ۵/۲ (۱۰) ی۲ - لا۲ - ی = ۰ صورت تیسری
(۷۸) یہان سے تیسری قسم کے خطوط منحنی کا بیان جسمین ب۲ - ۴ ا س = ۰
اس صورتمین عام مساوات سی یہہ حاصل ہوتا ہی ی = - (ب لا + د)/۲ ا
± ۱/۲ ا √(۲ (ب د - ۲ ا ی) لا + د۲ - ۴ ا ف) .... (۱)
فرض کرو کہ - ب/۲ ا = ط اور - د/۲ ا = ص اور (ب د - ۲ ا ی)/۲ ا۲ = ع
اور لا ا قیمت ہی اس مساوات کی ۲ (ب د - ۲ ا ی) لا + د۲ - ۴ ا ف = ۰
اور جسوقت لکہین یہہ قیمتین مساوات (۱) مین تو حاصل ہوتی ہی یہہ مساوات
ی = ط لا + ص ± √(ع (لا - لا۱)) وہ خط جو متعلق مساوات ی = ط لا
+ ص ہی قطر ہ ہی فرض کرو کہ ع مثبت ہی پس اگر لا = لا۱ تو ظاہر ہے

کہ اب مقدار نزولی صفر ہو جاتی ہی پس اب اگر لا = اب اور ب آر متوازی
ا ر کے کھیچا جاوے تو خط منحنی قطر کو مقام د پر تقاطع کریگا اب جو وقت لا زیادہ
ہووی لا سی ∞ تک
او سو وقت ر بھی زیادہ ہوتا ہے
∞ تک اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہے
کہ خط منحنی کی دو قوسین ر ق
اور ر ق غیر محدود ہین اور اگر لا کم ہو بہ نسبت لا کے تو ر غیر ممکن ہو جاتا ہے
یعنی کوئی جزو خط منحنی کا نفی سمت مین نہین جاتا — اگر فرض کرین ہم کہ
ع نفی ہی تو اس صورت مین ساری نتایج خلاف مذکورہ بالا کے حاصل ہونگے
اور خط منحنی فقط سمت نفی لا کے مین پھیلیگا اس صورت کا نقشہ خط نقطہ دار
سی معلوم ہو جاتا ہی — اس خط منحنی کو قریب البیضوی کہتی ہین — اگر ب د
— ۴ ا ی = ۰ تو ر = ط لا + ص ± $\sqrt{\frac{د^2 - ۴ ا ف}{۴ ا^2}}$ اس مساوات سی
دو خط مستقیم متوازی محور کے متعلق ہین — اب اگر مقدار نزولی صفر ہو جاوے
تو فقط ایک ہی خط مستقیم رہ جاویگا اور اگر د۲ — ۴ ا ف مقدار منفی ہو
تو قیمت ر کی غیر ممکن ہو جاویگی اور کوئی خط منحنی نہین ہو سکتا — جب کسی
خاص مثال کو حل کرین تو عام مساوات کو اس صورت کیطرف تحویل کرین
ر = ط لا + ص ± $\sqrt{ع (لا - لا^2)}$ صورت اول ع مثبت ہو یا منفی اس
صورت بے کہ خط منحنی کو قریب البیضوی کہتی ہین کیونکہ فقط بعد دریافت کر دو نقاط

جہاں خط منحنی محوروں اور قطر کو تقاطع کرتا ہو — صورت دوسری

ع = ۰ اس صورت میں یا تو دو خط متوازی ہوتی ہیں یا ایک خط مستقیم ہوتا ہی

یا کچھ بھی نہیں ہوتا۔ مثال (۱) ی^{۲} − ۲لای + لا^{۲} − ۲ی − ۱ = ۰

صورت اول سی متعلق ہی — (۲) ی^{۲} − ۲لای + لا^{۲} − ۲ی − ۲لا = ۰

ایضاً (۳) ی^{۲} + ۲لای + لا^{۲} + ۲ی + لا + = ۰

ایضاً (۴) ی^{۲} − ۲لای + لا^{۲} − ۱ = ۰ صورت

دویم میں سی دو خط متوازیوں سے متعلق ہی — (۵) ی^{۲} − ۲لای + لا^{۲} + ۲ی

− ۲لا + ۱ = ۰ ایضاً ایک خط مستقیم سے (۶) ی^{۲} + ۲لای + لا^{۲} + ۱ = ۰

ایضاً غیر ممکن خط ....

(۷۹) پہلے تمام کرنی اس باب کی سی یہہ مناسب معلوم ہوتا ہی کہ ساری باتیں

جنکا اس باب میں ذکر ہوا ہی اکھٹی لکھی جاویں ای^{۲} + ب لای + س لا^{۲} + ی لا

+ دی + ف = ۰ اگر ب^{۲} − ۴اس نفی ہو تو خط متعلق اس مساوات کا

بیضوی ہوگا اور اوسکی یہہ تین قسمیں ہونگی (۱) س = ا اور $\frac{ب}{۲ا}$ =

جیب التمام اوس زاویہ کی جو درمیان محوروں کی واقع ہی یہہ دایرہ ہی چنانچہ فقرہ

(۷۲) میں بیان کیا گیا ہی (۲) قسم (ب د − ۲ای)^{۲} = (ب^{۲} − ۴اس)

(د^{۲} − ۴اف) اس سے ایک نقطہ متعلق ہی (۳) اگر ب^{۲} − ۴اس مثبت ہو

تو خط متعلق اس مساوات کا بعید البیضوی ہوگا اور اوسمیں یہہ ایک قسم بھی ہوگی (۱)

(ب د − ۲ای)^{۲} = (ب^{۲} − ۴اس) (د^{۲} − ۴اف) اور اس سے دو خط مستقیم

بھی متعلق ہین — اگر ت٢ — ٤ا س = ٠ تو اس صورت مین خط قریب البیضوی کا
اور اسمین یہہ تین قسم ہونگی پہلی قسم (١) ب د — ٢ ا ی = ٠ دو خط متوازی متعلق
ہونگی (٢) ب د — ٢ ا ی = ٠ اور د٢ — ٤ ا ف = ٠ اب ایک ہی خط مستقیم
ہوگا (٣) ب د — ٢ ا ی = ٠ اور د٢ کم ٤ ا ف سے تو خط غیر ممکن ہوگا
اگر لا کی قیمت بنسبت ر کی دریافت کرتے تو اسمین بھی ایسا ہی کچہہ دریافت ہوتا اگرچہ
ظاہر مین کچہہ اختلاف ہوتا —

ساتوان باب

اسمین تحویل کرنی مساوات عام درجہ دویم کا ذکر ہی

(٨٠) جب یہہ معلوم ہوا کہ مساوات عام چارون خط منحنی سے متعلق ہی تو جاننا چاہئے
کہ جب نقطہ شروع ایسی مقام پر ہو کہ مجذور اور سطح اور قوت اولی ر اور لا اور مقدار
منقطع ف سب ایک خط کی مساوات مین دخل رکھتی ہون تو ظاہر ہی کہ بہت وقت
اوسکے حل کرنی مین واقع ہوتی ہی اسواسطے ترکیب نقطہ شروع بدلنی کی ایسی تجویز
کی ہی کہ مساوات کا اختصار ہو جاتا ہی یعنے ر اور لا ساقط ہو جاتے ہین اور اوس
خط مین جسکے وہ مساوات ہی کچہہ خلل واقع نہین ہوتا ہو جب اس ترکیب سے
لا = لاَ + ط اور ر = رَ + ص اور جب ان قیمتون کو بجاے ر اور لا کی مساوات عام
لکھین تو

$$\left.\begin{array}{l} ا(رَ^2 + ٢ص رَ + ص^2) + ب(لاَ رَ + لاَ ص + رَ ط + ص ط) \\ س(لاَ^2 + ٢ط لاَ + ط^2) + د(رَ + ص) + ی(لاَ + ط) + ف \end{array}\right\} = ٠$$

......(٣٣) اس مساوات مین سر لاَ اور رَ کی یہہ ہین اگر دونون کو برابر

اسن مساوات مین سرلاً اور رً کے یہہ ہین انکو فرض کرو کر برابر صفر کی ہین تب

ب ط + ۲ا ص + د = ۰ (۴)
ب ص + ۲ط س + ی = ۰ (۵)

مساوات (۴) سی ظاہر ہی کہ ص = − (ب ط − د) / ۲ا لکھو اس قیمت

ص کو مساوات (۵) مین تو اس سے یہہ مساوات پیدا ہوتی ہی

ب (− (ب ط − د) / ۲ا) + ۲ط س + ی = ۰ ∴ − ب^{2} ط − ب د + ۴ا ط س

+ ۲ا ی = ۰ یعنی (۴ا س − ب^{2}) ط = ب د − ۲ا ی ∴ ط = (ب د − ۲ا ی) / (۴ا س − ب^{2})

...... (۶) اب لکھنا چاہیئی اس قیمت طً کو مساوات (۵) مین تب ظاہر ہی کہ

ب ص + ۲س ((ب د − ۲ا ی) / (۴ا س − ب^{2})) + ی = (ب ص + ۲س ب د − ۴ا س ی) / (۴ا س − ب^{2}) + ی

= (۲س ب د − ۴ا س ی + ۴ا س ی − ب^{2} ی) / (۴ا س − ب^{2}) = ۰ بعد تقسیم طرفین مساوات

کی بً پر حاصل ہوتا ہی ص = (ب ی − ۲س د) / (۴ا س − ب^{2}) اس سے معلوم ہوا کہ مساوات

عام جسکو خط منحنی سے تعلق رکھتی ہی اگر اوسکا نقطہ شروع بدلا جاوے اور دوسرا نقطہ شروع

کی یعنی طً اور صً کے وہ قیمتین جو یہان حاصل ہوئی تو مساوات اس صورت کی ہو جاویگی

ا ر^{2} + ب لا ر + س لا^{2} + ف = ۰ (۸) ——

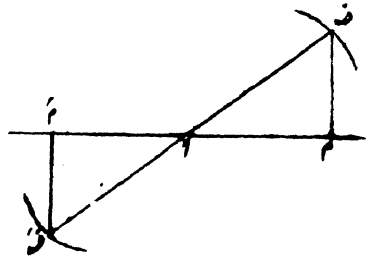
(۸۱) نقطہ ۲ کو جو نیا نقطہ شروع اوپر کا ہی مرکز خط منحنی کا کہتی ہین سو اسطی کہ ہر ایک

وتر خط منحنی کا جو اس نقطہ پر سے گذرتا ہی نصف ہو جاتا ہی کیونکہ مساوات (۸) کے وہی

صورت رہتی ہی جبکہ بجای +لا اور +ر کے −لا اور −ر لکھی جاوین اسلئی کہ یہان

سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ مطابق ہر نقطہ ف کے کہ خط منحنی پر واقع اور اوسکی وتر لا اور ر

ہوان ایک اور نقطہ فً اوسی خط پر ہوتا ہی جسکے دو وتر −لا اور −ر یعنی ا م ٠

اور م ف ہوتی ہین پس دو مثلث قایمہ الزاویہ ا م ف اور ا م' ف' آپسمین برابر
ہوتی ہین اسواسطے ا ا' پر دو زاویہ مقابل
کی آپس مین برابر ہوتی ہین اسلیے خط
ف ف' خط مستقیم ہی اور ا پر نصف
ہوتا ہی — پس ثابت ہوا کہ اگر مساوات مین
بجای لا اور ی کی −لا اور −ی لکھی جاوین اور مساوات کی شکل نہ بدلی تو بالضرور
اوس خط منحنی کیواسطے جو اوس مساوات سی متعلق ہی مرکز ہوتا ہی — اور اگر مساوات
مین ہر جزو کی مقادیر غیر مقررہ کا نشان قوت حاصل جمع ایک عدد جفت ہو تو بھی یہہ
شرط بالضرور پوری ہوتی ہی مثلاً مساوات عام درجہ دویم مین ا ی² + ب لا ی
+ ج لا² + د ی + ہ لا + ف — مین حاصل جمع نشان قوت مقادیر غیر مقررہ کا
اول تین جزو مین ۲ ہی اور دوسرے اگلے دو جزو مین ۱ ہی پس اگر اس صورت مین
تبدیل کرین ہم علامتون لا اور ی کو تو مساوات کی یہی شکل نہین رہتی یعنی اگر کوئی نقطہ
مثل ف کی ایک جای خط منحنی پر واقع ہو تو دوسرا نقطہ مثل ف' کی دوسری جاے خط
منحنی پر اسطرح نہین ہو سکتا کہ مقام اوسکا نقطہ شروع سے پہلے نقطہ کی مشابہ اور مقابل
ہو اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ نقطہ شروع مرکز خط منحنی کا نہین لیکن مساوات (۱)
کی صورت نہین بدلتی خواہ مقادیر غیر مقررہ مثبت ہون خواہ منفی پس اسکے واسطے اوس
خط منحنی کیواسطے نقطہ شروع مرکز ہی — اگر مساوات طاق مرتبہ کی ہو اور ہر جزو مین
حاصل جمع نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا طاق ہو اور مقدار مقررہ بالکل زایل

ہو جاوے خط منحنی مرکزی ہوگا کسواسطے کہ اگر ہم دونون شرطون مین کوئی شرط پوری نہو تو جسوقت تبدیل کرین ہم علامتون +آلا اور +ز کو تو ظاہر ہی کہ مساوات کی شکل بدل جاویگی — پس ہر خط منحنی کا نقطہ شروع مرکز ہو سکتا ہی اگر اوسکی مساوات کی ایسی تحویل کرین کہ اوسکی شکل مطابق ایک کی دو صورتون ذیل کی ہو جاوے —

(۱) جب کہ مجموعہ نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا ہر جزو مین جفت ہو خواہ مقدار مقررہ اوسمین پائی جاوی خواہ نہ پائی جاوے مثلاً ا ر۲ + ب لا ر + س لا۲ + ف = ۰

(۲) جب کہ مجموعہ نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا ہر جزو مین طاق ہو اور مقدار مقررہ نہ پائی جاوی مثلاً ا ر۳ + ب لا ر۲ + س لا۲ ر + د لا۳ + ی ر + ف لا = ۰

فقرہ (۵۹) مین بیان کیا ہی کہ کوئی مساوات اسطرح تحویل نہین کیجا سکتی کہ اوسکا مرتبہ کم ہو جاوے یا زیادہ یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساوات اصلی جفت مرتبہ کی ہو تو بعد تحویل کی بھی ایسی ہی رہیگی اور وہ خط منحنی جو اصلی مساوات سی تعلق رکھتا ہی مرکزی ہو سکتا ہی اگر اوس مساوات کو شرط (۱) کی طرف تحویل کر سکین لیکن اگر مساوات اصلی طاق مرتبہ کی ہو تو بعد تحویل کی بھی طاق مرتبہ کی رہیگی اور اس صورتمین خط منحنی متعلق اوس مساوات کا اوسوقت مرکزی ہو سکتا ہی جب کہ اوس مساوات کو شرط (۲) کی طرف تحویل کر سکین اور یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہم دریافت کیا چاہین اس بات کو کہ خط منحنی کسی مساوات کا مرکزی ہی یا نہین تو ترکیب مذکورہ ذیل کفایت کرتی ہین —

پہلی ترکیب یہہ ہی اگر مساوات جفت مرتبہ کی ہو تو اوسمین محدون کی تبدیل اسطرح کرین کہ وہی اجزا جنمین حاصل جمع نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا ہی بالکل زایل ہو جاوین

دوسری ترکیب یہ ہی کہ اگر مساوات طاق مرتبہ کی ہو تو محوروں کو اسطرح تبدیل کرنا چاہیئی کہ وہ اجزا جنمین حاصل جمع نشانون قوای مقادیر غیر مقررہ کا جفت ہو بالکل زایل ہو جاوین اور مقدار مقررہ بہی جاتی رہی — ابتک جو ہمنی تبدیل مساوات کی بیان کی ہی اوسمین فرض کیا ہی کہ لا = لاَ + ط اور ر = رَ + ص اور اس تبدیل سی فقط دو جزو مساوات کی زایل ہوتی ہین اور مساوات درجہ دویم کی موافق شرط (۲) کی ہو سکتی ہی مگر اوس صورت مین جبکہ قیمت طَ اور صَ کی غیر ممکن یا لانہایت ہو — اون خطوط منحنی مین جو متعلق مساوات درجہ دویم کی ہین ہم دیکہتی ہین کہ قیمتین طَ اور صَ کے ممکن اور محدود ہین الّا اوسوقت جبکہ ب۲ - ۴ ا س = ۰ اور اسیواسطے معلوم ہوا کہ بیضوی اور بعید البیضوی مین مرکز ہوتا ہی اور قریب البیضوی مین نہین ہوتا — اوس صورت مین جبکہ ب۲ - ۴ ا س = ۰ اور اسیوقت ۲ ا ی - ب د یا ۲ س د - ب ی زایل ہو جاوین تو مساوات مفروض مساوات خط مستقیم کی ہو جاویگی جسطرح مساواتون (۱) اور (۲) کی فقرہ (۵۷) مین درج ہین دیکہنی سی واضح ہوتا ہی — اگر بسبب کسی تبدیل کی مقدار ف زایل ہو جاوے تو مساوات مفروض اس شکل کی ہو جاویگی ا ر۲ + ب لا ر + س لا۲ = ۰ اور اس سے یہ قیمت ر کی حاصل ہوتی ہی ر = $\frac{لا}{۲ا}\left\{- ب \pm \sqrt{ب^۲ - ۴ ا س}\right\}$ اور یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ یہ مساوات خط منحنی مساوات دو خطوط مستقیم سی تبدیل ہو جاویگی اور یہ دونون خط مستقیم مرکز مین سے گذرتی ہوئی جاوینگی اگر اس صورتین ب۲ - ۴ ا س منفی ہو وی تو بجای اس صورت مین خط منحنی کی ایک نقطہ ہو گا (دیکہو فقرہ (۵۷))

تبدیل ہوجاویگی تو اوسکی صورت یہہ ہوجاویگی و وَ + سَ لاَ + ف = ۰

(۸۳) چونکہ ماس تعبیر ہوسکتاہی تمام اون مقداروں سی جو مابین صفر اور لانہایت کی واقع ہون بغیر لحاظ اسبات کی کہ علامت اون مقداروں کی منفی ہو خواہ مثبت تو معلوم ہوا کہ زاویہ ر کیواسطے قیمت ہمیشہ ممکن ہوگی مقداروں و ب س وغیرہ کی واسطے کچھہ ہی قیمت فرض کرین اور یہانسی یہہ معلوم ہوتاہی کہ دور کرنا جزو لالا کا ہمیشہ ممکن ہی قیمتین جس ۲ ر کی وجم ۲ ر کی بوسیلہ قیمت مس ۲ ر اسطرح حاصل ہوتی ہین

جم ۲ ر = ± ۱/√(۱+مس ۲ ر) = ± ۱/√(۱+(ب/(و-س))^۲) = ± (و-س)/√((و-س)^۲+ب^۲)

اور جس ۲ ر = جم ۲ ر مس ۲ ر = ± ب/√((و-س)^۲+ب^۲) چونکہ زاویہ ر کا بالضرور قائمہ سی کم ہونا چاہئے تو اسیواسطے جس ۲ ر کہ مثبت ہوگی اور یہانسی معلوم ہوا کہ مقدار تزولی ہمیشہ مثبت یا منفی ہونی چاہئے موافق اس شرط کی کہ ب اپنی ذات سی منفی یا مثبت ہو ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊

(۸۴) تعبیر کیاجاسکتی ہین ہم امثال وَ اور سَ کو جو مساوات تبدیل کی ہوئی مین پائی جاتی ہین نسبت امثالون اصلی مساوات کی ظاہر ہی کہ مساوات جو فقرہ (۸۲) سی حاصل ہوتی ہین یہہ ہین وَ = و جم ۲ ر − ب جس ۲ ر جم ر + س جس ۲ ر اور سَ = و جس ۲ ر + ب جس ر جم ر + س جم ۲ ر ∴ وَ − سَ = و (جم ۲ ر − جس ۲ ر) − ۲ ب جس ر جم ر + س (جس ۲ ر − جم ۲ ر) = و جم ۲ ر − ب جس ۲ ر − س جم ۲ ر = (و − س) جم ۲ ر − جس ۲ ر لیکن جم ۲ ر = ± (و-س)/√((و-س)^۲+ب^۲) اور جس ۲ ر = ± ب/√((و-س)^۲+ب^۲) پس جسوقت لکھین ہم یہہ قیمتین تو حاصل ہوگا

یہہ مساوات $ا' - س' = \frac{(ا-س)^2}{\pm\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}} + \frac{ب^2}{\pm\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}} = \frac{(ا-س)^2+ب^2}{\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}}$ یعنی $ا' - س' = \pm\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}$ اور یہہ بات ظاہر ہی کہ $ا' + س' = ا + س \quad \therefore ا' = \frac{1}{2}\left\{ا+س \pm\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}\right\}$ اور $س' = \frac{1}{2}\left\{ا+س \mp\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}\right\}$ اب بجائے اسکی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی $\frac{1}{2}\left\{ا+س \pm\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}\right\} ک'^2 + \frac{1}{2}\left\{ا+س \mp\sqrt{(ا-س)^2+ب^2}\right\} لا'^2 + \frac{ا ی^2 + س د^2 - ب د ی}{ا س - \frac{1}{4}ب^2} + ف = ۰$

اور اس مساوات مین علامت جذر کی برعکس علامت ب کے جو پہلی مساوات مین پائی جاتی ہی استعمال کرنا چاہیئے یعنے اگر ب اصلی مساوات مین منفی ہو تو یہان علامت جذر کو مثبت رکہنا چاہیئے اور جو وہان مثبت تو علامت جذر کو منفی رکہنا چاہیئے ∴ ∴ ∴ (۸۵) اب تک مساوات اصلی کو ہمنی مختلف صورتوں مین تحویل کیا ہی شکلین آیندہ موافق تبدیلیوں کے کہینچی گئی ہین انمین فقط بیضوی کہینچی گئے ہین اسواسطی کہ یہہ خط منحنی بہ نسبت بعید البیضوی کی آسانی سے کہینچا جا سکتا ہی — شکل (۱) مین اصلے مقام خط منحنی کا تعبیر ہوتا ہی اور اسکے

دو محور ہ آل اور وتی ہین اور اونکی مطابق یہہ مساوات ہی $ا ک^2 + ب لا ک + س لا^2 + د ک + ی لا + ف = ۰$ ۔ شکل دوسری مین مقام نقطہ شروع کو تبدیل کر مرکز خط منحنی پر مقرر کیا گیا ہی اور اس نئے نقطہ شروع کے دو دو محور

− − ... د س ا ± √((ا ر − س)² + ع²) ((ا ی² + س د² − ت د ی)/(ت² − ۴ ا س) + ف ا)

مساوات کو ا' ر'² + س' لا'² + ف' = ۰ اس صورت مین لکھو

(− ا'/ف') ر'² + (− س'/ف') لا'² = ۱ اگر خط منحنی بیضوی ہو تو بالضرور

ب² − ۴ ا س مقدار منفی ہوگی یعنی چونکہ اس صورت مین ب = ۰ تو بالضرور

− ۴ (− ا'/ف') (− س'/ف') مقدار منفی ہوگی اور ∴ − ا'/ف' × − س'/ف'

مثبت ہونگی اور یہانسی معلوم ہوا کہ دونو محور خط منحنی سے ملتے ہین مگر جب کہ

− ا'/ف' اور − س'/ف' منفی ہون تو لوکس غیر ممکن ہوگا — اگر خط منحنی بعید

البیضوی ہو تو بالضرور ب² − ۴ ا س مقدار مثبت ہوگی اور ∴ − ۴ (− ا'/ف')

(− س'/ف') یا مقدار مثبت ہوگی یا ایک جز اس حاصلضرب کا یعنی ا'/ف' مثبت

ہوگا اور دوسرا منفی ہوگا اور یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ ایک محور کی قیمت بعید

البیضوی مین غیر ممکن ہوتی ہی اور اسیواسطی وہ خط منحنی سے نہین ملتا طول محورون

کی موافق ہونگی ا'/ف' اور س'/ف' کے ✻ ✻ ✻ ✻ ✻ ✻

(۸۷) اب تک ہمنی فرض کیا ہی کہ اصلی اوبار محورون متقاطع علی القوایم بر شمار کئی جاتی ہین لیکن اگر محور ترچھی فرض کئے جاوین تو بعضے صورتون مین بہت تبدیلی واقع ہوگی — بیان فقرون (۸۰) اور (۸۱) کا ہر صورت مین مستعمل ہوسکتا ہی مگر فقرون (۸۲) اور (۸۳) اور (۸۴) مین بالکل تبدیل واقع ہوجاویگی لیکن ترکیب جو اس صورت مین استعمال کیجاویگی قریب اوسی ترکیب کے ہوگی

جو صورت بالا مین مستعمل ہوئی ہی مگر بباعث اسکے کہ بعضے عملون مین طوالت بہت ہوگی تو لازم ہی کہ ہم تہوڑی سی عمل لکہہ دین اور سبہونکے نتایج بیان کرین* طالبعلم کو لازم ہی کہ اس فقرہ کو اور جس پر ایسا ہی نشان ہو اول مطالعہ مین ترک کری — واسطے زایل کرنے اوس جز کے جسمین حاصل ضرب مقدارون غیرمعروفہ کا ہی اون صورتون کا استعمال کرو جو فقرہ (۵۵) مین مندرج ہین یعنے

ءَ = لاً جس ر + ءً جس رَ / جس گہ اور لاً = لاً جس (گہ − رَ) + ءً جس (گہ − ر) / جس گہ

) اب جو وقت کہ ہم یہہ قیمتین ءً اور لاً مساوات ا ءً٢ + ب لاً ءً + س لاً٢ + فً = ۰ مین تو حاصل ہوگی یہہ مساوات ءً٢ {ا جس٢ رً + ب جس رً جس (گہ − رً) + س جس٢ (گہ − رً)} ١/جس٢ گہ + لاً٢ {ا جس٢ ر + ب جس ر جس (گہ − ر) + س جس٢ (گہ − ر)} ١/جس٢ گہ + لاً ءً {٢ ا جس رَ جس رً + ب جس ر جس (گہ − رً) + ب جس رً جس (گہ − ر) + ٢ س جس (گہ − ر) جس (گہ − رً)} ١/جس٢ گہ + فً = ۰ اب فرض کرو کہ امثال لاً ءً کے مساوی صفر کی اور اگر دریافت کرین ہم صورت مفصلہ جس (گہ − ر) اور جس (گہ − رً) کی اور تقسیم کرین اونکو جم ر جم رً پر تو حاصل ہوگی یہہ مساوات (ا − ب جم گہ + س جم٢ گہ) + ٢ مم ر مم رً + {ب − ٢ س جم گہ} جس گہ + {مس ر + مس رً} + ٢ س جس٢ گہ = ۰ اور یہان سی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر کوئی خاص قیمت واسطے رَ کی فرض کیجاوے تو اسکی موافق رً اور رً − ر کی دریافت ہو سکتی ہی اس سے معلوم ہوا کہ بیشمار محور خط منحنی کے ہو سکتے ہین اور اوسکے مساوات اس شکل کی ہو سکتی ہین

ا ر۲ + س لا۲ + ف = ۰ اب ان محوروں کا ذکر کرتے ہین اور یہہ بات دریافت کرلی کہ ان محوروں مین سے کونسی متقاطع علے القوایم ہین اسکے دریافت کرنیکو فرض کرو کہ ر۱ - ر = گ/۲ ∴ مس ر۱ = - ۱/مس ر جو قیمت لکھین ہم یہہ قیمت مس ر۱ کی اوس مساوات مین جسمین مس ر۱ اور مس ر پائی جاتی ہین تو حاصل ہوگا یہہ ۲ - {۱ - ب جم گہ + س جم۲ گہ} + (۲ س جم گہ

- ب) جس گہ × ۲/مس ۲ر + ۲ س جس ۲گہ = ۰ ∴ مس ۲ر =

(س جس ۲گہ - ب جس گہ)/(۱ - ب جم گہ + س جم ۲گہ) واضح ہو کہ دو زاویے ایسے ہین کہ اونکی مماس مس ۲ر ہی اور اون زاویوں مین فرق ۱۸۰° کا ہی یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ شرائط مساوات بالا کو دو زاویے ر کی پورا کرسکتے ہین مگر از بسکہ ایک زیادہ ہی دوسری سے بقدر ۹۰° کے تو فقط دوسری قیمت نئی محور ر۱ کے مین مستعمل ہو سکتی ہی یہانسے معلوم ہوا کہ صرف دو ہی محور متقاطع علی القوایم ہو سکتے ہین اور مقام اونکا صورت گذشتہ سے معلوم ہو جائیگا — ٭ ٭ ٭ (۸۸) دریافت کرو کہ امثال ا۲ وغیرہ س ر۲ کو بہ نسبت اصلی مساوات کے اس شرط پر کہ نئی محور متقاطع علے القوایم فرض کیے جاوین اگر فرض کرین ہم ر۱ = گ/۲ + ر اور ضرب کرین (جس گہ)۲ کو امثال یون عام مساوات بدلی ہوئین جو پہلی دریافت کی گئی ہی تو حاصل ہوگا یہہ ا۱ (جس گہ)۲

= ا (جم ر)۲ - ب جم ر جم (گہ - ر) + س (جم (گہ - ر))۲ اور س۱ (جس گہ)۲

= ا (جس ر)۲ + ب جس ر جس (گہ - ر) + س (جس (گہ - ر))۲

∴ (ا۱ - س۱) (جس گہ)۲ = ا (جم۲ ر - جس۲ ر) - ب (جم ر جم (گہ - ر)

+ جس ر جس (گہ - ر)) + س (جم ۲ (گہ - ر) - جس ۲ (گہ - ر)) =

ا جم ۲ ر - ب جم (گہ - ۲ ر) + جم (۲ گہ - ۲ ر) = (ا + ب جم گہ + س جم ۲ گہ

جم ۲ ر) + (س جم ۲ گہ - ب جس گہ) جس ۲ ر اور یہہ بہی ظاہر ہی کہ موافق

ترکیب فقرہ (۸۳) کے بوسیلہ قیمت س ۲ ر کی یہہ حاصل ہوتا ہی جم ۲ ر =

(ا - ب جم گہ + س جم ۲ گہ) / ± م اور جس ۲ ر = (س جس ۲ گہ - ب جس گہ) / ± م

اور اس صورت مین م = ± √(ا۲ + ب۲ + س۲ - ۲ ب (ا + س) جم گہ + ۲ ا س جم ۲ گہ)

= ± √((ا + س - ب جم گہ)۲ + (ب۲ - ۴ ا س) جس۲ گہ) یہان سی معلوم ہوا

کہ (ا' - س') جس۲ گہ = ± م اور (ا' + س') جس۲ گہ = ا - ب جم گہ + س

∴ ا' = (ا - ب جم گہ + س ± م) × ۱ / (۲ جس۲ گہ) اور س' = (ا - ب جم گہ

+ س ∓ م) ۱ / (۲ جس۲ گہ) پس اخیر مساوات عام یہہ ہوگی (ا - ب جم گہ + س

± م) ی۲ / (۲ جس۲ گہ) + (ا - ب جم گہ + س ∓ م) لا۲ / (۲ جس۲ گہ) + (ا ی۲ + س ذ۲ - ب د ہ) / (ب۲ - ۴ ا س)

+ ف = ۰ علامت ± مین سی ایک کا استعمال کرنا چاہیے موافق

± (س جس ۲ گہ - ب جس گہ) کے کیونکہ ۲ ر کو مثبت فرض کیا ہی - یہہ تبدیلیان

جبریہ بطور علم ہندسہ کے بہی موافق فقرہ (۸۵) کے ہوسکتی ہین - شکلون

(۱) اور (۲) اور (۳) مین فرض کرنا چاہیی کہ مابین محوردن ا ل اور

ا ی اور ا ل' اور ا ی' کی زاویہ گہ واقع ہی - ترکیب فقرہ (۸۶) کے

اسوقت بہی مستعمل ہوسکتی ہی جبکہ محور ترچہی ہون اور اس صورت

مین قیمت اوس مربع کی جو نصف محور کلان پر ہی یہہ ہوگی

$$\frac{-٢ حس ا كه}{ا - ب جم كه + س \pm م} \left(\frac{اى^٢ + س د^٢ - ب د ى}{ب^٢ - ٤ ا س} + ف \right)$$

(۸۹) اس فقرہ کی اخیر مین چند مثالین لکہی جاینگی مرکزی خطوط منحنی کے بحث کی بعد —

تفصیل اون صورتون کی جو بذریعہ محور متقاطع علی القوائم کے حاصل ہوتے ہین

$$ار^٢ + ب لا ر + س لا^٢ + د ر + ى لا + ف = ٠ \quad ....(١)$$

$$\left.\begin{array}{l} ر = ر' + ط \\ لا = لا' + ص \end{array}\right\} \text{یہہ مساواتین کام مین آتی ہین} \quad ص = \frac{٢ ا ى - ب د}{ب^٢ - ٤ ا س} \quad .....(٢)$$

$$ط = \frac{٢ س د - ب ى}{ب^٢ - ٤ ا س} \quad ....(٣)$$

$$ف' = \frac{د ط + ى ص}{٢} + ف = \frac{اى^٢ + س د^٢ - ب د ى}{ب^٢ - ٤ ا س} + ف \quad .....(٤)$$

$$ار'^٢ + ب لا' ر' + س لا'^٢ + ف' = ٠ \quad ....(٥)$$

$$\left.\begin{array}{l} ر' = لا'' جس ر + ر'' جم ر \\ لا' = لا'' جم ر - ر'' جس ر \end{array}\right\} \text{یہہ صورتین کام مین آتی ہین}$$

$$مس ٢ ر = - \frac{ب}{ا - س} \quad (٦) \quad ا' = \frac{١}{٢} (ا + س \pm م) \quad .....(٧)$$

$$س' = \frac{١}{٢} (ا + س \mp م) \quad .....(٨) \quad م = \pm \sqrt{(ا - س)^٢ + ب^٢}$$

اسمین علامت ± مین سے کسی ایک کا استعمال موافق علامت ∓ ب کی کرنا چاہئے

$$\left(- \frac{ف'}{ا'}\right) ر''^٢ + \left(- \frac{ف'}{س'}\right) لا''^٢ = ١ \quad .....(٩)$$

مساواتون (۲) اور (۳) سے دریافت ہوتا ہی مقام مرکز کا اور جسوقت مساوات (۴) کو بہی کام مین لاتی ہین تو مساوات عام (۵) مساوات کی طرف تحویل ہو جاتی ہی (۶) مساوات

سی مقام اون محورون متقاطع علی القوایم کا جو مرکز سی گذرتی ہون دریافت ہوتا ہی
مساوات (۷) اور (۸) کی وسیلہ سی مساوات عام (۹) ہمساوات کیطرف تحویل
ہوجاتی ہی اور امثال ء۲ اور لا۲ کی جسوقت اولٹی جاتی ہین تو اون سی علیحدہ علیحدہ مجذور
نصف محورون کے جو محورون ء اور لا پر شمار کی جاتی ہین تعبیر ہوتی ہین۔

مثال (۱) ء۲ - لا ء + لا۲ + ء - ۱ = ۰ اس مساوات کا لوکس
بیضوی ہی اور اسمین ص = -۱ اور ط = -۱ اور ف = -۲
∴ ء۲ - لا ء + لا۲ - ۲ = ۰ اور چونکہ مس ۲ ر = ۱/۰ ∴ ۲ ر = ۹۰°
اور ر = ۴۵° اور ب منفی ہی ∴ م = +۱ اور ق = ۳/۲ اور ں = ۱/۲
∴ ۳/۲ ء۲ + ۱/۲ لا۲ - ۲ = ۰ یعنی ۳/۴ ء۲ + ۱/۴ لا۲ = ۱ اسکا ہی مجذور
نصف محورون کے ۴/۳ اور ۴ ہین اور یہانسی معلوم ہوا کہ نصف محور ما ۲/√۳ ہی
اور ۲ ہین اور ∴ طول محورونکا ۴ اور ما ۴/√۳ مثال (۲) ۳ ء۲ - ۴ لا ء
+ ۳ لا۲ + ء - لا - ۹/۱۰ = ۰ اسکا لوکس بیضوی ہی اور اخیر مرتبہ تک تحویل
کی ہوئی مساوات یہہ ہی ۵ ء۲ + لا۲ = ۱ اس صورت مین محورون ۲ اور ما ۲/√۵
ہین۔ مثال (۳) ۳ ء۲ + لا ء + لا۲ - ۲ ء - ۴ لا + ۳ = ۰
اس صورت مین لوکس بیضوی ہی اور اخیر مرتبہ تک تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہی
(۳ - ۲√۱۰)/۲ ء۲ + (۳ + ۲√۱۰)/۲ لا۲ = ۱ مثال (۴) ۵ ء۲ + ۶ لا ء +
۵ لا۲ - ۲۲ ء - ۲۶ لا + ۲۹ = ۰ اسکا لوکس بیضوی ہی اور ص = ۲
اور ط = ۱ اور ف = (د ط + ی م)/۲ + ف = -۸ اور مس ۲ ر = ∞

∴ ر = ۵ ۞ اور ∴ وہ صورتین جنسی تحویل عمل مین آتی ہی یہہ ہین

ئ = (لاً + یً) / ۲ اور لاً = (لاً − یً) / ۲ ∴ ۞ (لاً + یً)۲ + ۲ ((لاً − یً)/۲)۲

+ ۞ (لاً − یً)۲ − ۸ = ۰ یعنے ۴ یً۲ + لاً۲ = ۴ مثال (۵) ۵ ی۲

+ ۲ لا ی + ۵ لا۲ − ۲ لا = ۰ اسکا لوکس بیضوی ہی اور اخیر مرتبہ تک تحویل

کی ہوئی مساوات یہہ ہی ۲ یً۲ + ۳ لاً۲ = ۶ مثال (۶) ۲ ی۲ + لا۲ +

۴ ی − ۲ لا − ۶ = ۰ اسکا بہی لوکس بیضوی ہی۔ فرض کرو کہ ی =

یً + ط اور لا = لاً + ص ∴ اول مرتبہ کی تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہے

۲ (یً + ط)۲ + (لاً + ص)۲ + ۴ (یً + ط) − ۲ (لاً + ص) − ۶ = ۰ یعنے

۲ یً۲ + لاً۲ + ۴ (ط + ۱) یً + ۲ (ص − ۱) لاً + ۲ ط۲ + ص۲ + ۴ ط − ۲ ص − ۶ = ۰

فرض کرو کہ ط + ۱ = ۰ اور ص − ۱ = ۰ ∴ ص = ۱ اور ط = −۱

اور فً = + ۹ اسمین زیادہ تحویل کرنے کچہہ ضرور نہین محور √۶ اور √۳ ہین

مثال (۷) ۲ ی۲ − ۱۰ لا ی + لا۲ + ی + لا + ۱ = ۰ اس صورت مین لوکس

بعید البیضوی ہی اسمین اخیر مرتبہ کی تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہی ۶ یً۲ − ۴ لاً۲

+ ۹/۸ = ۰ مثال (۸) ۴ ی۲ − ۸ لا ی − ۴ لا۲ − ۴ ی + ۲۸ لا − ۱۵ = ۰

لوکس اسکا بعید البیضوی ہی اور تحویل کے ہوئی مساوات یہہ ہی یً۲ − لاً۲ = ۱/(۲√۲)

اس صورت مین ہر ایک محور برابر ہی √۲ کے اور یہہ بہی واضح ہو کہ اس صورت مین وے

محور جو محور لاً پر شمار کیا جاوے خط منحنی سے ملیگا مثال (۹) ی۲ − ۲ لا ی − لا۲

− ۲ = ۰ اسکا لوکس بہی بعید البیضوی ہی اور اسمین نقطہ شروع مرکز ہی اور

اسیلئی ایک ہی تحویل کفایت کرتی ہی ظاہر ہی کہ مس ۲ ر = ۱ ∴ ۲ ر = ۹۰°

اور م = ۸√۲ اور ءَ = ۲√۲ اور سَ = - ۲√۲ اور ءَ^۲ - لَ^۲ = ۲√۲

(۹۰) اس فقرہ مین محور ترچھی فرض کئے جاتے ہین قیمتین طَ اور صَ اور فَ کی

بعینہ ویسی ہی رہیگی جیسی محورون متقاطع علی القوایم مین تھین مس ۲ ر =

(س جس ۲ گہ - ۲ جس گہ) / (۱ - ۲ ب جم گہ + س جم ۲ گہ) اور ءَ = (۱ - ب جم گہ + س ± م) / (۲ جس ۲ گہ)

اور م = ± √(۱ + ب^۲ + س^۲ - ۲ ب (۱ + س) جم گہ + ۲ س جم ۲ گہ) اسمین

علامت ± کا استعمال کرنا چاہئی موافق علامت ± (س جس ۲ گہ - ب جس گہ)

مثال (۱) ء^۲ + ل ء + ل^۲ + ء + ل - ۱/۴ = ۰ زاویہ محورون کا اس صورت

مین ۶۰° ہی اور ص = - ۱/۳ اور ط = - ۱/۳ اور مس ۲ ر = ۱ ∴ ۲ ر =

۹۰° اور م = + (۱ - √۲) اور ءَ = ۳ - ۳/(۲√۲) اور سَ = ۱ + ۱/(۲√۲) اور

فَ = - ۱/۲ تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہی ۳ (۲ - √۲) ء^۲ + (۲ + √۲) ل^۲

= ۱ اور وکسر سیقوی ہی اور مجذور نصف محورون کی یہہ ہین ۱/(۳ (۲ - √۲))

اور ۱/(۲ + √۲) مثال (۲) ۷ ء^۲ + ۱۶ ل ء + ۱۶ ل^۲ + ۳۲ ء + ۴۴ ل +

۲۸ = ۰ اس صورت مین زاویہ گہ = ۶۰° اور ص = - ۲ اور ط = ۰

اور فَ = (د ط + ی ص)/۲ + ف = - ۳۶ اب صورت مساوات کی یہہ ہوتی

ہی ۷ ءَ^۲ + ۱۶ ل ءَ + ۱۶ لَ^۲ - ۳۶ = ۰ چونکہ مس ۲ ر = ۰ تو مساوات

مذکور مساوات محورون متقاطع علی القوایم سے تبدیل ہو سکتی ہین اگر تبدیل کرین

محور ء کو بقدر زاویہ ۳۰° کے اور اسیلئی جبکہ فرض کرین ر = ۰ اور گہ = ۹۰°

ہو صورتین (۵۶) بوسیلہ تبدیلی کے اس شکل کے ہو جاینگی ی = ... اور

لا = لا ... اور جب لکھین یہہ قیمتین مساوات بالا مین تو یہہ مساوات حاصل ہوگی

۹ ی² + ۱۶ لا² − ۶ ... = ۰ یہان سی معلوم ہوتا ہی کہ محور بیضوی کے ... اور ... مین

مثال (۳) ی² − ۳ لا ی + لا² + ۱ = ۰ زاویہ گہ = ۹۰° اور ص = ۰ اور

ط = ۰ اور پس ۲ ر = ... اور ∴ ر = ۴۵° اور م = ۴ اور ا = ۵

اور س = − ... اور ف = ۱ ∴ تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوگی ۵ ی²

− ... لا² = −۱ واضح ہو کہ لوکس اسصورتین بعید البیضوی ہی اور اوسکی محور

... اور ... ہین اول انمین سے جو بڑا ہی نئی محور لا پر شمار کیا گیا ہی اور دو

محور خط منحنی سے کبھی نہین ملتا —

(۹۱) فقرہ (۸۱) کی اخیر مین ہمنے بیان کیا ہی کہ عام مساوات درجہ دویم کی متعلق

دو قسم کے خط منحنی ہوتی ہین ایک تو مرکزی جسمین ایک نقطہ ایسا ہوتا ہی کہ جتنی خط

اوسمین سی گذر کر خط منحنی تک منتہی ہوتی ہین اونکی تنصیف ہو جاتی ہی اور دوسری وہ

جسمین ایسا نقطہ نہین ہوتا ہی یہہ بات کہ فلانی خط مرکزی ہین اور فلانی غیر مرکزی ہین کرنسی شاہدہ

قیمتون ص اور ط کی جو واسطی دور کرنے بعض اجزا مساوات عامہ کی فرض کی

گئی تہی معلوم ہوئے تہی جبکہ ص اور ط بی نہایت ہوتی تہی تو اس سے یہہ معلوم ہوتا تہا

کہ خط منحنی ایسی صورت مین مرکزی نہین ہی یعنے جسوقت امثال اول تین جز دن مساوات

عامہ مین یہہ نسبت ہوتی تہی ب² − ۴ ا س = ۰ اوسوقت غیر مرکزی ہوتا خط

منحنی کا معلوم ہوتا تہا — چونکہ ب² − ۴ ا س = ۰ ایک نشان قریب البیضوی کا

کا ہی تو اس سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ عام مساوات درجہ دویم کی جو قریب البیضوی سے
متعلق ہی ایسی نہین کہ اوسمین بہی وہی تحویل ہوسکے جو فقرہ (۸۰) مین کام آئی
تہی یعنی اسمین امثال لاَ اور یٓ کو زایل نہین کرسکتے اور مساوات عام کو اسطرف
تحویل نہین کرسکتے $ا ی^۲ + ب لا ی + س لا^۲ + ف = ۰$ یعنے اخیر مرتبہ تحویل کا
یہہ نہین ہوسکتا $ا ی^۲ + س لا^۲ + ف = ۰$ گو کہ ہم مساوات قریب البیضوی کو
بعینہ موافق بالا کی تحویل نہین کرسکتے پر اوسکی تحویل اسطرح ہوسکتی ہی کہ تحویل
کی ہوئی صورت صورتوان مذکورہ سے نہایت سہل ہو اور یہہ اسطرح ہوسکتا ہی کہ
عمل جو پہلے کئی گئی ہین اوسطرح کئے جاوین مگر ترتیب اونکی بدل دین — ہم اول
تبدیل کرینگے محورون کو بقدر زاویہ ر کی اور اس ترتیب سی دو جزو مساوات عام
کی زایل ہوجاوینگے اور صورت مساوات کی یہہ ہوجایگی $ا ی^۲ + د ی + ی لا + ف = ۰$
اور اب ہم تبدیل کرینگی محورونکو اسطرح کہ نئی محور پہلی محورونکی متوازی ہون اور اس ترکیب
سی دو جز زایل ہوجاینگے پس مساوات اخیر اس صورت کی ہوگی $ا ی^۲ + ی لا = ۰$

(۹۲) صورتون فقرون (۵۸) مین فرض کرو کہ $ی = لا جس ر + ی جم ر$
اور $لا = لا جم ر - ی جس ر$ اب جسوقت لکہین یہہ قیمتین مساوات $ا ی^۲ + ب لا ی$
$+ س لا^۲ + د ی + ی لا + ف = ۰$ مین اور پہر مرتب کرین اسکی اجزا کو تو
حاصل ہوگی یہہ مساوات

$ا جم^۲ ر - ب جس ر جم ر + س جس^۲ ر$	$ی^۲$
$۲ ا جس ر جم ر + ب جم^۲ ر - ب جس^۲ ر - ۲ س جس ر جم ر$	$لا ی$

+ ا جس۲ ر	لاَ۲ + د حم ر	اَ + د جس ر	لاَ
۲ جس ر حم ر	ب ۔ ی جس ر	ی حم ر	+ ف = ۰
س حم۲ ر			

فرض کرو کہ امثال لاَ اَ مساوی صفر کے ∴ (۱ ۔ س) جس ر جم ر + ب (حم۲ ر ۔ جس۲ ر) = ۰ یعنی (۱ ۔ س) جس ۲ ر + ب حم ۲ ر = ۰ ∴ مس ۲ ر = $\frac{-ب}{۱-س}$ یہہ وہی صورت ہی جو فقرہ (۱۲۰) مین حاصل ہوئی تھی یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر محور تبدیل کئے جاوین بقدر ایک ایسی زاویہ ر کی کہ مس ۲ ر = $\frac{-ب}{۱-س}$ تو مساوات تبدیل کی ہوئی مین کوئی ایسا جز نہوگا جسمین حاصلضرب مقادیر غیر مقررہ کا پایا جاوے یعنے صورت مساوات کی یہہ ہوگی اَ اَ۲ + سَ لاَ۲ + دَ اَ + یَ لاَ + ف = ۰ ۔ چونکہ یہہ مساوات متعلق قریب البیضوی کی ہی تو ضرور ہے کہ نسبت امثالون اول کی تین جزون کی ایسی ہونی چاہی کہ ب۲ ۔ ۴ ا س = ۰ کی ہو اس صورت مین چونکہ بَ = ۰ تو بالضرور حاصل ہوگی یہہ مساوات ۔ ۴ اَ سَ = ۰ اور یہانسی معلوم ہوا کہ اَ = ۰ یا سَ = ۰ یعنی وہ تحویل جس سے سر لاَ اَ کا زایل ہو گیا ہی اوسی تحویل سی سر لاَ۲ یا اَ۲ کا بھی بیشک زایل ہو جاویگا اور یہہ بات بوسیلہ امتحان کرنی قیمتون لاَ۲ یا اَ۲ کی معلوم ہوگی

(۱۲۳) فرض کرو کہ مساوات عام مین سر ب کا منفی ہی یعنے ب = ۔ ۲ $\sqrt{اس}$ اور بذریعہ مس ۲ ر کی حاصل ہوتے ہی یہہ مساوات حم ۲ ر = $\frac{۱}{\sqrt{۱ + مس۲ ۲ ر}}$ = $\frac{۱}{\sqrt{۱ + (\frac{ب}{ا-س})^۲}}$ = ± $\frac{ا-س}{\sqrt{(ا-س)^۲ + ۴ اس}}$ = ± $\frac{ا-س}{ا+س}$ اور جس ۲ ر =

$\pm \frac{ب}{(۱+س)} = \frac{ب}{۱+س}$ کیونکہ جس ۲ر مثبت ہونا چاہئے اور ب اپنی ذات سے
منفی ہے پس معلوم ہوا کہ جم ر $= \sqrt{\frac{۱+جم\,۲ر}{۲}} = \sqrt{\tfrac{۱}{۲}\left(۱ \pm \frac{۱-س}{۱+س}\right)} =$
$\sqrt{\frac{۱}{۱+س}}$ اور جس ر $= \sqrt{\frac{۱-جم\,۲ر}{۲}} = \sqrt{\frac{س}{۱+س}}$ اور جب وقت لکھین یہہ
قیمتین جس ر اور جم ر کی مساوات تبدیل کی ہوئی مین تو حاصل ہوگی یہہ

مساوات $ا' = \frac{اا}{۱+س} - \frac{ب\sqrt{اس}}{۱+س} + \frac{س\,س}{۱+س} = \frac{ا+۲ا\,س+س^۲}{۱+س}$
$= ا+س \quad س' = \frac{اس}{۱+س} + \frac{ب\sqrt{اس}}{۱+س} + \frac{س\,ا}{۱+س}$ لیکن ب $=$
$-۲\sqrt{اس}$ تو حاصل ہوگی یہہ مساوات $س' = \frac{اس}{۱+س} + \frac{ب\sqrt{اس}}{۱+س}$
$+ \frac{س\,ا}{۱+س} = \frac{اس}{۱+س} - \frac{۲اس}{۱+س} + \frac{اس}{۱+س} = \frac{۲اس - ۲اس}{۱+س} = ۰$
$د' = \frac{د\sqrt{ا} - ی\sqrt{س}}{\sqrt{۱+س}}$ اور $ی' = \frac{د\sqrt{س} + ی\sqrt{ا}}{\sqrt{۱+س}}$ اور اس صورت مین
تبدیل کی ہوئی مساوات کی شکل یہہ ہوجاتی ہے

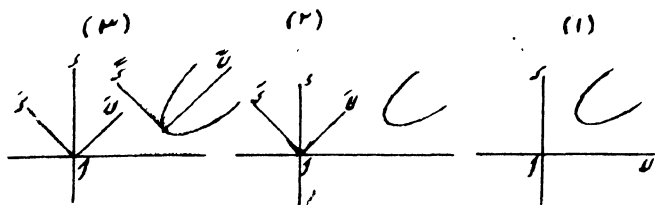
$(ا+س)\,ر'^۲ + \frac{د\sqrt{ا} - ی\sqrt{س}}{\sqrt{ا+س}}\,ر' + \frac{د\sqrt{س} + ی\sqrt{ا}}{\sqrt{ا+س}}\,لا' + ف = ۰$

(۹۴) تا کہ مساوات کی تحویل اور بھی ہوسکی تبدیل کرو محورون مفروض کو
اور محورون سے جو انکی متوازی ہون بذریعہ ان صورتون جبریہ کے

$ر' = ر'' + ط$ اور $لا' = لا'' + ص$ جو فقرہ (۵۴) سے حاصل ہوتی ہین اور
اس تبدیلی سے مساوات $ا'ر'^۲ + س'لا'^۲ + د'ر' + ی'لا' + ف = ۰$
اسکی صورت کی ہوجاوے گی $ا'(ر''+ط)^۲ + د'(ر''+ط) + ی'(لا''+ص)$
$+ف = ۰$ یعنے $ا'ر''^۲ + (۲ا'ط + د')\,ر'' + ی'لا'' + ا'ط^۲ + د'ط + ی'ص$
$+ف = ۰$ چونکہ اس مساوات مین دو مقدارین غیر منقطع ط اور ص ہین

اور اسیواسطے اختیار ہی کہ دو یا تین ان مقداروں کی فرض کرین پس فرض کرو کہ انکی قیمتین ایسی ہین کہ امثال ل ی اور مقدار مقررہ علحدہ علحدہ مساوی صفر کے ہوجاوین یعنی فرض کرو کہ ۲ اَطَ + دَ = ۰ اور اَطَ۲ + دَ طَ + یَ صَ + فَ = ۰ یہانسی معلوم ہوا کہ طَ = − دَ/۲اَ اور صَ = (دَ۲ − ۴اَفَ)/۴اَیَ

پس اب تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوگی اَ یَ۲ + یَ لَ = ۰ اور یہہ ظاہر ہی کہ اگر بَ مثبت ہوتی تو یہہ مساوات حاصل ہوتی سَ لَ۲ + دَ یَ + یَ لَ + فَ = ۰ اور اس سے اخیر مرتبہ کی تحویل کی ہوئی مساوات یہہ ہوئی سَ لَ۲ + دَ یَ = ۰ اور اسکی قیمتین طَ اور صَ ان مساواتوں سے معلوم ہوجاتی ہین صَ = − یَ/۲سَ اور طَ = (یَ۲ − ۴سَ فَ)/۴سَ دَ

(۹۵) شکلوں آیندہ سے تمام تبدیلیاں مقام خط منحنی کے کہ اونکی مطابق تبدیلیاں جبریہ مساوات مین واقع ہوئی ہین معلوم ہوتی ہین

(۳) (۲) (۱)

شکل (۱) مین خط منحنی محوروں ا لَ اور ا یَ سے متعلق ہی اور اس صورت مین مساوات یہہ ہے اَ یَ۲ + بَ لَ یَ + سَ لَ۲ + یَ لَ + دَ یَ + فَ = ۰

شکل (۲) مین اصلی محوروں کو ا یَ اور ا لَ سے تبدیل کیا ہے اور زاویہ ...

لا ۲ لا اس مساوات سی معلوم ہوتا ہی مس ۲ ار = ت ب / ا — س اور موافق
اس تبدیل کی مساوات عام اس صورت کی ہو جاتی ہی بشرطیکہ ب منفی ہو
ا ی۲ + د ی + ی لا + ف = ۰ اگر ب مثبت ہو تو خط منحنی شروع مین
اس مقام پر واقع ہوگا کہ اوسکی نئی محور اصلی محورون پر عمود ہوتے جائین اور
اس صورت مین مساوات بعد تبدیل کی یہہ ہوتی ہی س لا۲ + د ی + ی لا
+ ف = ۰ شکل (۳) مین نقطہ شروع ا سی ا بر بدلا گیا ہی اور
اوتار ا کے محورون ا لا اور ا ی بر شمار کئی جاتے ہین اور انکی قیمت مساوات
آیندہ سی معلوم ہوتی ہی اگر ب منفی ہو تو ط = — د / ۲ ا اور
ص = د۲ — ۴ ا ف / ۴ ا ی جوقت ب مثبت ہو اوسوقت ص = — ی / ۲ س
اور ط = ی۲ — ۴ س ف / ۴ س د پس جوقت ب منفی ہو اوسوقت مساوات
بعد تحویل کے یہہ رہیگی ا ی۲ + ی لا = ۰ اور جوقت ب مثبت ہو اوسوقت
مساوات یہہ ہوگی س لا۲ + د ی = ۰

(۹۶) اگر اصلی محور ترچھی ہون تو تبدیل مساوات عامہ کی بوسیلہ صورتون
مندرجہ فقرہ (۵۵) کے ہوسکتے ہیں قیمتین ا س ب کے بعینہ ویسی ہی
حاصل ہونگی جو فقرہ (۸۷) مین حاصل ہوئی ہین اوس صورت مین فرض
کر سکتے ہین کہ ب = ۰ اور قیمت مس ۲ ار کی بہی معلوم کر سکتے ہین جبکہ محور
متقاطع علی القوایم ہون اور موافق فقرہ (۸۷) کی یہہ بہی معلوم ہو سکتا ہی
کہ نقطہ ایک ہی مجموعہ ایسی محورون کا ہی جو قوت ترکے جز لا ی کو زایل کرلی

اور ی' = (د − ی جم ژ) √۲ − ب جم ژ + س جم ۲ ژ + ی √س جس ۲ ژ ÷ جس ژ √۲ − ب جم ژ + س اور اب مساوات

تحویل کی ہوئی یہہ ہوگی س' لا'۲ + د' ی' + ی' لا' + ف = ۰ اس مساوات کی

تحویل زیادہ ہو سکتی ہی موافق فقرہ (۹۴) کے اور جسوقت اوس زاویہ کو جو

محوروں کی درمیان مین واقع ہی حادہ فرض کرین تو اوسوقت شکلون مندرجہ

فقرہ (۹۵) سی تبدیلی مقام خط منحنی کی معلوم ہو جاویگی —

(۹۸) قبل از تمام کرنے اس باب کے چند مثالین اون صورتون کی ہم بیان کرینگے

جنکا حال ابہی لکہہ چکی ہین مثال (۱) ی۲ − ۶ لا ی + ۹ لا۲ + ۱۰ ی + ۱ = ۰

اسکا لوکس قریب البیضوی ہی اور مس ۲ ر = − ب ÷ ۱ − س = − ۳ ÷ ۴ اور ∴ قیمتیں ر کے

فہرست مقادیر مثلثی دریافت ہو سکتی ہی اور ظاہر ہی کہ ب منفی ہی ∴ موافق

فقرہ (۹۴) کے ا' = ۱ + س = ۱۰ اور س' = ۰ اور د' = √۱۰

اور ی' = ۳ √۱۰ ∴ ۱۰ ی'۲ + √۱۰ ی' + ۳ √۱۰ لا' + ۱ = ۰ اور موافق

فقرہ (۹۴) کی ط = − د' ÷ ۲ ا' = − ۱ ÷ ۲ √۱۰ پس اخیر مساوات یہہ ہوگی ی''۲ + ۳ ÷ √۱۰ لا''

= ۰ مثال (۲) ی۲ + ۲ لا ی + لا۲ + ی − ۳ لا + ۱ = ۰ اس سی

قریب البیضوی متعلق ہی اور اخیر مرتبہ کی تحویل کے ہوئی مساوات یہہ ہی

لا'۲ + √۲ ی' = ۰ مثال (۳) √ی + √لا = √د یہہ مساوات اسطرح

لکہی جا سکتی ہی لا + ی − د = ۲ √لا ی اور اسطرح بہی تحویل ہو سکتی ہی

ی۲ − ۲ لا ی + لا۲ − ۲ د ی − ۲ د لا − د۲ = ۰ لوکس اسکا قریب البیضوی سے

اسواسطے کہ اسمین شرایط اوسکے پائی جاتی ہین اگر موافق فقرہ (۸۷) کی اس

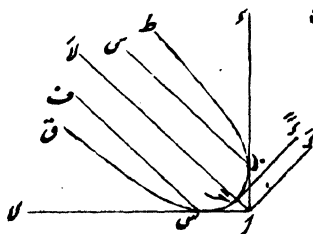
خط منحنی کو کھینچیں تو دریافت ہوگا کہ اوسکا مقام ط ب س ق ہی اور مساواتین

ر = لا ± د وہی مساواتین ہین جو متعلق

قطرون ب ی اور س ف کی ہین ا لا َ

اور ا ر َ نئی محور ہین اور زاویہ ر یعنے ر َ

لا ا لا َ = ۴۵° اور ا َ = ۶ اور د َ = ۰

اور ی َ = − ۶ د ۲√ اور ط = ۰ اور ص = ۲√ د/۲ طَ اور ص کو نئی محورون

پر شمار کرنا چاہئے اور ∴ فرض کرو کہ ا ا َ = ۲√ د/۲ اور ا َ نیا نقطہ شروع ہی

اور اخیر مساوات یہہ ہی ر َ۲ = دلا ۲√ مثال (۴) ر = د + ی لا + ف لا۲

تو کس اسکا قریب البیضوی ہے کیونکہ ب۲ − ۴ ا س یا ۰ − ۴ × ۰ × ف = ۰

فرض کرو کہ ر = ر َ + ط اور لا = لا َ + ص ∴ ر َ + ط = د + ی (لا َ + ص)

+ ف (لا َ + ص)۲ ∴ ف لا َ۲ + (۲ ص ف + ی) لا َ − ر َ + ف ص۲ + ی ص + د − ط

= ۰ فرض کرو کہ ۲ ص ف + ی = ۰ اور ف ص۲ + ی ص + د − ط = ۰

∴ ص = − ی/۲ ف اور ط = (۴ د ف − ی۲)/۴ ف اور اب صورت مساوات کی یہہ

ہوجاویگی ف لا َ۲ − ر َ = ۰ (۹۹) جبکہ محور ترچھی ہوان اور

ر۲ − ۲ لا ر + لا۲ − ۶ ل = ۰ اور اگر زاویہ محورون کے درمیان مین ۹۰° کا فرض

کیا جاوے تو س جس ۲ ر − ب جس ر کہ مثبت ہوگا اور جس ر = جس ۹۰°/۲√ =

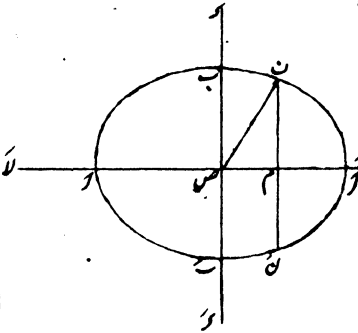
۱/۲ ∴ ر = ۳۰° اور م = ۳ اور ر َ = ۴ اور س َ = ۰ اور د َ = ۶

اور ی َ = − ۲√۳ اور ص = − ۳√۳/۲ اور ط = − ۳/۴ ∴

$۲ ی^۲ - ۲ ما \text{ } لا = ۰$

باب ہشتم

بیضوی کے بیان مین

(۱۰۰) مساوات عام درجہ دویم کی بحث مین ثابت ہوا ہی کہ اگر مرکز نقطۂ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا فرض کیا جاوے تو مساوات بیضوی کی یہہ ہوتی ہی $\left(-\frac{ا}{ف}\right) ی^۲ + \left(-\frac{س}{ف}\right) لا^۲ = ۱$ یا $ن ی^۲ + ق لا^۲ = ۱$
جسمین امثال ن اور ق مقادیر مثبت ہین ہم اب نکالینگے بوسیلہ اس مساوات کی مختلف شکلین بیضوی کی اب تاکہ اچھی طرح امثال اس مساوات کی دریافت ہوسکین فرض کرو کہ ص مرکز بیضوی کا ہی اور لالاَ اور ی یَ محور متقاطع علی القوایم نقطہ ص پر ہین اور فرض کرو کہ صام = لا اور م ن = ی اب ظاہر ہے کہ جہان محور خط منحنی سی تقاطع کرتے ہین وہان

$$\left.\begin{array}{l} ی = ۰ \quad \therefore \quad ق لا^۲ = ۱ \quad \therefore \quad لا = \pm \frac{۱}{\sqrt{ق}} \\ اور\ لا = ۰ \quad \therefore \quad ن ی^۲ = ۱ \quad \therefore \quad ی = \pm \frac{۱}{\sqrt{ن}} \end{array}\right.$$

قطع کرو محور لالاَ پر اص $= \frac{۱}{\sqrt{ق}}$ اور صاَ $= -\frac{۱}{\sqrt{ق}}$ اسیطرحسی لو محور ی یَ پر صب $= \frac{۱}{\sqrt{ن}}$ اور صبَ $= -\frac{۱}{\sqrt{ن}}$ اس صورت مین یہہ خطِ

منحنی کا انتاہی محور ذنکو نقطون آ آ' اور ب ب' پر اب اگر فرض کیا جاوے ص ا = ط

اور ص ب = ص اور ط بڑا ہو ص کے تو ق = $\frac{1}{ط^2}$ اور ن = $\frac{1}{ص^2}$

اسیواسطی مساوات اس خط منحنی کے یہہ ہوگی $\frac{ی^2}{ص^2} + \frac{لا^2}{ط^2} = 1$ یا $ط^2 ی^2$

$+ ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ ∴ $ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2} (ط^2 - لا^2)$

(۱۰۱) ہمنی ابہی (۷۶) مین ثابت کیا ہی کہ خط منحنی محدود ہی ہر ایک طرف سی اور نقطی آ آ' اور ب ب' ان حدود پر واقع ہین اور مساوات گذشتہ حاصل ہونگی یہہ مساواتین $ی = \pm \frac{ص}{ط} \sqrt{ط^2 - لا^2}$ (۱) اور $لا = \pm \frac{ط}{ص} \sqrt{ص^2 - ی^2}$ (۲) مساوات (۱) سی معلوم ہوتا ہی کہ اگر لا بڑا ہو ± ط سے تو ی غیر ممکن ہوگا اور اسیطرح (۲) سی معلوم ہوتا ہے کہ اگر ی برابر ہو ± ص سی تو لا بہی غیر ممکن ہو جاویگا یہانسی معلوم ہوا کہ اگر خطوط مستقیم کہیچے جاوین درمیان نقطون آ اور آ' اور ب ب' کی تو وہ بالکل گہیرینگے خط منحنی کو ۔ یہہ بہی مساوات (۱) سی معلوم ہوتا ہے کہ واسطے ہر ایک قیمت لا کی جو کہ کم ہی ط سی دو قیمتین ی کی حاصل ہونگی یعنے واسطے کسی وتر ص م کی جو کہ کم ص آ سے ہی حاصل ہونگی دو قیمتین مساوے وتر العرض م ن اور م ن' کے اور علامت ± کی دریافت ہوتا ہی کہ سمتین انکی مقابل ایک دوسری کے ہین اور یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ جتنا لا بڑہتا ہی ۰ سی ط تک اوتنی ہی قیمتین ی کی گہٹتی ہین ± ص سے ۰ تک یہانسے ہمین حاصل ہونگی دو برابر قوسین ب ن آ' اور ب' ن' آ' بالکل مشابہ

اور مقابل ایک دوسرے کی آب اگر لا ہو منفی اور گھٹنا شروع کریں سی ط تک تو لا منبت ہوگا اور ویسی قیمتین ر کی نکلین گی جیسی ابھی نکالی ہین یہان سے معلوم ہوا کہ دو اور قوسین ب ر اور ب ا مقابل اور مساوی ایک دوسری کی ہین اسیواسطے معلوم ہوا کہ خط منحنی کو محور لا دو حصون برابر تقسیم کرتا ہی - اسیطرحسی مساوات (۲) سے معلوم ہوتا ہی کہ محور ر بھی خط منحنی کو دو حصون برابر مین تقسیم کرتا ہی اور اسی سبب سے اس خط منحنی کو متناسب اون محورون کا کہتے ہین - اس خط منحنی کا جوف بھی طرف مرکز کی ہوتا چاہئے نہین تو ایک خط مستقیم قطع کریگا اس خط منحنی کو دو سی زیادہ نقطون پر جو کہ ناممکن ہی موافق (۱۰۷) کے —

(۱۰۲) مساوات $ر^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲}(ط^۲ - لا^۲)$ سی حاصل ہوتا ہی یہہ

$$ص ن = لا^۲ + ر^۲ = لا^۲ + \frac{ص^۲}{ط^۲}(ط^۲ - لا^۲) = ص^۲ + \frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲} لا^۲$$

یہانسی معلوم ہوا کہ ص ن نہایت بڑا ہو سکتا ہی جبکہ لا نہایت بڑا ہو — یعنی جبکہ لا = ط تو اس صورتمین ص ن بھی برابر ط کی ثابت ہوگا - مساوات گذشتہ سی یہانسی معلوم ہوا کہ خطوط ص ا اور ص ا نہایت بڑی خط ہین تمام اون خطوطون سے جو کہ کھینچی جاوین مرکز سے محیط تک اس خط منحنی کی اور ص ن نہایت کم ہوگا جبکہ لا = ۰ ∴ ص ن برابر ہو جاویگا ص کے یہانسی دریافت ہوا کہ ص ب اور ص ب نہایت چھوٹا ہی اون خطوطون سے جو کہ کھینچی جا سکتے ہین مرکز سی محیط تک یعنی محور ا ا نہایت بڑا اور ب ب نہایت چھوٹا اون خطوطون سے ہی جو کہ کھینچی جا سکتے ہین مرکز سے گذرتی ہوئی محیط تک ا ا کو محور کلان کہتے ہین

اور ب بَ کو محور خورد —

(۱۰۳) نقطے آ اور بَ اور آَ بَ راس محوروں کی کہلاتی ہین کوئی نقطہ انمین سے نقطہ شروع فرض کیا سکتا ہی مثلاً فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ہی اور آص محور لا کا اور مان لو کہ محور ی کا متوازی ص ب کی ہی اور ا م = لاَ

∴ لا = ص م = ا م − ا ص = لاَ − ط ۔ بسبب اسکی ی۲ = ص۲/ط۲ (ط۲ − لاَ۲)

= ص۲/ط۲ (ط۲ − (لا۲ − ط۲)۲) = ص۲/ط۲ (۲ ط لاَ − لاَ۲) اور بعد دور کرنے علامت کی ی۲ = ص۲/ط۲ (۲ ط لا − لا۲) = ص۲/ط۲ لا (۲ ط − لا) ۔ بوسیلہ اس مساوات کی تناسب ہندسی حاصل ہوگا اور وہ یہہ ہی

مربع م ن : سطح ا م اور م اَ :: مربع ب ص : مربع ا ط یا

م ن۲ : ا م × ا مَ :: ب ص۲ : ا ط۲ یہاںسی ثابت ہوتا ہی کہ مربع نصف وتر کا گھٹتا بڑہتا ہی موافق سطح دو حصون محور کلان کے اگر ص نقطہ شروع فرض کیا جاوے اور ص اَ محور ی کا اور ص ب محور لا تب مساوات موافق اس فرض کے یہہ ہوگی ی۲ = ط۲/ص۲ (ص۲ − لا۲) جبکہ لکھین ہم مساوات گذشتہ مین لا بجای ی اور ی بجای لا کی اور اگر نقطہ شروع فرض کیا جاوے نقطہ بَ کا تو ی۲ = ط۲/ص۲ (۲ ص لا − لا۲)

(۱۰۴) اگر محور کلان اور محور خورد کو برابر فرض کرین تو اس صورت مین مساوات بیضوی کی یہہ ہو جاویگی ی۲ = ط۲ − لا۲ اور یہہ مساوات دایرہ کی ہی جسکا قطر برابر ۲ ط کے ہی یہاںسی ثابت ہوا کہ دایرہ بہی ایک خاص بیضوی ہی چنانچہ

(۷۹) مین ثابت ہوا ہی فرض کرو کہ ا د ن ا َ ایک دایرہ ہی جسکا قطر ا ا َ ہی اور م ق یا ی ز ایک وتر العرض موافق وتر ص م یا لا کی ہی اور فرض کرو کہ م ن (= ی) وتر العرض ایک بیضوی کا ہی اس صورت مین ز ۲ = ط ۲ − لا ۲ اور ی ۲ = ص ۲/ط ۲ (ط ۲ − لا ۲)

∴ ی ۲ = ص ۲/ط ۲ ز ۲ یا ی = ص/ط ز ∴ ی : ز :: ص : ط یہان سی ثابت ہوتا ہی کہ وتر بیضوی اور اسی مقام کی وتر دایرہ مین ایک نسبت مقررہ موافق محور خورد اور کلان کے ہی چونکہ ص چھوٹا ہی ط سی ایسا کہ ہر ایک نقطہ دایرہ کا واقع ہوگا باہر بیضوی کے سوا دو نقطون ا اور ا َ کے جہان کہ یہہ دونون خط منحنی ملتے ہین اب اگر ایک دایرہ کھینچا جاوے محور خورد پر تو اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہی کہ ہر ایک نقطہ دایرہ کا واقع ہی اندر بیضوی کے سوا دو نقطون ب اور ب َ کی یہان سی معلوم ہوا کہ خط منحنی بیضوی کا واقع ہی درمیان دو محیط دایرون کے

د ق ب ن ا ص ا َ

✣ نقطۂ آتشی کے بیان مین ✣

(۱۰۵) مساوات ی ۲ = ص ۲/ط ۲ (۲ ط لا − لا ۲) لکھی جا سکتی ہی اس طور پر ی ۲ = ل لا − ل/۲ط لا ۲ اگر ل = ۲ص ۲/ط کی فرض کیا جاوے اور ل (= ۲ص ۲/ط) کو وتر آتشی اعظم کہتی ہین — چونکہ ل = ۲ص ۲/ط = ۴ص ۲/۲ط ∴

ل : ۲ص :: ۲ص : ۲ط یہہ ایک شکل ہی جو کہ بیضوی مین ثابت ہو چکی ہی

(۱۰۶) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ محور کلان پر جس سی اگر ایک وتر العرض کھینچا جاوے تو دوگنا اسکا برابر ہو وتر آتشی اعظم کے یہان ۴ی ۲ = ل ۲ یا

$\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ (ط² - لا²) = $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ ∴ ط² - لا² = ص² یعنی لا² = ط² - ص²

اور لا = ± $\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}$

نقطہ ب کو مرکز فرض کر کے

اور ط کو نصف قطر کھینچو

ایک دایرہ کاٹتا ہوا محور کلان کو اوپر دو نقطوں ہ اور س کے تب

ص ہ = $\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}$ اور ص س = − $\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}$ اسطور پر س اور ہ

ایسی نقطے دریافت ہوئی ہین کہ اگر کسی ایک نقطہ پر ایک دو نقاط مین سے ایک وتر عرض

مثل ل س لَ کے کھیچا جاوے تو وہ برابر ہوگا وتر آتشی اعظم کو اب اس خط کو

وتر آتشی اعظم کہا کرین گے اور نقاط س اور ہ کو فوکس یا نقاط آتشی اور وجہ تسمیہ

اسکی آگی بیان کیجاویگی ۔

(۱۰۷) کسر $\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}$ کو جو کہ تعبیر کرتی ہے نسبت ص س کی طرف ص ا

کے خارج المرکز کہتے ہین کیونکہ فرق اس خط منحنی کا دایرہ سے موقوف اسی کسر پر ہے

اگر خارج المرکز جو کہ عدد ایک سی کمتی ہی فرض کیا جاوے برابر ی کے تو $\frac{\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}}{\text{ط}}$

= ی یعنی ی² = $\frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ = ۱ − $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ ∴ $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ = ۱ − ی²

جس وقت لکھی جاوے یہہ قیمت $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ کی مساوات بیضوی مین تو ر² = (۱ − ی²) (ط² − لا²)

(۱۰۸) قیمت خارج المرکز کے اوپر سی دریافت ہوئی برابر ط ی کے لیکن

بعض اوقات خارج المرکز کو برابر س کی بھی لکھتے ہین اور چونکہ ط² − ص² = ط² ی²

اسیواسطے ص² = ط² − ط² × ی² = (ط − ط ی) (ط + ط ی) یہان سے

دریافت ہوا کہ سطح ا س اور اَ س = مربع کی جو کہ کھینچا جاوے اوپر ب ص کے

(۱۰۹) دریافت کرو فاصلہ فوکس سے کسی نقطہ نَ بیضوی کا فرض کرو کہ

س ن = نق اور ہ ن = نقَ ∴ نق^۲ = (ء − ءَ)^۲ + (لا − لاَ)^۲ ...(۲۹)

چونکہ ءَ لاَ وتر سَ کی ہین ∴ ءَ = ۰ اور لاَ = − ط ی ∴

نق^۲ = ءَ^۲ + (لا + ط ی)^۲ = (۱ − ی^۲)(ط^۲ − لا^۲) + (لا + ط ی)^۲

= ط^۲ − لا^۲ − ی^۲ط^۲ + ی^۲لا^۲ + لا^۲ + ۲ ط ی لا + ط^۲ی^۲

= ط^۲ + ۲ ط ی لا + ی^۲لا^۲ = (ط + ی لا)^۲ ∴ س ن = ط + ی لا

اسی طور سے ثابت ہو سکتا ہی کہ ہ ن = ط − ی لا تمام سوالون مین جو کہ صرف مقدارون سَ نَ اور ہ نَ سی متعلق ہین علامت لاَ کی وہ لکھنی چاہئی جو کہ اسکی ذاتی ہی مثلاً اگر نَ ہو درمیان بَ اور آ کے تو قیمت مطلق سَ نَ کے ط − ی لا ہی کیونکہ لاَ خود نفی ہی — جمع کرنی قیمتون سَ نَ اور ہ نَ سی حاصل ہوگی یہہ مساوات س ن + ہ ن = ۲ط = اَاَ یعنی فاصلہ کسی نقطہ بیضوی کا نقاط آتشی سے مساوی ہی محور کلان کے یہہ خاصیت بیضوی کی مشابہ ہی اوس خاصیت دایرہ کی سی جہانکہ فاصلہ مرکز کا محیط سے ہمیشہ ایک مقدار مقررہ کی برابر ہوتا ہی —

(۱۱۰) چونکہ یہہ خاصیت بیضوی کی بہت فایدہ مند ہی اسواسطی ہم اسکو برعکس طور پر بھی ثابت کرینگی یعنی دریافت کرو لوکس ایک نقطہ نَ کا جسکا فاصلہ دو نقطون آتشی سَ اور ہَ سے برابر ایک مقدار مقررہ کی ہے یا مساوی ہے

2ط کی فرض کرو کہ س ہ $= 2\text{ص}$ اور تنصیف کرو س ہ کو نقطہ ص پر اور
اسی نقطہ کو نقطہ شروع ہی محوروں متقاطع علی القوایم ص ا' اور ص ب کا
فرض کرو اور مان لو کہ ص م = لا اور ن م = ی $\therefore$ س ن $= \sqrt{(\text{ص}+\text{لا})^2+\text{ی}^2}$
اور ہ ن $= \sqrt{(\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2}$ لیکن س ن + ہ ن $= 2\text{ط}$ یا
س ن $= 2\text{ط} -$ ہ ن $\therefore \sqrt{(\text{ص}+\text{لا})^2+\text{ی}^2} = 2\text{ط} - \sqrt{(\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2}$
مجذور کرو دونوں طرفوں مساوات کو $\therefore (\text{ص}+\text{لا})^2+\text{ی}^2 = 4\text{ط}^2$
$- 4\text{ط}\sqrt{(\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2} + (\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2 \therefore (\text{ص}+\text{لا})^2 - (\text{ص}-\text{لا})^2 = 4\text{ص}\,\text{لا} =$
$4\text{ط}^2 - 4\text{ط}\sqrt{(\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2}$ یا $\text{ص}\,\text{لا} = \text{ط}^2 - \text{ط}\sqrt{(\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2}$ یعنی
$\text{ط}\sqrt{(\text{ص}-\text{لا})^2+\text{ی}^2} = \text{ط}^2 - \text{ص}\,\text{لا} \therefore \text{ط}^2(\text{ص}-\text{لا})^2 + \text{ط}^2\text{ی}^2 =$
$\text{ط}^4 - 2\text{ط}^2\text{ص}\,\text{لا} + \text{ص}^2\text{لا}^2 \therefore \text{ط}^2\text{ی}^2 = \text{ط}^4 - 2\text{ط}^2\text{ص}\,\text{لا} + \text{ص}^2\text{لا}^2$.
$- \text{ط}^2(\text{ص}^2 - 2\text{ص}\,\text{لا} + \text{لا}^2) = \text{ط}^4 - \text{ط}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^2\text{لا}^2 - \text{ط}^2\text{لا}^2 =$
$(\text{ط}^2-\text{ص}^2)(\text{ط}^2-\text{لا}^2) \therefore \text{ی}^2 = \frac{\text{ط}^2-\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{ط}^2-\text{لا}^2)$ یہاں سے ثابت ہوا
کہ لوکس اسکا بیضوی ہین جسکا محور کلان مساوی 2ط کے ہی اور محور خورد برابر
$2\sqrt{\text{ط}^2-\text{ص}^2}$ اور جسکی نقاط آتشی س اور ہ ہین ۔

مماس کی بیان مین

(۱۱۱) دریافت کرو مساوات مماس کسی نقطہ بیضوی کی ۔ فرض کرو
کہ لا' اور ی' اوتار نقطہ ن کے ہین اور لا'' اور ی'' نقطہ ق کی اوتار ہین ۔
مساوات خط ن ق کی جو کہ ان نقطوں سے گذرتا ہی یہ ہے

اب ظاہر ہی کہ خط کاٹنی والا (۱۴) ...... ی − یَ = (یَ − یً)/(لاَ − لاً) (لا − لاَ)

یا سیکنٹ ن ق ہوجاویگا

خط ط ن ط جبکہ نقطہ

ق منطبق ہوگا نقطہ ن

پر یعنی خط ن ق ہوسکتا ہی مماس ط ن ط جبکہ نقطہ ق منطبق ہو نقطہ ن پر اور

مساوات ن ق کی ہوجاویگی مساوات مماس کے جبکہ لاَ = لاً اور یَ = یً

لیکن اس صورت مین (یَ − یً)/(لاَ − لاً) = ۰/۰ لیکن اسکی قیمت ہم نکالینگے بطور آئندہ کے

چونکہ یَ یً اور لاَ اور لاً دو نقطی اوپر بیضوی کی ہین اسواسطے حاصل ہونگی یہہ

دو مساواتین ط^2 یَ^{2} + ص^2 لاَ^{2} = ط^2 ص^2 اور ط^2 یً^{2} + ص^2 لاً^{2} = ط^2 ص^2

اسواسطے تفریق کرنے سی ط^2 (یَ^{2} − یً^{2}) + ص^2 (لاَ^{2} − لاً^{2}) = ۰ یا

ط^2 (یَ − یً) (یَ + یً) + ص^2 (لاَ − لاً) (لاَ + لاً) = ۰ ∴

(یَ − یً)/(لاَ − لاً) = − ص^2/ط^2 (لاَ + لاً)/(یَ + یً) = − ص^2/ط^2 لاَ/یَ جبکہ لاَ = لاً اور یَ = یً

اسواسطے مساوات مماس کی یہہ ہی ی − یَ = − ص^2/ط^2 لاَ/یَ (لا − لاَ) یعنے

ط^2 ی یَ − ط^2 یَ^{2} = − ص^2 لا لاَ + ص^2 لاَ^{2} ∴ ط^2 ی یَ + ص^2 لا لاَ = ط^2 یَ^{2}

+ ص^2 لاَ^{2} = ط^2 ص^2 شکل مرقومہ بالا مین ص م = لاَ اور م ن = یَ

اور لا اور ی وتر کسی نقطہ مماس ط ن ط کی ہین مساوات مماس کے آسانی سے

یاد رکھی جاسکتی ہی کیونکہ وہ حاصل ہوسکتی ہی مساوات بیضوی سے جو کہ یہہ ہی

ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2 بوسیلہ لکھنی ی یَ بجای ی^2 اور لا لاَ کی بجای لا^2

(۱۱۲) اور یہہ ظاہر ہی کہ خط طن کا مماس ہی کیونکہ ایک خط نہین کاٹ سکتا ہی
خط منحنی کو دو نقطون سے زیادہ پر اور یہان وہ دونو نقطے ایک نقطہ پر منطبق ہوگئے
ہین اور علاوہ اسکے ہم ثابت کرینگے کہ ہر ایک نقطہ ن ط کا سوای ن کی
خارج بیضوی کی ہی — فرض کرو کہ نقطہ ر کی لا اور ی وتر ہین اس صورت
مین اگر ط^{2} ی^{2} + ص^{2} لا^{2} بڑا ہو ط^{2} ص^{2} سی تو نقطہ ر کا باہر خط منحنی کے ہی
واسطی ثبوت اس دعوی کے ملاؤ ایک لمبا خط نقطہ ر اور مرکز بیضوی مین
جو کاٹی بیضوی کو نقطہ ق پر اور فرض کرو کہ لا اور ی وتر نقطہ ق کی ہین
اسیواسطے ط^{2} ی^{2} + ص^{2} لا^{2} بڑا ہی ط^{2} ص^{2} یا ط^{2} ی^{2} + ص^{2} لا^{2} سے اسیواسطی
ص^{2} (لا^{2} − لا^{2}) بڑا ہوگا ط^{2} (ی^{2} − ی^{2}) سی لیکن ص چہوٹا ہی ط اسیواسطے
(لا^{2} − لا^{2}) بڑا ہوگا (ی^{2} − ی^{2}) سی یا (لا^{2} + ی^{2}) بڑا ہوگا (لا^{2} + ی^{2}) سی
اسیواسطی ص ر بڑا ہی ص ق سی (۲۹) یا نقطہ ر کا خارج ہے بیضوی سے
لیکن یہہ دعوی اب ہم ایک عام طور سے ثابت کرینگی — اس صورت مین حاصل
ہونگی یہہ دو مساواتین ط^{2} ی ی + ص^{2} لا لا = ط^{2} ص^{2} ط^{2} ی^{2} + ص^{2} لا^{2} = ط^{2} ص^{2}
دو چند کرکے مساوات اول تفریق کرو مساوات دویم مین سے ∴

ط^{2} ی^{2} − ۲ط^{2} ی ی + ص^{2} لا^{2} − ۲ص^{2} لا لا = − ط^{2} ص^{2} یا ط^{2} (ی − ی)^{2}
+ ص^{2} (لا − لا)^{2} = ط^{2} ی^{2} + ص^{2} لا^{2} − ط^{2} ص^{2} ∴ ط^{2} ی^{2} + ص^{2} لا^{2} =
ط^{2} ص^{2} + ط^{2} (ی − ی)^{2} + ص^{2} (لا − لا)^{2} جو کہ زیادہ ہی ط^{2} ص^{2} لیکن ی اور
لا وتر ہین کسی ایک نقطہ مماس کے اسیواسطے عموماً ہم یہہ کہہ سکتے ہین کہ ہر ایک

نقطہ مماس پر خارج بیضوی سے ہے مگر خاص ایک صورت میں جہانکہ $ی = ی'$ اور $لا = لا'$ یعنی نقطہ ل پر ہمین حاصل ہوگی یہہ مساوات $ط^2 ی'^2 + ص^2 لا'^2 = ط^2 ص^2$ اسیواسطے یہانسی دریافت ہوتا ہی کہ اس خاص نقطہ پر ایک نقطہ مماس کا منطبق ہی ایک نقطہ بیضوی پر — ٭ ٭ ٭ ٭ ٭ ٭

(۱۱۳) اگر راس آ نقطہ شروع ہو تو مساوات بیضوی کی یہہ ہی $ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(2 ط لا - لا^2)$ یا $ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 - 2 ط ص^2 لا = 0$ اور مساوات اسکی مماس کے بطور مرقومہ بالا کے یہہ دریافت ہوگی $ط^2 ی ی' + ص^2 لا لا' - ط ص^2 × (لا + لا') = 0$ اگر مساوات بیضوی کی ہو $ی^2 = م لا - ن لا^2$ تب مساوات مماس کے یہہ ہوگی $ی ی' = \frac{م}{2}(لا + لا') - ن لا لا'$ اگر صورت عام خط منحنی کی ہو یہہ $ط ی^2 + ص لا ی + س لا^2 + د ی + ی لا + ف = 0$ تو صورت عام مماس کے یہہ ہوگی

$$ی - ی' = -\frac{2 س لا' + د ی' + ی}{2 ط ی' + ص لا' + د}(لا - لا') \quad یا$$

$$(2 ط ی' + ص لا' + د) ی + (2 س لا' + ص ی' + ی) لا + د ی' + ی لا' + 2 ف = 0$$

اور فرض کرو کہ $ی = م لا + د$ مساوات مماس بیضوی کی ہو اور چونکہ مساوات مماس بیضوی کی ثابت ہوئی ہی $ط^2 ی ی' + ص^2 لا لا' = ط^2 ص^2$ ∴ $ی = -\frac{ص^2 لا'}{ط^2 ی'} لا + \frac{ص^2}{ی'}$ اسیواسطے مقابلہ کرنے سی اس مساوات کو مساوات $ی = م لا + د$ سی ہمین یہہ حاصل ہوگا $م = -\frac{ص^2 لا'}{ط^2 ی'}$ اور $د = \frac{ص^2}{ی'}$ یا $ی' = \frac{ص^2}{د}$ لیکن مساوات بیضوی کے یہہ ہی $ی'^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا'^2)$ ∴

$\frac{\text{ص}^2}{\text{د}^2} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)$ یا $\frac{\text{ص}^2}{\text{د}^2} = \frac{\text{ط}^2 - \text{لا}^2}{\text{ط}^2} = ۱ - \frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2}$ ∴

$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} = ۱ - \frac{\text{ص}^2}{\text{د}^2}$ ∴ $\text{لا}^2 = \text{ط}^2 - \frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{\text{د}^2}$ جبکہ لکھی ہمنے یہ قیمت

لا^2 کے اس مساوات مین $\text{م}^2 = \frac{\text{ص}^2\text{لا}^2}{\text{ط}^4\text{ر}^2} = \frac{\frac{\text{د}^2\text{ط}^2\text{ص}^4 - \text{ط}^2\text{ص}^6}{\text{د}^2}}{\text{ط}^4\text{ر}^2}$ اور جبکہ

لکھی ہمنے اس مساوات مین $\text{ر}^2 = \frac{\text{ص}^4}{\text{د}^2}$ تو $\text{م}^2 = \frac{\frac{\text{د}^2\text{ط}^2\text{ص}^4 - \text{ط}^2\text{ص}^6}{\text{د}^2}}{\frac{\text{ط}^4\text{ص}^4}{\text{د}^2}} = \frac{\text{د}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2}$

یہانسی ہمین یہہ حاصل ہوتا ہی $\text{م}^2\text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{د}^2$ یہہ تعلق ضرور ہونا چاہئی درمیان امثال مساوات $\text{ر} = \text{م لا} + \text{د}$ جبکہ یہہ فرض کیجاوے مساوات مماس کی

(۱۱۴) دریافت کرد وہ دو نقطی جہانکہ مماس کا تتاہی محوروںکو۔ اس مساواتمین $\text{ط}^2\text{ر ر}' + \text{ص}^2\text{لا لا}' = \text{ط}^2\text{ص}^2$ فرض کرو کہ $\text{ر} = ۰$ ∴ $\text{ص}^2\text{لا لا}' = \text{ط}^2\text{ص}^2$

اور $\text{لا} = \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}'} = \text{ص ط}$ اور اسیطرح سے $\text{ر} = \text{ص ط}' = \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}'}$ یہانسی دریافت

ہوتا ہی کہ سطح ص ط اور ص م = مربع ا ص یا ص ط × ص م = ا ص² اور

سطح ص ط' اور ن م = مربع ب ص یا ص ط' × ن م = ب ص² چونکہ

ص ط (= $\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}'}$) مین ر' نہین پایا جاتا ہی اسیواسطی یہہ مقدار ایک ہی ہی گرد تمام اون بیضویون کے جنکا محور کلان اور ذو الاوتار العرض واسطی نقطہ تماس کے ایک ہی ہین اور چونکہ دایرہ بھی اوپر محور کلان کے ایک قسم کا بیضوی خیال کیا جاسکتا ہی اون تمام بیضویونسے اسیواسطے فاصلہ ص ط ایک ہی ہی واسطی ایک بیضوی اور اوسکی گرد کی دایرہ کی یعنے اوس دایرہ کی جسکا قطر محور کلان بیضوی کا ہی

اور چونکہ ص ط (= $\frac{\text{ط}^2}{\text{لا}'}$) کسیطرح کا تعلق ر' سے نہین رکھتا ہے اسیواسطی

دو مماس دو طرفون ایک وتر کی سے ایک ہی نقطہ پر ملین گے او پر محور کے اور مساوات
اوس مماس کی جو کہ دوسری طرف وتر سی کھیچا جاوے دریافت ہوسکتی ہی جبکہ یَ
کو بجای یً کی لکھین مساوات مماس کی مین (۱۱۱)

(۱۱۵) فاصلہ م ط پای وتر سی اوس نقطہ تک جہانکہ مماس کاٹتا ہی محور لا کو
مماس العرض کہلاتا ہی بیضوی مین م ط = ص ط - ص م = ط²/لاَ - لاَ =
(ط² - لاَ²)/لاَ یہانسی یہہ حاصل ہوگا سطح ص م اور م ط = سطح ا م اور م اَ ث ث ث

(۱۱۶) چونکہ مساوات مماس کے یہہ ہی ط² ی یَ + ص² لا لاَ = ط² ص² فرض کرو
اسمین لاَ = ط ∴ یَ = ۰ ∴ ص² ط لا = ط² ص² اور لا = ط یہانسی
ثابت ہوگا کہ مماس راس محور کلان پر عمود ہی اوس محور پر اور نقطہ ب پر مساوات
مماس کی یہہ ہی ی = ص اسیواسطے بطور سابق کے ثابت ہوسکتا ہی کہ نقطہ
ب پر بہی مماس عمود ہی محور خورد پر - مساوات مماس کے یہہ ہی ط² ی یَ + ص² لا لاَ =
ط² ص² یا ی = - ص² لاَ/ط² یَ لا + ص²/یَ اگر خط ن ص کھیچا جاوے یہان تک کہ
وہ ملی پہر خط بیضوی سے نقطہ نَ پر علامتین وتر دون نَ کی بالکل مختلف وتردون
ن کے سی ہین اسیواسطے امثال - ص² لاَ/ط² یَ ویساہی رہیگا واسطی اوس مماس کے
جو کہ کھیچا جاوے نقطہ نَ سی یا مماس نقاط نَ اور نَ پر متوازی ایک دوسرے
کی ہین .... (۴۳) ث ث ث ث

(۱۱۷) دریافت کرو مساوات اوس مماس کے جو کہ کھیچا جاوے انجام وتر اتشی اعظم سے
عام مساوات مماس کی یہہ ہی ط² ی یَ + ص² لا لاَ = ط² ص² لیکن صورت حال

مین نقطہ لَ پر لاَ = − ط ی

اور یَ = صںَ/ط اسیو اسطی

ط^۲ یَ صںَ/ط − صںَ لاَ ط ی =

ط^۲ صںَ یعنی ی = ط + ی لا

اگر وتر دَ یا م قَ قطع کری بیضوی کو نقطہ نَ پر تو س ن = ط + ی لا ∴ م ن = س ن

(۱۱۸) دریافت کرو وہ نقطہ جہانکہ یہہ خاص مماس کاٹتا ہی محور کو — فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا = ص ط = − ط/ی نقطہ طَ سی کہیچو خط ط ر کا عمود خط ا ص پر اور نقطہ نَ سی کہیچو خط نَ ر کا متوازی ا ص کے تب صرف مطلق قیمتین ص م اور ص ط کی لکھنی سی ہمین یہہ حاصل ہوگا ن ر = م ط = ص ط + ص م = ط/ی + لا = (ط + ی لا)/ی = ۱/ی س ن اسیو اسطی فاصلہ کسی نقطہ نَ کا س سے اور خط طَ ر سی آپسمین وہی نسبت رکھتی ہین :: ی : ا اس خط ط ر کو خط بنیادی کہتے ہین کیونکہ مقام اس خط کا اور فوکس کا جانکر ایک بیضوی کسی قدر خارج المرکز کا کہیچا جاسکتا ہی اور ترکیب اسکی بیان کیجاویگی کسی ایک صفحہ آیندہ مین —

اگر لا = ۰ تو ہمین یہہ حاصل ہوگا ی = ط اسیو اسطی مماس انجام مین وتر آتشی اعظم کے کاٹتا ہی محور دَ کو اس نقطہ پر جہان یہہ محور ملتا ہی گرد کہیچی گئے دایرہ سے کہیچو قَ م کو یہانتک کہ وہ قطع کری بیضوی کو نقطہ نَ پر تو

ق ن × ق نَ = س م^۲ ∴ ∴ ∴ (۱۱۹) دریافت کرو طول اوس عمود کا جوکہ کہیچا جاوے نقطہ آتشی سے اوپر مماس کے — فرض کرو کہ س ی اور ہ ر

$ط^2 ی'^2 + ص^2 لا'^2 = ط^2 ص^2$ .... (۱) اور مساوات مماس کی نقطہ لا' پر

یہہ ہیگی $ط^2 ی ی' + ص^2 لا لا' = ط^2 ص^2$ .... (۲) اور مساوات عمود سی ی کی

(جسکے وتر – ن اور ۰ ہین) یہہ ہی $ی = ح (لا + ن)$ اور یہہ خط ہوگی

عمود مماس پر ہی اسیواسطے $ح = \frac{ط^2 ی'}{ص^2 لا'}$ ...... (۳) اب مساوات عمود سی ی کی

یہہ ہوگی $ی = \frac{ط^2 ی'}{ص^2 لا'} (لا + ن)$ ...... (۴) اگر ہم دور کرین ی' اور لا'

کو بوسیلہ مساوات (۱) اور (۲) اور (۳) کی تو حاصل ہوگی ہمین ایک

ایسی مساوات جسمین لا' اور ی' پائی جاوین گی لیکن اس دور کرنی مین لا' اور

ی' ایک ہی فرض کی گئی ہین مساوات (۲) اور (۳) مین اسیواسطے جو مساوات کہ

بعد اس عمل کی پیدا ہوگی وہ مساوات انکی نقطہ تقاطع کی ہوگی یعنی لوکس انکی نقطہ تقاطع کی ہوگی

مساوات (۴) سی $\frac{ی'}{لا'} = \frac{ص^2}{ط^2} \cdot \frac{ی}{لا + ن} = \frac{ص^2}{لا' ی} - \frac{ص^2 لا}{ط^2}$ مساوات (۲) سے

حاصل ہوگا اسیواسطی $\frac{1}{لا'} = \frac{ی^2 + لا (لا + ن)}{ط^2 (لا + ن)}$ ∴ $لا' = \frac{ط^2 (لا + ن)}{ی^2 + لا (لا + ن)}$

اور مساوات (۴) سی $ی' = \frac{ص^2 ی لا'}{ط^2 (لا + ن)} = \frac{ص^2 ی}{ی^2 + لا (لا + ن)}$ بوسیلہ لکھنی

قیمت لا' کے جبکہ درج کی ہین یہی قیمتین لا' اور ی' کی مساوات (۱) مین تو یہہ حاصل ہوگا

$$ط^2 ص^4 ی^2 + ص^2 ط^4 (لا + ن)^2 = ط^2 ص^2 \left\{ ی^2 + لا (لا + ن) \right\}^2$$

$$\therefore ص^2 ی^2 + ط^2 (لا + ن)^2 = \left\{ ی^2 + لا (لا + ن) \right\}^2$$ لیکن $ص^2 =$

$(ط^2 - ن^2)$ $\therefore ط^2 ی^2 - ن^2 ی^2 + ط^2 (لا + ن)^2 = ی^4 + ۲ لا (لا + ن) ی^2$

$+ لا^2 (لا + ن)^2$ $\therefore ط^2 \left(ی^2 + (لا + ن)^2 \right) = ی^4 + ی^2 \left(۲ لا (لا + ن) + ن^2 \right)$

$+ لا^2 (لا + ن)^2 = ی^4 + ی^2 لا^2 + ی^2 (لا + ن)^2 + لا^2 (لا + ن)^2 =$

$\text{ی}^2(\text{ی}^2+\text{لا}^2)+(\text{لا}+\text{ن})^2(\text{ی}^2+\text{لا}^2)=(\text{ی}^2+\text{لا}^2)(\text{ی}^2+(\text{لا}+\text{ن})^2)$

جبکہ تقسیم کیا ہمنے دونوں طرف مساوات کو مقدار $(\text{ی}^2+(\text{لا}+\text{ن})^2)$ پر تو یہہ حاصل ہوگا $\text{ط}^2=\text{ی}^2+\text{لا}^2$ جو کہ مساوات ایک دایرہ کی ہی جسکا نصف قطر ط ہی یہاں سی ثابت ہوا کہ لوکس ی کا ایک دایرہ ہی جسکا قطر محور کلان بیضوی کا ہی بوسیلہ مساوات $\overline{\text{ی س}}$ اور مساوات ص ن $(\text{ی}=\frac{\text{لاً}}{\text{یً}}\text{لا})$ کی ہم ثابت کرسکتی ہین کہ یہہ دونو خط $\overline{\text{ص ن}}$ اور $\overline{\text{س ی}}$ ملینگے خط بنیادی پر —

(۱۲۱) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ فاصلہ $\overline{\text{س ن}}$ کا بناتا ہی مماس $\overline{\text{ن ط}}$ سی مساوات مماس کی یہہ ہی $\text{ی}=-\frac{\text{ص}^2\text{لاً}}{\text{ط}^2\text{یً}}\text{لا}+\frac{\text{ص}^2}{\text{یً}}$ اور مساوات خط $\overline{\text{س ن}}$ کی جو کہ گذرتا ہی نقطہ س سی (جسکے وتر $-\text{ن}$ او صفر ہی) اور نقطہ ن سی (جسکی وتر لاً اور یً ہین) یہہ ہوگی $\text{ی}-\text{یً}=\frac{\text{یً}-\text{یً}'}{\text{لاً}-\text{لاً}'}(\text{لا}-\text{لاً})=$ $\frac{\text{یً}}{\text{لاً}+\text{ن}}(\text{لا}-\text{لاً})$ اور مماس $\text{ن ط}=\text{مس}(\text{ن س ص}-\text{ن ط ص})$

$$=\frac{\frac{\text{یً}}{\text{لاً}+\text{ن}}+\frac{\text{ص}^2\text{لاً}}{\text{ط}^2\text{یً}}}{1-\frac{\text{یً}}{\text{لاً}+\text{ن}}\cdot\frac{\text{ص}^2\text{لاً}}{\text{ط}^2\text{یً}}}=\frac{\text{ط}^2\text{یً}^2+\text{ص}^2\text{لاً}^2+\text{ص}^2\text{ن لاً}}{\text{یً}((\text{لاً}+\text{ن})\text{ط}^2-\text{ص}^2\text{لاً})}=$$

$$\frac{\text{ط}^2\text{ص}^2+\text{ص}^2\text{ن لاً}}{\text{یً}((\text{ط}^2-\text{ص}^2)\text{لاً}+\text{ط}^2\text{ن})}=\frac{\text{ص}^2(\text{ط}^2+\text{ن لاً})}{\text{ن یً}(\text{ط}^2+\text{ن لاً})}=\frac{\text{ص}^2}{\text{ن یً}}$$

اگر ہم دریافت کیا چاہین مماس $\overline{\text{ہ ن ط}}$ کا تو ہمین صرف $-\text{ن}$ بجای ن کے پچھلی عمل مین رکھنا چاہیئی اسکی وسیلہ سی ہمین حاصل ہوگا $\text{مس ہ ن ط}=-\frac{\text{ص}^2}{\text{ن یً}}$ اسکی وسیلہ سی دریافت ہوسکتی ہی قیمت $\text{مس ہ ن ر}=\text{مس}(180^\circ-\text{ہ ن ط})=$ $-\text{مس ہ ن ط}=\frac{\text{ص}^2}{\text{ن یً}}$ یہاں سی ثابت ہوا کہ دو زاویہ $\overline{\text{س ن ط}}$ اور $\overline{\text{ہ ن ر}}$

کی برابر ہین یا مماس کسی نقطہ بیضوی کی مساوی زاویہ بناتی ہی فاصلون نقطہ آتشی کی سے یہہ خاصیت روشنی کی ہی یعنی اگر ایک کرن نکلکر نقطہ ہ سی رن ی پر گری اور پہر اوس سے منعکس ہوکر سمت ن س مین گذری تب زاویہ ہ ن ر کا برابر ہوگا زاویہ س ن ی کو لیکن بیضوی مین یہہ دونون زاویہ مساوی ہوتی ہین اب اگر روشنی نقطہ ہ پر رکہی جاوی تو تمام کرن منعکس ہوکر نقطہ س پر آوینگے اسیواسطے نقاط ہ اور س کو نقاط آتشی یا فوکس کہتی ہین یہہ ایک خاصیت مشہور ہی اور اب ہم اسکو ایک اور طور سی ثابت کرینگی — موافق (۱۱۹) کے س ی = ع = ص √(ن ی / ن ی) اور ہ ر = ع = ص √(ن ی / ن ی) ∴

س ی : ہ ر :: ن ق : ن ی :: س ن : ہ ن یہانسی دریافت ہوا کہ دو مثلث س ن ی اور ہ ن ر کی آپسمین مشابہ ہیں اور زاویہ س ن ی کا مساوی ہی زاویہ ہ ن ر کے ✱

(۱۲۲) دریافت کرو طول عمود ص و کا جو کہ کہینچا گیا ہی مرکز سی مماس پر جو بلہ ثابت ہو چکا ہی کہ ع = (ی ا – ا لا – د) / √(ا + ا) یہان ی ا = ۰ اور لا ا = ۰ اور ✱

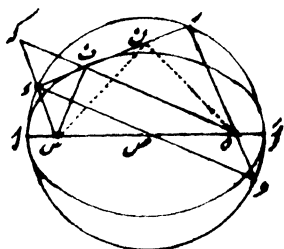
طریقہ آیندہ واسطے کہینچنے مماس بیضوی کی جو کہ بوسیلہ ہندسہ کی ثابت کیا گیا ہی اور واسطے ثابت کرنے اس بات کی کہ لوکس اس عمود کا جو کہ کہینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس پر وہ دایرہ ہی جسکا قطر محور کلان بیضوی کا ہوگا بہت مفید معلوم ہوتا ہی فرض کرو کہ اف اَ بیضوی ہی اور ف ایک نقطہ اسپر واقع ہی ملاؤ س ف اور ہ ف کو اور کہینچکر ہ ف کو ک تک قطع کرو اسمین سے ف ک = ف س تنصیف کرو زاویہ

$$\text{ا} = -\frac{\text{ص}^2\,\text{لا}^2}{\text{ط}^2\,\text{ی}^2} \quad \text{اور} \quad \text{د} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ی}^2} \quad \therefore \text{ص د} = \sqrt{\frac{\frac{\text{ص}^4}{\text{ی}^4}}{\frac{\text{ص}^2\,\text{لا}^2}{\text{ط}^2\,\text{ی}^2}+1}} =$$

$$\sqrt{\frac{\text{ط}^2\,\text{ص}^4}{\text{ط}^2\,\text{ی}^4+\text{ص}^2\,\text{ی}^2\,\text{لا}^2}} = \frac{\text{ط}^2\,\text{ص}^2}{\text{ط ص}\sqrt{\text{ط}^2-\text{ی}^2\,\text{لا}^2}}\ (119) =$$

$$\frac{\text{ط ص}}{\sqrt{(\text{ط}+\text{ی لا})(\text{ط}-\text{ی لا})}} = \frac{\text{ط ص}}{\sqrt{\text{س س}'}}$$

کہ ف س کو خط رف ر سے اور ملاؤ س کہ جو کہ قطع کرتا ہے ف ر کو نقطہ ت پر

(۱) پہلے ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ف ر مماس بیضوی کا ہے کیونکہ اگر کوئی اور نقطہ ن خط ف ر پر ہو تو ظاہر ہے کہ س ن + ن ہ = کہ ن + ن ہ بڑا ہوگا کہ ہ یا ۲ ط سے یہانسے ثابت ہوا کہ ہر ایک نقطہ خط رف ر پر سوای ف کے خارج بیضوی سے ہے

(۲) لوکس نقطہ ر کا وہ دایرہ ہے جو کہ گرد بیضوی کے کھینچا جاوے دریں صورت اس مطلب کے کھینچو ہ ر متوازی س ر کے اور ملاؤ ص ر اب چونکہ مثلث س ف ر کا مساوی مثلث کہ ف ر کے ہے تو زاویہ س رف قایمہ ہوگا یا س ر اور ہ ر عمود مماس پر ہیں چونکہ س ر = کہ ر اور س ص = ص ہ ہے تو ص ر متوازی کہ ہ کے ہوگا اور ص ر = ½ کہ ہ = ½ (س ف + ف ہ) = ص ا

(۳) سطح س ر اور ہ ر = مربع ب ص فرض کرو کہ خط ر ہ دایرہ سے بھی نقطہ و پر ملتا ہے اور ملاؤ ص و اور چونکہ زاویہ ر و قایمہ ہے اور نقاط ر اور و محیط دایرہ پر ہیں تو خط ر ص و خط مستقیم اور قطر دایرہ کا ہوگا یہانسے معلوم ہوا کہ

(۱۲۳) دریافت کرو لوکس نقطہ و کا طاہر ہی کہ

ط۲ ی۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ .... (۱)

اور ط۲ ی یَ + ص۲ لا لاَ = ط۲ ص۲ .... (۲)

اور ی = ط۲ یَ / ص۲ یَ لا .... (۳) یہہ مساوات ص و کی ہی

اگر عمل کرین ہم ان مساواتون پر جیسا کہ فقرہ (۱۲۰) مین کیا تہا بوسیلہ اس عمل کے دور کرکے لاَ اور یَ کو حاصل کرین گی ہم یہہ مساوات

ص۲ ی۲ + ط۲ لا۲ = (ی۲ + لا۲)۲ یہہ مساوات مثلاً ایک بیضوی کی ہی جسکا ذکر آگی کیا جائیگا۔ ٭ ٭ ٭

(۱۲۴) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ خط ص ان بناتا ہے مماس سے مساوات ص ان کی یہہ ہی ی = یَ / لاَ لا اور مساوات مماس ط ان کی یہہ ہی

ی = − ص۲ لاَ / ط۲ یَ لا + ص۲ / یَ مس ص ن ط = مس (ن ص ہ − ن ط ص)

= (مس ن ص ہ − مس ن ط ص) / (۱ + مس ن ص ہ مس ن ط ص) = (یَ / لاَ + ص۲ لاَ / ط۲ یَ) / (۱ − یَ / لاَ · ص۲ لاَ / ط۲ یَ) =

(ط۲ یَ۲ + ص۲ لاَ۲) / (ط۲ لاَ یَ − ص۲ لاَ یَ) = ط۲ ص۲ / لاَ یَ (ط۲ − ص۲) = ط۲ ص۲ / لاَ یَ ن یہان ن تعبیر

ہوا کہ مثلث ص س ی مساوی مثلث ص ہ و کی ہی) اور سطح س ی اور ہ ر =

سطح ر ہ اور ہ و = سطح ا ہ اور اَ ہ = مربع ب ص (۱۰۸)

(۴) فرض کرو کہ س ف = نق اور ہ ف = ۲ ط − س ف = ۲ ط − نق

اور مان لو کہ س ی = ع اور ہ ر = عَ تو عَ۲ = ص۲ نق / (۲ط − نق) کیونکہ بسبب مشابہ ہونی مثلثون کے

س ی : س ف :: ہ ر : ہ ف :: ع = نق / (۲ط − نق) × عَ اور چونکہ اوپر ثابت ہوا کہ ع عَ =

ص۲ :: ع۲ = ص۲ نق / (۲ط − نق)

کرتا ہی خارج المرکز کو

(۱۲۵) مساوات ص و = ص ی جس ص ی و سی ہمین حاصل ہوگا یعنی

ط ص / √(لی لی) = ط جس ص ی و ∴ جس ص ی و = ص / √(لی لی) اور ہ ر = ہ ن جس ہ ن

سی ہمین حاصل ہوگا ص √(لی / لی) = نق جس ہ ن ر ∴ جس ہ ن ر =

ص / √(لی لی) ∴ زاویہ ص ی و = زاویہ ہ ن ر اور یہانسی ثابت ہوا کہ ص ی

متوازی ہی ہ ن کے اب اگر ص ی کھیچا جاوے متوازی مماس ط ن کے جو کہ

ملیگا ہ ن کو نقطہ ی مین تو ن ی = ص ی = ۲ ص ∴ ∴ ∴

عمود مماس کے بیانمین

(۱۲۶) عمود مماس کسی نقطہ خط منحنی کا وہ خط ہی جو کہ کھیچا جاوے نقطہ تماس

سی عمود مماس پر- دریافت کرو مساوات عمود مماس ن گ کی مساوات

اوس خط کی جو کہ گذری نقطہ ن سے (جسکے وتر لا اور ی ہین) یہہ ہی

ی - ی = ا (لا - لا) لیکن یہہ عمود ہی مماس پر جسکی مساوات یہہ ہی ی =

- ص لا / ط ی لا + ص / ی ∴ ا = ط ی / ص لا اسیواسطی مساوات عمود مماس کے یہہ ہوگی

ی - ی = ط ی / ص لا (لا - لا) — (۱۲۷) دریافت کرو وہ نقطی

جہانکہ عمود مماس کاٹتا ہی محور و کو فرض کرو ی = ۰ ∴ - ی = ط ی / ص لا (لا - لا)

∴ لا = لا - ص لا / ط = ط - ص / ط لا = ی لا = ص گ اور اب فرض کرو کہ

لا = ۰ ∴ ی = ی - ط ی / ص = - ط - ص / ص ی = - ط ی / ص ی = ص گ

یہانسی ثابت ہوگا کہ س ک = س ص - ص ک = ط ی - ی لا فاصلہ

فاصلہ م ک پای وتر سے پای عمود مماس تک خط پائین کہلاتا ہی اور قیمت اسکی یہہ ہی لا - لا' = - $\frac{ص^2}{ط^2}$ لا' (۱۲۸) قیمتون نکالی ہوئی م ک اور ص ک اور ص ک' سے یہہ حاصل ہوتا ہی ن ک = $\sqrt{ی^2 + \frac{ص^4}{ط^4} لا'^2}$

= $\sqrt{\frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا'^2) + \frac{ص^4}{ط^4} لا'^2} = \frac{ص}{ط}\sqrt{ط^2 - لا'^2 + \frac{ص^2 لا'^2}{ط^2}}$ =

$\frac{ص}{ط}\sqrt{ط^2 - \frac{ط^2 - ص^2}{ط^2} لا'^2} = \frac{ص}{ط}\sqrt{ط^2 - ی^2 لا'^2} = \frac{ص}{ط}\sqrt{لو لو'}$ اور

اسیطرحسے قیمت ن ک' = $\frac{ط}{ص}\sqrt{لو لو'}$ اسیواسطے سطح ن ک اور ن ک' = لو لو' = سطح س ا اور ه ن اور نہایت بڑی قیمت عمود مماس کی حاصل ہوگی جبکہ لا' = ۰ یہانسے معلوم ہوگا کہ انجام محور خورد نہایت بڑی قیمت عمود مماس = ص اور اسیطرح ثابت ہوگا کہ نہایت کم قیمت عمود مماس کے انجام محور کلان پر = $\frac{ص^2}{ط}$ یا برابر نصف وتر الشی اعظم کے ہی (۱۰۵) اور

س ک' = $\frac{ط ی}{ص}\sqrt{لو لو'}$ کیونکہ س ک' = $\sqrt{ص س^2 + ص ک'^2}$ =

$\sqrt{ط^2 ی^2 + \frac{ط^4 ی^4 ی'^2}{ص^4}} = \sqrt{\frac{ص^4 ط^2 ی^2 + ط^4 ی^4 ی'^2}{ص^4}}$ =

$\frac{ط ی}{ص}\sqrt{ص^2 + ی^2 ط^2 - ی^2 لا'^2} = \frac{ط ی}{ص}\sqrt{ص^2 + ط^2 ی^2 \left(\frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا'^2)\right)}$

= $\frac{ط ی}{ص}\sqrt{ط^2 - ی^2 لا'^2} = \frac{ط ی}{ص}\sqrt{ط^2 - ط^2 ی^2 + ط^2 ی^2 - ی^2 لا'^2}$ =

$\frac{ط ی}{ص}\sqrt{(ط + ی لا)(ط - ی لا)} = \frac{ط ی}{ص}\sqrt{لو لو'}$ اور ک ک' = $\frac{ط ی}{ص}\sqrt{لو لو'}$ کیونکہ

ک ک' = $\sqrt{ص ک^2 + ص ک'^2} = \sqrt{ی^2 لا'^2 + \frac{ط^4 ی^4}{ص^4} ی'^2} = \frac{\sqrt{ی^4 لا'^2 ص^4 + ط^4 ی^4 ی'^2}}{ص^2}$

= $\sqrt{\frac{ی^4 لا'^2 ص^2 (ط^2 - ط^2 ی^2) + ط^4 ی^4 ی'^2}{ص^4}}$ =

$\frac{ط ی^2}{ص}\sqrt{\frac{لا'^2 ص^2 - لا'^2 ص^2 ی^2 + ط^2 ی'^2}{ص^2}}$ =

$$\frac{ط ی^2}{ص} \sqrt{\frac{لاَ^2 ص^2 - لاَ^2 ص^2 ی^2 + ط^2 \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لاَ^2)}{ص^2}} =$$

$$\frac{ط ی^2}{ص} \sqrt{\frac{لاَ^2 ص^2 - لاَ^2 ص^2 ی^2 + ص^2 ط^2 - ص^2 لاَ^2}{ص^2}} =$$

$$\frac{ط ی^2}{ص} \sqrt{\frac{ص^2 ط^2 - لاَ^2 ص^2 ی^2}{ص^2}} = \frac{ط ی^2}{ص} \sqrt{ط^2 - ی لاَ^2} = \frac{ط ی^2}{ص} \sqrt{ی لوَ}$$

یہانسی معلوم ہوا کہ ک کَ = ی × س ک اگر ایک عمود کَ ل کا کہیچا جاوے نقطہ کَ سی س ن یا ہ ن پر تب مثلث ن کَ ل کا مشابہ ہوگا مثلث س ن ر کو اسیواسطی ن ل = ن ک × $\frac{ع}{لی}$ یا = ن ک $\frac{ع}{لی}$ = $\frac{ص^2}{ط}$ = $\frac{1}{2}$ وتر آتشی اعظم — (۱۲۹) چونکہ مماس مساوی زاویہ بناتاہی فاصلون نقطہ آتشی سے اور عمود مماس عمود ہی مماس پر اسیواسطی یہہ بہی مساوی زاویہ بناویگا فاصلون نقطہ آتشی سے لیکن یہہ دعوی بطریق آیندہ کی بہی ثابت ہوسکتاہی

س ک : ہ ک :: س ص − ص ک : ہ ک + ص ک

:: ط ی − ی^2 لاَ : ط ی + ی^2 لاَ

:: ط − ی لاَ : ط + ی لاَ

:: س ن : ہ ن

یہانسی ثابت ہوا کہ س ک : ہ ک :: س ن : ہ ن اسیواسطے بحکم ایک شکل چہٹی مقالہ ۶ اقلیدس کے زاویہ س ن ہ کا، تنصیف کیا گیا ہی خط ن ک سے

قطرون کے بیان مین

(۱۳۰) قطر کی تعریف ہمنی نفرہ (۴۶) مین کی ہی کہ وہ ایک خط ہی جو کہ تنصیف

تنصیف کرتا ہی تمام متوازی وترون کو ہم اب ثابت کرینگے کہ تمام قطر بیضوی
کی خطوط مستقیم ہین اور مرکز بیضوی سے گذرتی ہین لیکن پہلی بات بالکل ظاہری
اور کچھہ ثبوت کی حاجت نہین رکھتی ہی کیونکہ کوئی خط نہین تنصیف کر سکتا ہی متوازی
وترونکو بغیر خود گذرنی کی مرکز پرسی فرض کرو کہ ی = ا لا + د مساوات ایک
وترکی ہی اور مساوات بیضوی کی یہہ ہی ط ی + ص لا = ط ص بدلو نقطہ
شروع نقطہ تنصیف وتر پر جسکی وتر لا ی ہین اگر ہم لکھین ی + ی بجای
ی کی اور لا + لا بجای لا کی تو اس صورت مین مساوات وتر کی یہہ ہوگی
ی + ی = ا (لا + لا) + د اور چونکہ یہہ بھی ظاہر ہی کہ ی = ا لا + د اسواسطے
ی = ا لا اور صورت مساوات بیضوی کی یہہ ہو جاویگی ط (ی + ی) +
ص (لا + لا) = ط ص اب دریافت کرو کہاں وتر کاٹتا ہی خط منحنی کو
واسطے اسکے لکھو ا لا بجای ی کے مساوات گذشتہ مین : ط (ا لا + ی)
+ ص (لا + لا) = ط ص یا (ط ا + ص) لا + ۲ (ط ا ی + ص لا) لا
+ ط ی + ص لا = ط ص لیکن چونکہ نقطہ شروع وتر کی نقطہ تنصیف
پر ہی اسواسطے دو قیمتین لا کی آپسمین برابر ہونی چاہئین اور علامتین ان دونوکی
مختلف یعنی دوسرا جز مساوات گذشتہ کا مساوی صفر کی ہونا چاہئے :
ط ا ی + ص لا = ۰ اسمساوات سی نسبت ی اور لا کی معلوم ہوتی ہی

یہان وتر سی مراد وتر ہندسی ہی اور یہ بعینہ وہ وتر جسکا ذکر پہلی آیا ہی اور واضح ہو کہ یہہ وتر نصف پہلی وتر کا ہوتا ہی ـــ

اور چونکہ ہمین دؔ دخل نہین رکھتا ہی اسیواسطی یہہ ایک ہی ہوگی واسطی کسی وتر
جوکہ متوازی ی = ا لا + د کی ہی یہانسی دریافت ہوا کہ اگر ہم لاؔ اور یؔ کو غیر
منقطع فرض کرین تو مساوات ط^۲ ا یَ + ص لاَ = ۰ مساوات نقاط تنصیف اونکے یوگی یہہ مجھے
یہہ ظاہر ہی کہ یہہ مساوات خط مستقیم کی ہی جو کہ مرکز پرسی گذرتا ہی بر عکس اسکے
کوئی خط مستقیم گذرتا ہوا مرکز پرسی ایک قطر ہی — ٭ ٭ ٭ ٭

(۱۳۱) ایک قطر دوسری قطر کا متجانس اسوقت کہلاتا ہی جبکہ قطر اول تنصیف
کری تمام وترونکو جوکہ متوازی دوسری قطر کی ہون یہانسی ثابت ہوا کہ محور کلان
اور محور خورد متجانس ایک دوسری کے ہین اور مساوات ط^۲ یَ^۲ + ص^۲ لاَ^۲ = ط^۲ ص^۲ کا
مرکز نقطہ شروع ہی اور قطر متجانس متقاطع علی القوایم ہین اگر ایک خط منحنی ایسا ہو
جسکے وتر ترچھی ہین یعنی عمود نہون اور اسکی مساوات مین صرف لاؔ^۲ اور یؔ^۲ پاسی جاوین
اور مقدار مقررہ تو اس صورت مین نئی محور اس خط منحنی کے ہی قطر متجانس ہونگی کیونکہ
واسطے ہر ایک قیمت ایک کی وتر ادر اوتر العرض مین سی دو مساوی اور مختلف علامتون
کی قیمتین دوسری کے حاصل ہوتی ہین اس مساوات کی وسیلہ سی دریافت ہونگے
اور مساواتین جنکی محور ترچھی اور متجانس قطر ہون جبکہ معلوم ہونگی تمام وہ ٹیوں واسطے جنکی مساوات
بیضوی کی یہی رہتی بوقت تبدیل کرنی وتر ونکی فرض کرو کہ مساوات بیضوی کی یہہ ہو
ط^۲ یَ^۲ + ص^۲ لاَ^۲ = ط^۲ ص^۲ اور مساواتین واسطے تبدیل سمت محور دکی یہہ ہین موافق فقرہ
(۵۷) کے یَ = لاَ جیب رَ + یَ جیب رَ اور لاَ = لاَ جم رَ + یَ جم رَ جبکہ لکھی ہمنی یہہ
قیمتین یَ اور لاَ کی مساوات گذشتہ مین تو حاصل ہوگا یہہ

ط^2 (لاَ جس ر + ىَ جس رَ)^2 + ص^2 (لاَ جم ر + ىَ جم رَ)^2 = ط^2 ص^2 یا

(ط^2 (جس رَ)^2 + ص^2 (جم رَ)^2) ىَ^{2} + (ط^2 (جس ر)^2 + ص^2 (جم ر)^2) لاَ^{2}

+ ۲ (ط^2 جس ر جس رَ + ص^2 جم ر جم رَ) لاَ ىَ = ط^2 ص^2 اگر ہم اس مساوات کو

اسطرح تبدیل کیا چاہین کہ اسکے محور اقطار متجانس ہو جاوین تو اسلئی لازم ہی حز

لاَ ىَ کو دور کرین اور چونکہ اس مساوات مین ہمنی دو مقدار غیر مقررہ رَ اور رَ کے

داخل کئی ہین اسیواسطے ہم اشان لاَ ىَ = ۰ کی فرض کر سکتی ہین اب ہمین حاصل

ہوگی یہہ شرط ط^2 جس ر جس رَ + ص^2 جم ر جم رَ = ۰ یعنی مس ر مس رَ =

− ص^2/ط^2 اب اس مساوات کی وسیلہ سی دونو زاویہ رَ اور رَ کی دریافت نہین ہوگی لیکن

دوسری ایک خاص قیمت ایک زاویہ کی فرض کرنی سی دوسری زاویہ کی دریافت ہوگی یہاں سی

معلوم ہوا کہ لانہایت ایسی مساواتین ہو سکتی ہین جنکے محور قطر متجانس ہون

اگر شکل آئندہ مین کہیچین ہم خط ص ن بناتا ہوا ایک زاویہ رَ کا خط ص ر سی اور

ص د بناتا ہوا ایک زاویہ رَ کا (جسکے مماس − ص^2/ط^2 مم ر ہی) ص ا سی تب

ص ن اور ص د قطر متجانس ہین اور چونکہ حاصل ضرب مماسونکا منفی ہی اسیواسطے

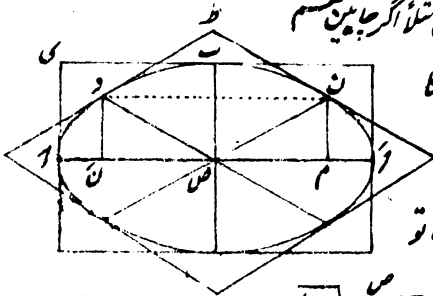
اگر ص ن کہیچین ہم زاویہ ر ص ب مین تو ص د کہینچا چاہئی زاویہ ب ص ر مین

(۱۳۲) اگر ر یا رَ = ۰ کی ہو توامتحان کرنا مساوات مرقومہ بالا کیجہ ضرور نہین

کیونکہ اس صورت مین نئی محور اصلی محور ہوجاوینگی لیکن اب ہم دیکھینگے کہ آیا ادن

بہی محور ہو سکتے ہین یا نہین اسیواسطی فرض کرو کہ رَ = ۹۰ + ر ∴ جس رَ =

جم ر اور جم رَ = − جس ر اب صورت مساوات (۱) کی جس سی شرط رَ اور رَ کی

معلوم ہوتی ہی یہہ ہو جاویگی (ط^2 - ص^2) جس ر جم ر = ۰ اور جونکہ بیضوی
مین ط^2 = ص^2 کے نہین ہو سکتا ہی اسیواسطی مساوات گذشتہ مین فرض کرو
کہ ر = ۰ یا ر = ۹۰ ان دونو قیمتون کے وسطہ سے اصلی محور حاصل ہوتے
یہانسی ثابت ہوا کہ صرف اسی قسم کی اقطار محوری ہو سکتی ہین یہہ بات نمط نق
(۸۷) کی ہی یعنی اگرچہ تبدیلی بالا مین دو مقدارین غیر مقررہ ر اور رَ کے
داخل کیی ہین لیکن ہم دو جز مساوات کی دور نہین کر سکتے الا اوس صورتین جبکہ قیمتین
دو مقدار دیکی ممکن ہون مثلاً اگر چاہین ہم
دور کرنا کسی جز مساوات کا
جیساکہ ان کو کہ دور کیا
یعنی دوسرا جز مساوات کا تو
ہمین حاصل ہوگا یہہ جس ر = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\sqrt{-1}$
یہہ ایک ایسی قیمت ہی جو کہ ناممکن ہی یہانسی ظاہر ہوا کہ لا ی = ۰ یعنی ایک فرضی ممکن اختیار کیا

(۱۳۴) مساوات خط منحنی کے یہہ ہی {ط^2 (جس رَ)^2 + ص^2 (جم رَ)^2} یَ^{2}
+ {ط^2 (جس ر)^2 + ص^2 (جم ر)^2} لاَ^{2} = ط^2 ص^2 اگر ہم فرض کرین یہانپر ار سے
یَ = ۰ اور لاَ = ۰ تو ہمین دریافت ہوگی وہ فاصلہ جو کہ نقطہ شروع سی
اوس نقطہ تک ہی جہانکہ خط منحنی محور کو قطع کرتا ہی اور تعبیر کرو ان فاصلون
کو ط اور ص سے اسی اول مقدارین سے فرض کرو کہ محور لاَ پر شمار کیی
گئی ہی اور دوسری محور یَ پر اب اگر اس عمل کو جاری کرین ہم تو یَ = ۰

کیونکہ مساوات (۳) سے مس ر مس ر' $= \frac{ص^4}{ط^4}$ اسیواسطے $(ط^2-ط_1^2)(ط^2-ص_1^2)$

$$= (ط_1^2-ص_1^2)(ص_1^2-ص^2)\ \text{یا}\ ط^4-ط^2ص_1^2-ط_1^2ط^2+ط_1^2ص_1^2 =$$

$$- ط_1^2ص_1^2 - ط_1^2ص^2 - ص^2ص_1^2 + ص_1^4 \quad \therefore\ ط^4-ص^4 = ط^2ص_1^2$$

$$+ ط_1^2ط^2 - ط_1^2ص^2 - ص^2ص_1^2 = ط^2(ط_1^2+ص_1^2) - ص^2(ط_1^2+ص_1^2) =$$

$$= (ط^2-ص^2)(ط_1^2+ص_1^2) \quad \therefore\ ط^2+ص^2 = ط_1^2+ص_1^2$$

یعنی مجموعہ مربعون کا اقطار متجانس کا برابر ہے مجموعہ مربعونکو جو کہ بنائے جاوین محورون پر یہہ ایک شکل بیضوی کے بہت مشہور ہے ۔

(۱۳۵) اگر ضرب کرین ہم مساوات (۱) کو (۲) سے اور اس حاصل ضرب مین سے تفریق کرد مجذور (۳) مساوات کو تو $ط_1^2ص_1^2\{ط^4(جب\,ر)^2(جب\,ر')^2$

$$+ ص^4(جم\,ر)^2(جم\,ر')^2 + ط^2ص^2(جب\,ر')^2(جم\,ر)^2 + ط^2ص^2(جب\,ر)^2(جم\,ر')^2\}$$

$= ط^4ص^4$ اور مجذور (۳) سے یہہ حاصل ہوتا ہے $ط^4(جب\,ر)^2(جب\,ر')^2$

$+ ص^4(جم\,ر)^2(جم\,ر')^2 + 2ط^2ص^2\,جب\,ر\,جب\,ر'\,جم\,ر\,جم\,ر' = 0$ جبکہ تفریق کیا ہمنے مساوات اول مین سے دویم کو تو $ط_1^2ص_1^2ط^2ص^2\{(جب\,ر')^2(جم\,ر)^2$

$$- 2\,جب\,ر\,جب\,ر'\,جم\,ر\,جم\,ر' + (جب\,ر)^2(جم\,ر')^2\} = ط^4ص^4 \quad \text{یا}$$

$$ط_1^2ص_1^2\{جب\,ر'\,جم\,ر - جب\,ر\,جم\,ر'\}^2 = ط^2ص^2\ \text{یا}\ ط_1^2ص_1^2\{جب\,(ر'-ر)\}^2 =$$

$= ط^2ص^2$ اور جذر لینے سے دونو طرف اس مساوات کی یہہ حاصل ہوتا ہے

$ط_1ص_1\,جب\,(ر'-ر) = ط\,ص$ اب ظاہر ہے کہ $(ر'-ر)$ مساوی زاویہ ن ص د کے ہے جو کہ واقع درمیان قطر متجانس ص ن اور ص د کی ہے اگر ہم کہینچین

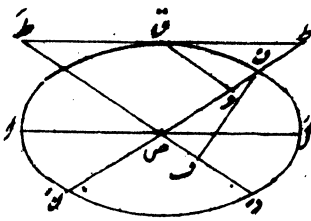
بری تمام اون متوازی الاضلاع سی ہین جو کہ اندر بیضوی کے کھینچی جاوین

(۱۳۶) اگر ہم رجوع کرین فقرہ (۱۳۴) کیطرف اور دور کرین لث نون کو لاَ اور یَ پر سی جنکی اب کچھ ضرورت نہین ہی تو ہمین حاصل ہوگا

ط۲ ی۲ + ص۱۲ لا۲ = ط۲ ص۱۲

اس شکل مین ص ن = ط۱ اور

ص د = ص۱ اور ص و = لا اور

دق = ی رکھو مساوات گذشتہ کو

اس صورت مین $ی^2 = \frac{ص_1^2}{ط_1^2}(ط_1^2 - لا^2) = \frac{ص_1^2}{ط_1^2}(ط_1 - لا)(ط_1 + لا)$

یہاں سی ثابت ہوا کہ مربع اوپر وتر ق د : سطح ن و اور و نَ :: مربع ص د : مربع ص ن ⁂

(۱۳۷) مساوات مماس کسی نقطہ ق کا لاَ اور یَ کی موافق (۱۱۱) کی یہہ ہوگی ط۲ ی یَ + ص۲ لا لاَ = ط۲ ص۲ اور نقاط طَ اور طَ جہانکہ یہہ مماس کاٹتا ہی نئی محورون کو دریافت ہو سکتی موافق (۱۱۴)

ص ط = $\frac{ط^2}{لاَ}$ اور ص طَ = $\frac{ص^2}{یَ}$ اور مماس جو کہ کھینچی جاوین انجامون سی ایک وتر کی ملین گے قطر سے او س وتر کی موافق فقرہ (۱۱۴) سکے ⁂

(۱۳۸) فرض کرو کہ محور بیضوی کے محور متقاطع علی القوایم ہین اور یہہ بھی مان لو کہ وتر نقطہ ن کے لاَ اور یَ ہین تب مساوات ص ن کی یہہ ہوگی

ی = $\frac{یَ}{لاَ}$ لا اور مساوات خط ص و کی یہہ ہوگی ی = لا مس رَ لیکن

مس رَ = − $\frac{ص^2}{ط^2}$ مم ر موافق (۱۳۴) کی ∴ ی = − $\frac{ص^2}{ط^2}$ مم ر × لا

$= - \frac{ص^2 لا}{ط^2 ي}$ لا یا $ط^2 ی ی + ص^2 لا لا = ۰$ لیکن مساوات مماس کی

جو کہ کھینچی جاوین نقطہ ن سی یہہ ہی $ط^2 ی ی + ص^2 لا لا = ط^2 ص^2$ یہانسی

ظاہر ہوتا ہی کہ خط ص د جو کہ قطر متجانس من ن کا ہی متوازی ہی اوس مماس

کی ہی جو کہ کھینچا جاوے نقطہ ن سی اسی سبب سی اکثر اوقات تعریف قطر متجانس کی

اسطرح پر کرتے ہین قطر متجانس کے کسی قطر کا ایک ایسا خط ہی کہ مرکز سی گذرتا ہوا جاوے متوازی

اوس مماس کے جو کہ انجام سے دوسرے قطر کے کھینچا گیا ہی مساوات قطر متجانس کے بسہولت پائی جا سکتی ہے

کیونکہ اسکی مساوات اور مساوات مماس مین صرف مقدار مقررہ اخیر جز کا فرق ہی

یعنی مساوات مماس مین $ط^2 ص^2$ پایا جاتا ہی اور اسمین نہین اسیواسطے اسکی

مساوات بھی خط منحنی سے نکل سکتی ہی جیسا کہ فقرہ (۱۱۱) کے اخیر مین لکھی ہوئی ہی

تین مساواتین مذکورہ بالا یہہ ہین $ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ خط منحنی کی ہی

$ط^2 ی ی + ص^2 لا لا = ط^2 ص^2$ مماس کی ہی $ط^2 ی ی + ص^2 لا لا = ۰$ قطر متجانس کی ہی

مساوات خط د ط جو کہ گذرتا ہی نقطہ د مین سے جسکے وتر $\frac{ص لا}{ط}$ اور $- \frac{ط ی}{ص}$

(دیکھو شرح ۱۳۵ کی) اور متوازی خط ص ن کی یہہ ہی $ی - \frac{ص لا}{ط} =$

$- \frac{ی}{لا} \left(لا + \frac{ط ی}{ص} \right)$ اور بعد از اختصار کرنی کی یہہ حاصل ہوگا

$ی لا - لا ی = ط ص$ اور مساوات خط ن ص کی بموجب (۱۲۸) کی یہہ ہی

$ی لا - لا ی = ۰$ یہہ مساواتین قطر متجانس اور مماس اور خط منحنی کے بہت فایدہ مند

پائی جاوین گی حل کرنی مین اون سوالات کی جو کہ متعلق مماسون کے ہین — شرح

(۱۳۹) فرض کرو کہ لا اور ی وتر متقاطع علی القوایم ہین نقطہ ن کے نسبت

$ط_۱^۲$ + $ص_۱^۲$ = $ط^۲$ + $ص^۲$ سے ہمین حاصل ہوگا یہہ $ص_۱^۲$ = $ط^۲$ + $ص^۲$ − $ط_۱^۲$

= $ط^۲$ + $ص^۲$ − $لا^۲$ − $ی^۲$ = $ط^۲$ + $ص^۲$ − $لا^۲$ − $ص^۲$ + $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ $لا^۲$ = $ط^۲$ − $\frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲}$ $لا^۲$

= $ط^۲$ − $ی^۲$ $لا^۲$ = (ط − ی لا) (ط + ی لا) = لق لق یعنی مربع اور قطر تجانس

ص د = سطح النقر ان جوکہ دو نقطہ آتشی کے فاصلہ ہین

(۱۴۰) کہینچو ن ف عمود قطر متجانس ص د پر تو اب بموجب فقرہ (۱۳۵) کی سطح

ن ف اور ص د = ط ص ∴ ن ف = $\frac{ط ص}{ص_۱}$ = $\frac{ط ص}{\sqrt{ط^۲ + ص^۲ - ط_۱^۲}}$ =

$\frac{ط ص}{\sqrt{لق لق}}$ یہہ ثابت کیا گیا (۱۲۸) مین کہ ن گ = $\frac{ص}{ط}$ $\sqrt{لق لق}$ اور

ن گ = $\frac{ط}{ص}$ $\sqrt{لق لق}$ یہانسے صاف ظاہر ہی کہ سطح ن ک اور ن ف =

مربع ب ص اور یہہ بھی ظاہر ہی ن ک × ن ف = مربع ا ص ...... اور

ن ک × ن ک = مربع ص د

اوتار التمام کی بیان مین

(۱۴۱) دو خط جو کہ کہینچے جاوین ایک نقطہ بیضوی سے دو انجامون ایک قطر

تک اوتار التمام کہلاتی ہین یہہ اوتار التمام اعظم کہلاتی ہین جبکہ وہ قطر محور کلان ہین

اب اگر بیضوی محورون کو محور اوتار کی فرض کرین تو مان لو کہ ن ن ایک قطر اور ق ن

اور ق ن دو اوتار التمام ہین پس اسصورتمین اگر ی ی دو تر نقطہ ن کی اور − لا − ی دو تر ن کی ہین

تو مساوات ق ن کی یہہ ہوگی ی − ی = ا (لا − لا) اور مساوات ق ن کی

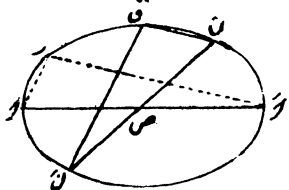
یہہ ی + ی = ا (لا + لا) نقطہ تقاطع ق پر لا اور ی دونون مساوات

کی ایک سے ہین اسیواسطے $ی - ی^۲$ = ا ا (لا^۲ − لا^۲) لیکن مساوات

بیضوی سے نقطہ ت پر یہہ ہی ط² ی² + ص² لا² = ط² ص² اور نقطہ ن پر

ط² ی'² + ص² لا'² = ط² ص²

تفریق کرنے سے یہہ حاصل

ہوگا ی² - ی'² = - ص²/ط² (لا² - لا'²)

مقابلہ کرنے سے اس مساوات کو مساوات گذشتہ سے حاصل ہوگا کہ

ا ا' = - ص²/ط² یعنی حاصل ضرب مماسون اون زاویون کا جو کہ دو اوتار التمام محور کلان سے بناتے ہین مساوی ایک مقدار مقررہ کی ہی اگر خط منحنی نسبت دو قطر متجانس کے ۲ط، اور ۲ص، کھیچا جاوے تو اس صورت مین بھی بطور سابق کی ثابت ہوگا کہ مماس اون دو زاویون کا جو کہ دو اوتار التمام کسی محور سے بناتے ہین = ص،²/ط،² چونکہ مساوات خط ق ن کی یہہ ہی ی - ی' = ا (لا - لا') اسیواسطے مساوات ق ن' کی یہہ ہوگی ی + ی' = - ص²/ط² ص' (لا + لا') لیکن دایرہ مین ص = ط کی ہوتا ہی

∴ اس خاص صورت مین ا ا' = -۱ اسسے ثابت ہوتا ہی کہ اوتار التمام دایرہ مین عمود ایک دوسرے پر ہوتی ہین جو کہ ایک خاصیت مشہور دایرہ کی ہی برعکس اس دعوی کے ایسے ثابت ہوسکتا ہی - فرض کرو کہ ا ص ا' ایک قطر ہی اور ص نقطہ شروع

اور ا ا' = - ص،²/ط،² تو مساوات خط ا ر کی یہہ ہوگی ی = ا (لا + ط،)

اور مساوات خط ا' ر کی یہہ ہوگی ی = ا' (لا - ط،) = (۱)

- ص،²/(ط،² ا) (لا - ط،) ... (۲) اب دریافت کرو نقطہ تقاطع ا ر اور ا' ر کا اوسکے واسطے جاری کرنے اس عمل کے مان لو کہ ی اور لا مساوات (۱) اور (۲)

مین ایک سی ہین اور دور کرو ا ا َ کو ضرب دینی سے ث دونون مساواتون کے

تب $\text{ی}'^2 = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{لا}^2 - \text{ط}^2)$ یا $\text{ط}^2\text{ی}^2 + \text{ص}^2\text{لا}^2 = \text{ط}^2\text{ص}^2$ یہان سی

ثابت ہوا کہ لوکس نقطہ ر کا بیضوی ہی جسکے محور ۲ ط۱ اور ۲ ص۱ ہین ثز

(۱۴۲) مساوات $\text{ا ر ا}' = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ سی معلوم ہوتا ہی کہ ا ر ا َ ایک سے نہین اسواسطے

دو دو نزدون کے جو کہ کہیچی جاوین ایک ہی قطر کے انجام تک بلکہ ا ر ا َ ایک ہی ہین

واسطی تمام اوتار التمام کے جو کہ کہیچی جاوین نقطہ بیضوی سی کسی قطر کے دو انجامون

تک یہان سی ظاہر ہوتا ہی کہ اگر ہم کہیچین خط ا ر کا انجام محور کلان سے متوازی

ق ن َ کی تو وتر التمام ا َ ر کا متوازی قطر ق ن کے ہوگا یہہ ممکن ہی تمام صورتون

مین الا جبکہ ایک وتر عمودیا متوازی محور کلان کے ہو — ثز ثز ثز

(۱۴۳) دریافت کرو زاویہ درمیان دو اوتار التمام کے — فرض کرو کہ لا َ

اور ی َ وتر نقطہ ق کی ہین اور لا ی َ وتر نقطہ ن کے تو $\text{مس ن ق ن}' = \frac{\text{ا} - \text{ا}'}{1 + \text{ا ا}'}$

$$= \frac{\frac{\text{ی} - \text{ی}'}{\text{لا} - \text{لا}'} - \frac{\text{ی} + \text{ی}'}{\text{لا} + \text{لا}'}}{1 - \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{2\text{ط}^2}{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}\cdot\frac{\text{لا ی}' - \text{ی}'\text{لا}}{\text{لا}^2 - \text{لا}'^2} \quad \text{یا}$$

$$= -\frac{2\text{ص}^2}{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}\cdot\frac{\text{لا ی}' - \text{ی}'\text{لا}}{\text{ی}'^2 - \text{ی}^2}$$ وتر التمام اعظم کی صورت مین $\text{لا}' = \text{ط}$ اور

$\text{ی}' = 0 \therefore \text{مس ا ر ا}' = -\frac{2\text{ص}^2}{\text{ط}^2 - \text{ص}^2} \times \frac{\text{ط}}{\text{ی}}$ چونکہ یہہ قیمت مماس کے منفی ہی

اسواسطے معلوم ہوتا ہی کہ زاویہ ا ر ا َ ہمیشہ منفرجہ ہوتا ہی اور یہہ ظاہر ہی

کیونکہ تمام نقطے بیضوی کے اندر اس دایرہ کی ہین جو کہ گرد بیضوی کی کہنچا

جاوے . جیسے کہ ی قیمت کی بڑہتی ہی ویسی ہی عددی قیمت مماس کی گہٹتی ہی یا

یا زاویہ بڑہتا ہی (کیونکہ جتنا زاویہ منفرجہ زیادہ ہوتا ہی اوتنا ہی اوسکا مماس
چھوٹا ہوتا ہی) یہان سی ثابت ہوا کہ زاویہ نہایت بڑا اوسوقت ہوگا جبکہ ر = ص
تو اب معلوم ہوا کہ زاویہ ا ب اَ جو کہ مابین دو اوتار التمام اعظم کے واقع ہی بڑی سی بڑا ہی
اور اوسکی تمامی ب اَ ت نہایت کم ہی اور چونکہ ان دونون زاویون سے پہلا بڑا
قایمہ سی اور دوسرا چھوٹا قایمہ سی اسیواسطے ہم ایسی اوتار التمام کھینچ سکتے ہین جنکے
مابین ایک زاویہ برابر زاویہ مفروضہ کے اور واقع حدون مذکورہ مین ہوگا اور یہہ بوسیلہ
کھینچنی ایک ایسی قطع دایرہ کی بن سکتا ہے جسمین ایک زاویہ مفروضہ واقع ہوگا
اور کسی ایک قطر کی سوای محور کے اور بذریعہ ملانی خطوط کی اوس نقطہ مین جہانکہ دایرہ
قطع کرتا ہی بیضوی کو اور دونون انجام قطر مین کسی زاویہ کہ درمیان ان خطون
کی ہی وہ مساوی زاویہ مفروضہ کے ہوگا اور قیمت زاویہ ن ق نَ سی دریافت ہوتا
ہی کہ اگر یہہ زاویہ قایمہ ہو تو دو اوتار التمام عمود محورون پر ہونگی — * * * *

(۱۴۴) صورت (۱۴۱) مین ہمنی ثابت کیا ہی کہ مس ر مس رَ = $-\frac{ص^2}{ط^2}$ اور صورت حال مین ثابت ہوا ہی کہ ا اَ = $-\frac{ص^2}{ط^2}$ اسیواسطے
مس ر مس رَ = ا اَ اب اگر مس ر = ا تو مس رَ = اَ یا اگر ایک قطر متوازی
کسی وتر کی ہو تو قطر متجانس اوسکا متوازی وتر التمام کے ہوگا * * * *

(۱۴۵) چونکہ ایسی اوتار التمام درمیان ایک خاص حد کی کھینچ سکتے ہین جنکی بیچ مین
ایک زاویہ مفروض ہو تو قطر متجانس اُنکے متوازی ان وترون کے درمیان ویسی ہی
حد کی ایسی کھینچی جاوینگے جنکی مابین وہی زاویہ مفروضہ پایا جاویگا اور چونکہ زاویہ

دو اوتار النام اعظم کے ربع مین ہمیشہ زاویہ منفرجہ ہوتا ہی اسیواسطے زاویہ لا ص د جو کہ درمیان قطر متجانس کے ہی منفرجہ ہوگا اور یہہ بڑی سے بڑا ہوگا جبکہ وہ اقطار متوازی اب اور اب کی ہو نگی اسصورتمین چونکہ یہہ اوتار دونون محورون کی نسبت سی ایک ہی طرح پر واقع ہوتی ہین تو اب وہ آپس مین برابر بھی ہونگے

اور مقدار مساوی اقطار متجانس کے معلوم ہوسکتی ہی اس مساوات سی

ط ا۲ + ص ا۲ = ط۲ + ص۲ اسواسطی ط ا۲ = (ط۲ + ص۲)/۲ اور مساوی اقطار متجانس کی لحاظ سی مساوات بیضوی کی یہہ ہوتی ہی د۲ + لا۲ = ط ا۲ لیکن طالبعلم کو یہہ یاد رہی کہ اس مساوات اور مساوات دایرہ کو ایک ہی نہ سمجھا جائے اور یہہ مساوات دایرہ کی اوسوقت ہوگی جبکہ اوسکی محور متقاطع علی القوایم ہونگی ــ ثم ثم

قطبی مساواتون کے بیان مین

(۱۴۶) ایک مساوات کو (جو کہ درمیان محورون متقاطع علی القوایم کی ہی) ہم بدل سکتے ہین درمیان قطبی وترون ع اور و کے فرض کرو کہ اس شکل مین ص نقطہ ش و ع ہی اور اسکی محور متقاطع علی القوایم ہین اور مان لو کہ و تر نقطہ قطب د کی لا د ہین اور ر وہ زاویہ ہی جو کہ نصف قطر متحرک و ن یا ع بناتا ہی خط و لا سی جو کہ متوازی محور لا کی ہی تو موافق (۷۱) یا دیکھنی شکل کی سی ظاہر ہوگا کہ د = د + ع جیب ر

لا = لا + ع جم ر

اور ط۲ د۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ اور جبکہ لکھی ہمنے قیمتین لا اور د کی اس مساوات

مین تو حاصل ہوگا یہہ ط۲ (ئ + ع جس ر)۲ + ص۲ (لا + ع جم ر)۲ = ط۲ ص۲

اس مساوات کے وسیلہ سی قیمت ع کی نسبت ر اور مقادیر مقررہ کے معلوم ہوجاویگی — ؛

(۱۴۷) فرض کرو کہ مرکز نقطہ قطبی ہی ∴ لا = ۰ لعدہ ئ = ۰ ∴ ط۲ ع۲ (جس ر)۲ + ص۲ ع۲ (جم ر)۲ = ط۲ ص۲ ∴ ع۲ = ط۲ ص۲ / (ط۲ جس ر۲ + ص۲ جم ر۲) = ط۲ ص۲ / (ط۲ جس ر۲ + (ط۲ − ط۲ ی۲) جم ر۲) = ط۲ ص۲ / (ط۲ − ط۲ ی۲ جم ر۲) = ط۲ (۱ − ی۲) / (۱ − ی۲ جم ر۲)

(۱۴۸) فرض کرو کہ نقطہ آتشی س نقطہ قطبی ہی یہان ئ = ۰ اور لا = − ط ی = − س اور ع اس صورت مین ن ہوجاویگا اسیواسطے صورت مساوات (۱۴۶) کے یہہ ہوگی ط۲ (ن جس ر)۲ + ص۲ (− س + ن جم ر)۲ = ط۲ ص۲

∴ ط۲ ن۲ جس ر۲ + ص۲ ن۲ جم ر۲ − ۲ ص۲ ن س جم ر + ص۲ س۲ = ط۲ ص۲

یعنی ط۲ ن۲ جس ر۲ + ط۲ ن۲ جم ر۲ − س۲ ن۲ (جم ر)۲ − ۲ ص۲ ن س جم ر = ط۲ ص۲ − ص۲ س۲ = ص۴ کیونکہ ط۲ − ص۲ = س۲ یا ط۲ ن۲ = س۲ ن۲ جم ر۲ + ۲ ص۲ ن س جم ر + ص۴ = (س ن جم ر + ص۲)۲ ∴ ط ن = س ن جم ر + ص۲

اور ن = ص۲ / (ط − س جم ر) = ط۲ (۱ − ی۲) / (ط − ط ی جم ر) = ط (۱ − ی۲) / (۱ − ی جم ر) — ؛ ؛ ؛

(۱۴۹) فرض کرو کہ کوئی نقطہ محیط بیضوی پر نقطہ قطبی ہی اور جب وقت بہلا یعنی مساوات (۱۴۳) کو اور تحویل کیا لوسی بوسیلہ مساوات ط۲ ئ۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ تو حاصل ہوگا یہہ ع = − ۲ (ط۲ ئ جس ر + ص۲ لا جم ر) / (ط۲ جس ر۲ + ص۲ جم ر۲) اگر قطب نقطہ ا کا فرض

فقرہ (۱۴۷) کے $ص_1^2 = \frac{ط^2(1-ی^2)}{1-ی^2 جم^2 ر} = \frac{ط^2}{2} \cdot \frac{ل}{1-ی^2 جم^2 ر} = \frac{ط}{2}(نق + نق')$ ∴

$نق + نق' = \frac{2 ص_1^2}{ط}$ یا $نق + نق' = \frac{4 ص_1^2}{2 ط}$ یعنی $2 ط (نق + نق') = 4 ص_1^2$

∴ $2 ط : 2 ص_1 :: 2 ص_1 : (نق + نق')$ ———

باب نہم

بعید البیضوی سے کے بیان مین

(۱۵۳) بحث مساوات عام درجہ دویم مین ہم ثابت کر آئی ہین کہ اگر ایک مساوات جسکا خط منحنی محور متقاطع علی القوایم اور مرکز نقطہ شروع رکھتا ہو تو شکل مساوات عام کی صورت بعید البیضوی مین یہہ ہو جاتی ہے $(\frac{ی'}{-ف}) ی^2 + (\frac{-س'}{ت}) لا^2 = 1$ یہان اشارات مختلف علامتین رکھتی ہین (۸۵) اور (۸۶) فرضکرو کہ $(\frac{ی'}{-ت})$ منفی ہے اسیواسطے صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی — $(\frac{ی'}{-ت}) ی^2 + (\frac{س'}{ت}) لا^2 = 1$ یا $ف ی^2 - ق لا^2 = -1$ ہم اب ثابت کرینگے بوسیلہ اسکی تمام اشکال بعید البیضوی کو

(۱۵۴) فرضکرو کہ مرکز خط منحنی کا $ص$ ہے اور $لا لا'$ اور $ی ی'$ اسکی محور متقاطع علی قوایم نقطہ $ص$ پر ملتی ہین فرض کرو کہ $ص م = لا$ اور $م ف = ی$ اسیواسطے ان نقاط پر جہانکہ خط منحنی قطع کرتا ہے محورونکو $ی = 0$ ∴ $ق لا^2 = 1$ ∴ $لا = \pm \frac{1}{\sqrt{ق}}$

$لا = 0$ ∴ $ف ی^2 = -1$ ∴ $ی = \pm \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{ف}}$

محور $لا$ پر قطع کر $ص ا = \frac{1}{\sqrt{ق}}$

اور $ص ا' = -\frac{1}{\sqrt{ق}}$ تو یہان سے

معلوم ہوا کہ خط منحنی محور $لا لا'$ کو نقاط $ا$ اور $ا'$ پر قطع کرتا ہے اور چونکہ

اور چونکہ قیمت ی کی ناممکن ہے تو معلوم ہوا کہ دوسرا محور خط منحنی سے نہیں ملتا
ہے پہر بہی ہم محور ی ی' کو نقاط ب اور ب' پر نشان کرتی ہین جنکی فاصلے
نقطہ ص سے ص ب = + $\frac{1}{\sqrt{-ق}}$ اور ص ب' = − $\frac{1}{\sqrt{-ق}}$
اور اگر ص ا = ط اور ص ب = ص کی فرض کیا جاوے تو ق = $\frac{1}{ط^۲}$
اور ف = $\frac{1}{ص^۲}$ اسیواسطے صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی

$$\frac{ی^۲}{ص^۲} - \frac{لا^۲}{ط^۲} = -۱ \text{..........................}$$

$$\text{یا } ط^۲ی^۲ - ص^۲لا^۲ = -ط^۲ص^۲ \text{.............}$$

$$\text{یا } ی^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲}(لا^۲ - ط^۲) \text{.................}$$

(۱۵۵) پچہلی مساوات سے ہمین حاصل ہوتا ہے یہہ......

$$ی = \pm \frac{ص}{ط}\sqrt{لا^۲ - ط^۲} \text{..........................} (۱)$$

$$\text{اور } لا = \pm \frac{ط}{ص}\sqrt{ی^۲ + ص^۲} \text{.....................} (۲)$$

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا کم ہو ± ط سے تو ی ناممکن ہوگا اب اگر خطوط
نقاط ا اور ا' سے متوازی خط ص ی کی کہینچین جاوین تو کوئی حصہ خط منحنی
کا درمیان ان خطوط کے نہین واقع ہوگا اور واسطے ہر ایک اس قیمت
لا کی جو کہ ط سے زیادہ ہو دو صحیح مساوی قیمتین ی کی حاصل ہونگی
یعنی واسطے ہر ایک وتر العرض ص م کی دو وتر م ف اور م ف'
برمقابل ایک دوسری کی ہین حاصل ہونگی — اور جیسا کہ قیمت لا
کی ط سے ∞ تک زیادہ ہوتی ہے ویسی ہی قیمتین ی کی ۰ سے

± ∞ تک زیادہ ہوتی ہین اسیواسطی یہین دو قوسین ا ف اور ا ف
کی مساوی اور مقابل ایک دوسری کی جو کہ لانہایت پہلتی ہین حاصل ہونگی
اگر لا منفی ہو تو لا۲ مثبت ہوگا اسیواسطی ویسی ہی قیمتین لا کی جسکی اوپر معلوم
ہوئی ہین حاصل ہونگی یہانسی معلوم ہوا کہ ایک اور شاخ خط منحنی کی ہی اور
اور یہہ اُسی لانہایت پہلتی ہی تو اب معلوم ہوا کہ یہہ دونون شاخین خط منحنی
محور لا سی تنصیف کیٔ جاتی ہین (۲) سے معلوم ہوتا ہی کہ یہہ خط منحنی محور ی
سی بہی تنصیف کیا گیا ہی اور اسکی سمت مجوف طرف محور لا کی پہری ہوئی
ہی نہین تو وہ ایکخط مستقیم سی زیادہ نقاط پر قطع کیا جاویگا (۱۷)

(۱۵۶) اگر ف ایک نقطہ خط منحنی پر ہو تو

ص ف = $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ی}^2} = \sqrt{\text{لا}^2 + \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{لا}^2 - \text{ط}^2)} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2}\text{لا}^2 - \text{ص}^2}$

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ ص ف نہایت کم ہی جبکہ لا نہایت کم ہو یعنی
جبکہ لا = ط تو اس صورت مین ص ف بہی مساوی ط کی ہو جاتا ہی
یہانسی معلوم ہوا کہ ص ا یا ص اَ نہایت چہوٹا خط ہی اُن خطوط مین سے
جو کہنچی جاوین نقطہ ص سی خط منحنی تک اسیواسطی محور ا اَ معلوم ہوا
کہ لانہایت چہوٹا خط ہی اون سبکا جو کہنچی جاوین مرکز سی کسی نقطہ خط منحنی
تک اور دوسرا محور ب بَ کا خط منحنی سی نہین ملتا ہی —
مساوات ف ی۲ - ق لا۲ = -۱ مین محور خیالی زیادہ یا کم ہوگا
موافق زیادتی یا کمی ق کی ف پر تو اب معلوم ہوا کہ محور کلان ہمیشہ

اصلی محور نہین ہوتا ہی - اس کتاب مین ہم بڑی محور کو محور کلان لکھین گی اور محور خورد کو محور متجانس —

(۱۵۷) نقاط ا اور اَ کو اس خط منحنی کینی ہین اور کوئسا نقطہ ان دو نون مین سی نقطہ شروع ہو سکتا ہی اگر موافق اسکی تبدیلی کیٔی جاوی فرضکرو کہ اَ نقطہ شروع ہی اور مان لو کہ اَم = لا تو

ی = صم = ص ا + ا م = ط + لا ∴ ی² = ص²/ط² (لا² − ط²)

= ص²/ط² {(ط + لا)² − ط²} = ص²/ط² (۲ط لا + لا²) اور علامتونکو دور کرنی سی یہہ حاصل ہوگا ی² = ص²/ط² (۲ط لا + لا²) = ص²/ط² لا (۲ط + لا)

اور یہہ مساوات بطور ہندسہ کی اسطرح پر تعبیر ہو سکتی ہی —

مربع م ف : مسطح اَم اور م اَ :: مربع ب ص : مربع اص - اگر نقطہ شروع اَ فرض کیا جاوی تو صورت مساوات کی یہہ ہوگی ی² = ص²/ط² (لا² − ۲ط لا)

(۱۵۸) اگر ط = ص تو صورت مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہوگی ی² − ی² = − ط² اس خط منحنی کو بعید البیضوی مساوی الاضلاع کہتی ہین یہہ دی نسبت خط بعید البیضوی عام سی رکہتا ہی جو کہ دائرہ بہ نسبت بیضوی

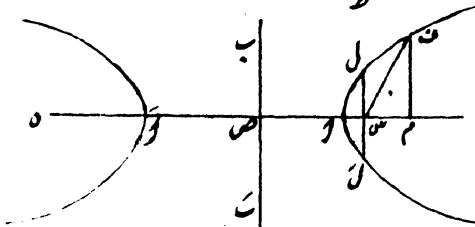
(۱۵۹) درمیان خطوط بیضوی اور بعید البیضوی کی نہایت کم فرق ہی کیونکہ انکی مساواتین فرق حرف علامت ص² مین ہی کیونکہ اگر مساوات بیضوی مین جو کہ یہہ ہی ط² ی² + ص² لا² = ط² ص² بجای + ص² کی − ص² لکہا جاوی تو ہمین مساوات بعید البیضوی کی حاصل ہوگی یہانسی معلوم ہوا کہ اکثر شکلین جو کہ بیضوی مین ثابت کیٔی گئی ہین اوسیطرح اسمین بھی ثابت ہو سکتی ہین اگر بجای انکی ص² کی − ص² لکہا جاوی اسواسطی ہم ایسی شکلونکو یہان ثابت نہین کرینگی بلکہ صرف انکی دعوی اور نتیجون کو لکہدینگی اور اشارہ کرینگی واسطی اسکی ثبوتکی طرف اوسی خاص شکل بیضوی کی اور جہان کچہ تبدیلی ہے

ضرورت ہوگی اسکو ہم بیان حل کرینگی اور حسب بہا ی کہ شکل کے ضرورت ہوگی اُسی مقام پر شکل بہی لکہہ دیرینگے

نقاط آتشی کے بیان مین

(۱۶۰) مساوات $ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(۲ط لا + لا^2)$ کی یہہ صورت ہوسکتی ہی $ی^2 = ل لا + \frac{ل}{۲ط} لا^2$ جبکہ $ل = \frac{۲ص^2}{ط}$ کے فرض کیا جاوے اور اس ل کو وتر آتشی اعظم کہتے ہین چونکہ $ل = \frac{۲ص^2}{ط} = \frac{۴ص^2}{۲ط}$ تو معلوم ہوا کہ وتر آتشی اعظم نسبت ثالث رکہتا ہی محور کلان اور محور خورد سی یعنی

محور کلان : محور خورد :: محور خورد : وتر آتشی اعظم

(۱۶۱) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ محور کلان پر جسپی ایک ایسا وتر کہینچا جاوے کہ دوچند اوسکا مساوی ہو وتر آتشی اعظم کے اس صورتمین ظاہر ہی کہ $۴ی^2 = ل^2$ یا

$$\frac{۴ص^2}{ط^2}(لا^2 - ط^2) = \frac{۴ص^4}{ط^2} \therefore لا^2 - ط^2 = ص^2$$

ملاؤ اب کو تو $اب = \sqrt{ط^2 + ص^2}$ اب ص کو مرکز کر کے گرد اسکے اور اب کو نصف قطر کر کے کہینچو ایک دایرہ کاٹتا ہوا محور کلان کو نقاط س اور ہ مین تو اس صورت مین $ص س = \sqrt{ط^2 + ص^2}$ اور $ص ہ = -\sqrt{ص^2 + ط^2}$ تو اب دریافت ہوئے دو نقطے س اور ہ کہ ایسی

جنہین سے اگر ایک وتر مثل ل س لَ کے کہیچا جاوے تو وہ مساوی وتر آتشی اعظم کے ہوگا نقاط س اور ہ کو نقاط آتشی کہتے ہین — ث

(۱۶۲) کسر $\frac{\sqrt{ط^2+ص^2}}{ط}$ کو (جو کہ تعبیر کرتی ہی ! وس نسبت کو جو کہ درمیان ص س اور ص لَ کے ہی) خارج المرکز کہتے ہین اور اگر اوس مقدار کو جو کہ عدد ایک سی کم ہی ی سی تعبیر کرین تو ہمین یہہ حاصل ہوگا $\sqrt{ط^2+ص^2} = ط ی$

اور یہان سی معلوم ہوتا ہی کہ $ی^2 = \frac{ط^2+ص^2}{ط^2} = 1 + \frac{ص^2}{ط^2}$ ∴ $\frac{ص^2}{ط^2} = ی^2 - 1$

تو اب ظاہر ہی کہ مساوات لعید البیضوی کو اس صورت مین لکہہ سکتے ہین

$ی^2 = (ی^2 - 1)(ط^2 - لا^2)$ — ث ز ث ز ث

(۱۶۳) چونکہ $ط^2 + ص^2 = ط^2 ی^2$ تو $ص^2 = ط^2 ی^2 - ط^2 =$

$(ط ی + ط)(ط ی - ط)$ یا سطح ا س اور لَ س = مربع ب ص — ث

(۱۶۴) دریافت کرو فاصلہ کسی نقطہ فَ خط منحنی کا نقطہ آتشی سے۔

عمل کرنیسی موافق (۱۰۹) کی ہمین حاصل ہوگا یہہ س ف = ی لا − ط اور

ہ ف = ی لا + ط یہان سی ثابت ہوتا ہی کہ ہ ف − س ف = ۲ ط = ا لَ

یعنی حاصل تفریق فاصلون کسی نقطہ خط منحنی کا نقاط آتشی سے مساوی محور کلان کی ہی

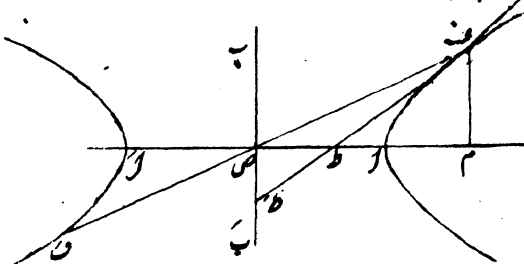
(۱۶۵) برعکس اسکے دریافت کرو لوکس ایک ایسی نقطہ کا فرق جسکے فاصلون کا دو قایم نقطون س اور ہ سی مساوی ایک مقدار مقررہ یا ۲ ط کی ہی اگر

س ہ = ۲ س تو لوکس ایک ایسا لعید البیضوی ہی جسکے محور ۲ ط اور

$۲\sqrt{ط^2+ص^2}$ ہین اور نقاط آتشی اسکے س اور ہ ہین موافق (۱۱۰) کی

مماس کے بیانین

(۱۶۶) دریافت کرو مساوات مماس کی جو کہ کھینچا جاوے نقطہ ف (لاَ اور یَ) خط منحنی سے مساوات مماس کے عمل کرنی سی موافق (۱۱۱) یہہ حاصل ہوگی

ط۲ یَ ی − ص۲ لا لاَ = − ط۲ ص۲ یہہ صورت بخوبی یاد ہو سکتے ہی کیونکہ یہہ مساوات حاصل ہوتی ہی مساوات خط منحنی سے ط۲ ی۲ − ص۲ لا۲ = − ط۲ ص۲ بوسیلہ لکھنے

یَ ی کی بجای ی۲ اور لا لاَ بجای لا۲ کے

(۱۶۷) دریافت کرو وہ نقاط جہانکہ مماس قطع کرتا ہی محورونکو فرض کرو ی = ۰ ∴ لا = ط۲/لاَ = ص ط اسیطرحسی ی = ص ظ = − ص۲/یَ یہانسی ہمیں حاصل ہوگا سطح ص ط اور ص م = مربع ر ص

اور سطح ص ظ م ف = مربع ب ص اور چونکہ ص ط (= ط۲/لاَ) ہمیشہ کم ہوتا ہے ص ر سی تو معلوم ہوا کہ مماس کسی نقطہ شاخ ف ر کا قطع کرتا ہی محور کلان کو درمیان ص اور ر کے اور خط پائین م ط = لاَ − ط۲/لاَ = (لاَ۲ − ط۲)/لاَ (۱۱۵)

اور مماس نقطہ ر پر جو کہ انجام محور کلان کے ہی عمود محور کلان پر ہوگا موافق (۱۱۶)

(۱۶۸) دریافت کرو مساوات مماس کی انجام وتر آتشی اعظم پر

مساوات عام مماس کے یہہ ہی ط^۲ ی ی ـ ص^۲ لا لاَ = ـ ط^۲ ص^۲ اور نقطہ لَ پر

لاَ = ط ی اور یَ = ص^۲/ط ∴ ط^۲ ی ص^۲/ط ـ ص^۲ لا ط ی = ـ ط^۲ ص^۲

یا ی = ی لا ـ ط

فرض کرو کہ وتر و یا م ق قطع کرتا ہی خط منحنی کو نقطہ ق پر

م ق ف ر ل ص ط ی س م

تو س ف = ی لا ـ ط (۱۶۴) ∴ م ق = س ف اور

ص ط = ط/ی اب کھینچو نقطہ ط سی عمود ط ر ا ص پر اور ف سی ف ر متوازی

م ط کے تو ط م = ف ر = م ص ـ ط ص = لا ـ ط/ی = (ی لا ـ ط)/ی =

۱/ی س ف یہاں سی دریافت ہوا کہ فاصلے کسی نقطہ ف کے س سی اور خط ط ر سے

اس نسبت مین ہونگے ی : ۱ خط ط ر کو خط بنیادی کہتی ہین اگر لا = ۰

تو ی = ـ ط یہاں سی معلوم ہوا کہ مماس انجام وتر آتشی اعظم پر کاٹتا ہی محور ی

کو اوس نقطہ پر جہاں کہ دایرہ کھینچا گیا محور کلان پر قطع کرتا ہی اوسی محور کو ـ

(۱۶۹) دریافت کرو طول اوس عمود کا جو کہ کھینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس پر

فرض کرو کہ س ی اور ہ ر عمود مماس ف ط پر ہین موافق صورت (۴۸) کے

ہمین حاصل ہوگا یہہ ع = ـ (ک۱ ـ ا لا ـ د)/√(۱ + ا^۲) یہان ک۱ = ۰ اور

ا = ط ی اوتار نقطہ س کے ہین اور ی = ا لا + د مساوات خلاف ی کی ہے

لیکن مساوات $\overline{\text{ف ر}}$ موافق (۱۶۶) یہہ ہی ہی $\text{ر} = \frac{\text{ص}^2\,\text{لا}'}{\text{ط}^2\,\text{ی}'}\,\text{لا} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ی}'}$

$\therefore\ \text{ا} = \frac{\text{ص}^2\,\text{لا}'}{\text{ط}^2\,\text{ی}'}$ اور $\text{د} = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ی}'}$ اسیواسطے

$$\text{ع} = -\frac{-\frac{\text{ص}^2\,\text{لا}'}{\text{ط}^2\,\text{ی}'}\,\text{ط ی} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ی}'}}{\sqrt{1 + \frac{\text{ص}^4\,\text{لا}'^2}{\text{ط}^4\,\text{ی}'^2}}}$$

$$= + \frac{\text{ط ص}^2\,(\text{ی لا}' - \text{ط})}{\sqrt{(\text{ط}^4\,\text{ی}'^2 + \text{ص}^4\,\text{لا}'^2)}} = \frac{\text{ط ص}^2\,(\text{ی لا}' - \text{ط})}{\text{ط ص}\sqrt{\text{ی}^2\,\text{لا}'^2 - \text{ط}^2}} = \text{ص}\sqrt{\frac{\text{ی لا}' - \text{ط}}{\text{ی لا}' + \text{ط}}}$$

فرض کرو کہ $\text{س ف} = \text{ن ق}$ اور $\text{ہ ف} = 2\,\text{ط} + \text{ن ق} = \text{ل}'$ $\therefore\ \text{ع} = \text{ص}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}}$

یا $\text{ع}^2 = \text{ص}^2\,\frac{\text{ل}}{2\,\text{ط} + \text{ل}}$ اسیطرح سی اگر $\text{ہ ر} = \text{ع}'$ تو $\text{ع}'^2 = \text{ص}^2\,\frac{\text{ل}'}{\text{ل}}$

ضرب دینی سی ان دونوں مساواتوں کے حاصل ہوگا یہہ $\text{ع ع}' = \text{ص}^2$

یہاںسی ثابت ہوا کہ سطح س ی اور $\text{ہ ر} =$ مربع ب ص کو ـ

(۱۷۰) دریافت کرو وہ خط جو کہ حرکت نقطہ $\overline{\text{ی}}$ یا $\overline{\text{ر}}$ کے سی پیدا ہوسکتا ہی ظاہر ہے کہ مساوات خط منحنی کی نقطہ $\overline{\text{ف}}$ پر یہہ ہوگی $\text{ط}^2\,\text{ی}'^2 - \text{ص}^2\,\text{لا}'^2 = -\text{ط}^2\,\text{ص}^2$ اور

مساوات مماس کی اوسی نقطہ فَ پر یہہ ہوگی $\text{ط}^2\text{ی}\,\text{یَ} - \text{ص}^2\text{لا}\,\text{لاَ} = -\text{ط}^2\text{ص}^2$

اور مساوات سَ کَ کی یہہ ہی $\text{ی} = \frac{-\text{ط}^2\text{یَ}}{\text{ص}^2\text{لاَ}}(\text{لا}-\text{س})$ اور بوسیلہ دور کرنی لاَ

اور یَ کی بطور (۱۲۰) کی ہمین حاصل ہوگا یہہ $\text{ط}^2 = \text{لاَ}^2 + \text{یَ}^2$ یہانسی ثابت ہوا

کہ خط مطلوب ایسا دایرہ ہی جسکا محور کلان قطر ہی — ثر ثر ثر

(۱۷۱) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا اوس زاویہ کا جو کہ خط سَ فَ کا مماس

فَ ط سی بناتا ہی — ظاہر ہی کہ مساوات مماس کی یہہ ہی

$\text{ی} = \frac{\text{ص}^2\text{لاَ}}{\text{ط}^2\text{یَ}}\text{لا} - \frac{\text{ص}^2}{\text{یَ}}$ اور مساوات خط مستقیم سَ فَ کی یہہ ہے

$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}-\text{س}}(\text{لا}-\text{لاَ})$ یہانسی معلوم ہوا کہ مس سَ فَ ط =

$$\text{مس}(\text{فَ س لا} - \text{فَ ط لا}) = \frac{\frac{\text{ص}^2\text{لاَ}}{\text{ط}^2\text{یَ}} - \frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}-\text{س}}}{1 + \frac{\text{ص}^2\text{لاَ}}{\text{ط}^2\text{یَ}}\cdot\frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}-\text{س}}} =$$

$$= \frac{\text{ط}^2\text{یَ}^2 - \text{ص}^2\text{لاَ}^2 + \text{ص}^2\text{س}\,\text{لاَ}}{\text{ط}^2\text{یَ}\,\text{لاَ} - \text{ط}^2\text{س}\,\text{یَ} + \text{ص}^2\text{لاَ}\,\text{یَ}} = \frac{\text{ص}^2(\text{س}\,\text{لاَ} - \text{ط}^2)}{\text{یَ}\,\text{س}(\text{س}\,\text{لاَ} - \text{ط}^2)} = \frac{\text{ص}^2}{\text{س}\,\text{یَ}}$$

اسیطور سے ثابت ہوگا کہ مس ہ فَ ط = $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}\,\text{یَ}}$ اسواسطے زاویہ سَ فَ ط برابر

ہی زاویہ ہ فَ ط کی کھینچو خط سَ فَ کو سَ تک اب واضح ہو کہ یہہ ایک بڑی

خاصیت روشنی کی ہی کہ اگر ایک کرن نقطہ ہ مین سے گذر کی منعکس ہو خط طَ فَ ط

سی تو زاویہ سَ فَ طَ کا مساوی ہوگا زاویہ ہ فَ ط کو اور چونکہ بعینہ البیضوی

مین یہہ دونو زاوی مساوی ہوتی ہین تو اب معلوم ہوا کہ اگر ایک لاوشن جسم نقطہ سَ

پر رکہا جاوے تو تمام کرنین نقطہ سَ سے نکل کے منعکس خط منحنی سے ہو کر نقطہ ہ پر

جمع ہونگی اسیواسطے یہہ دونون نقطے نقطہ آتشنے کہلاتی ہین یہہ ایک بڑی خاصیت خط

خط منحنی کی بطور آیندہ کے بھی ثابت ہو سکتے ہیں موافق فقرہ (۱۶۹) کے

س ی = ع = ص ہا لی/لیَ اور ہ ر = عَ = ص ہا لیَ/لی ∴

س ی : ہ ر :: لی : لیَ :: س ف : ہ ف ∴ زاویہ س ف ی = ہ ف ر

یعنی مماس مساوی زاویہ بناتا ہی اون فاصلون سے جو کہ واقع ہی درمیان نقاط آتشی

اور نقطہ تماس * ∴ ∴ ∴ ∴ ∴

* یہ طریق آیندہ بہت مفید معلوم ہوگا واسطی کہینچنی مماس کے بطور ہندسہ کی اور واسطی ثابت

کرنے اس بات کی کہ لوکس اوس عمود کا جو کہ

کہیجا جاوے نقطہ آتشی سے مماس پر دایرہ

ہوتا ہی فرض کرو کہ ا ر ف بعید البضوی ہی اور ف

ایک نقطہ اوسکی اوپر ہی ملاؤ خطوط س ف اور

ہ ف ملین سے کاٹو ف ک = ف س اور تنصیف کرو زاویہ س ف ک کو خط ی ر سے

ملاؤ س ک کاٹتا ہوا خط ف ی کو ی مین (۱) اب ہم ثابت کرینگے کہ ف ی مماس بعید البضوی

کا ہی کیونکہ اگر ر کوئی اور نقطہ خط ف ی مین ہو تو ہ ر ـ س ر = ہ ر ـ ک ر کم ہی خط

ہ ک یا ۲ ط سی یعنی معلوم ہوا کہ نقطہ ر کا جو کہ خط ف ی پر واقع ہی خط منحنی مین نہینگے

اور ۲ ط حسی ثابت ہو سکتا ہی کہ کوئی نقطہ جو کہ خط ف ی پر ہو خط منحنی پر واقع نہین ہے

(۲) لوکس نقطہ ی کا وہ دایرہ ہی جو کہ محور کلان پر بن سکتا ہی واسطی ثبوت اس دعوی کی کہینچو

خط ہ ی کا متوازی خط س ی کے اور ملاؤ ص ی اب چونکہ مثلث س ف ر کا مساوی مثلث

ک ف ی کی ہی تو زاویہ س ر ف کا قایمہ ہی یا س ی اور ہ ر عمود مماس ف ی پر ہین اور

چونکہ ہ ر = ہ ف جب ہ ف ر تو ص √(ل ل' / ل) = ی جب ہ ف ر ∴

جب ہ ف ر = ص / √(ل ل') ∴ زاویہ ص ر و = زاویہ ہ ف ر اور ص ر متوازی ہ ف

کی ہی اگر ص ی متوازی مماس ف ط کی کھینچا جاوے اور وہ قطع کری ہ ف کو نقطہ

ی مین تو ف ی = ص ر = ا ص — ثر ثر ثر

عمود مماس کے بیان مین—

مساوات اوس خط کی جو کہ گذرے نقطہ ف (لا' اور ی') سے عمود مماس

(ی = ص² لا' / ط² ی' لا − ی' / ص²) پر یہہ ہوگی ی − ی' = − ط² ی' / ص² لا' (لا − لا')

اب دریافت کرو کہ کس جاے یہہ عمود مماس محور ی کو تقاطع کرتا ہی واسطی اسکے

فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ − ی' = − ط² ی' / ص² لا' (لا − لا') ∴ لا = لا' + ص² لا' / ط²

= (ط² + ص²) / ط² لا' = ی² لا' = ص ک اور اب فرض کرو کہ لا = ۰ ∴

ی = ی' + ط² ی' / ص² = (ط² + ص²) / ص² ی' = ط² ی² / ص² ی' = ص ک' اور ظاہر ہی

کہ خط بائین م ک = لا − لا' = ص² لا' / ط² اور س ک = ی س ف ثر

(۱۷۶) بوسیلہ قیمت س ک اور س ک' اور م ک' کے ہمین حاصل ہوگا

یہہ ف ک = ص / ط √(ل ل') اور ف ک' = ط / ص √(ل ل') اسیواسطی سطح

ف ک اور ف ک' = ل ل' = سطح س ف اور ہ ف کی اور

س ک' = ط ی / ص √(ل ل') اور ک ک' = ط² ی² / ص √(ل ل') ∴ ک ک' = ی س ک'

(۱۷۷) چونکہ مماس مساوی زاویہ بناتا ہی نقطہ آتشی کے فاصلون سے تو عمود مماس

جو کہ عمود مماس پر ہوتا ہی مساوی زاویہ بناویگا نقطہ آتشی کے فاصلون سے اگر

دستخطی ثبوت اس بات کی خط ہ ف کو ہ تک کھینچین تو دعوی مذکورہ بخوبی بطور آیندہ کی بوسیلہ قیمت ص ک کی ثابت ہو سکتا ہی —

س ک : ہ ک :: ی لا + طی : ی لا + طی :: ی لا - ط : ی لا + ط

:: س ف : ہ ف یہان سی معلوم ہوا کہ زاویہ س ف ہ کو خط ف ک کی تنصیف کیا ہی

قطرون کے بیانمین

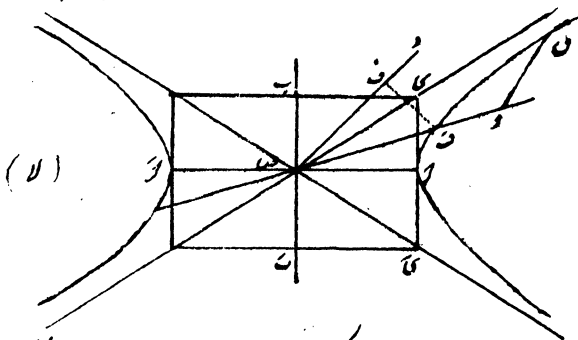
(۱۷۸) یہہ بات بخوبی ثابت ہو سکتی ہی کہ بیضوی مین فقرہ (۱۴۰) مین ہوا ہے کہ تمام اقطار بعید البیضوی کے مرکز پر سے گذرتی ہین اور برعکس اسکی جو خط کہ مرکز پر سی گذریگا وہ قطر ہوگا اگر ی = ل لا + د مساوات وترکی ہو تو ط ا ر - ص لا = ۰ مساوات اُس قطر کی ہی جو کہ تنصیف کرتا ہی تمام اون وترون کو جو کہ متوازی اوس خط مستقیم کے ہین جنکی یہہ مساوات ہی ی = ا لا + د

(۱۷۹) تمام قطر بیضوی کی خط منحنی سے ملتی ہین لیکن بعید البیضوی مین ایسا حال نہین ہوتا ہی اور یہہ بات ظاہر ہوگی بوسیلہ دریافت کرنی نقطہ تقاطع قطر اور خط منحنی کے فرض کرو کہ ی = م لا مساوات قطر ص ف کی ہی لکہو اسکی قیمت ی کو مساوات خط منحنی مین جو کہ یہہ ہی $ط^2 ی^2 - ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$

$$\therefore ط^2 م^2 لا^2 - ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2 \quad \therefore لا^2 = \frac{ط^2 ص^2}{ص^2 - ط^2 م^2}$$

$$\therefore لا = \pm \frac{ط ص}{\sqrt{ص^2 - ط^2 م^2}}$$ اگر $ط^2 م^2$ بڑا ہو $ص^2$ سے تو یہہ قیمتین لا کی ناممکن ہونگی یعنے اگر م بڑا ہو $\frac{ص}{ط}$ سے تو یہہ قیمتین لا کی ناممکن ہونگی اور اگر

$م = \pm \frac{ص}{ط}$ تو قطر خط منحنی سے لانہایت فاصلہ پر ملیگا حدود اون قطرون کے

جو تقاطع ایک دوسرے سے کرتی ہین اسطرح معلوم ہونگی نقاط ڑ اور ب اور ب ٰ مین سے کبھی خطوط متوازی کا محور ذنکی جو کہ ملین نقطون ی اور ی ٰ پر تو اب ظاہر ہی کہ مس ی ٰ ص ا = ص/ط اور مس ی ص ا = − ص/ط یہانسی معلوم ہوا

کہ اگر خطوط ی ص اور ی ٰ ص کو کھینچا جاوے تو وہ خطوط مطلوب ہونگی یہانسی ثابت ہوا کہ اگر قطر خط منحنی سے ملی تو وہ بالضرور زاویہ ی ص ی ٰ کے اندر کھینچا گیا ہوگا تو اب معلوم ہوگا کہ خط ص د کبھی خط منحنی سے نہین ملیگا — فز

(۱۸۰) واضح ہو کہ خط بعید البیضوی کے لاتعداد اقطار متجانس ہو سکتے ہین اور یہہ ثابت ہو سکتا ہی اگر خط منحنی کے محور دنکی سمت بوسیلہ (۵۷) کی بدلی جاوے ظاہر ہی کہ ی = لا ٰ جب ر + ی ٰ جب ر ٰ اور لا = لا ٰ جم ر + ی ٰ جم ر ٰ جبکہ لکھا ہمنی ان قیمتون لا اور ی کو اس مساوات مین ط² ی² − ص² لا² = − ط² ص² تو حاصل ہوگا یہہ {ط² (جب ر ٰ)² − ص² (جم ر ٰ)²} ی ٰ² + {ط² (جب ر)² − ص² (جم ر)²} لا ٰ²

+ ۲ {ط² جب ر جب ر ٰ − ص² جم ر جم ر ٰ} لا ٰ ی ٰ = − ط² ص² واسطی ثبوت اسبات کے کہ اس مساوات کو قطر متجانس ہون فرض کرو کہ امثال لا ٰ ی ٰ = ۰

∴ $ط^{۲}$ جس ر جس ر − $ص^{۲}$ جم ر جم ر = ۰ یا مس ر مس ر = $\frac{ص^{۲}}{ط^{۲}}$

یہان ظاہر ہی کہ واسطی کسی ایک خاص قیمت ر کے ہمین قیمت ر کی معلوم ہو جاویگی
یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ لانہایت جوڑی قطرونکی ایسی ہو سکتی ہین کہ جنکی نسبت سی اگر مساوات
لئی جاوے تو وہ ایسی مساوات مطلوب ہوگی کہ جسکی قطر متجانس ہونگی۔ اگر مس ر کم ہو
$\frac{ص}{ط}$ سی تو مس ر زیادہ ہونا چاہئے $\frac{ص}{ط}$ سی یعنی اگر ایک قطر ص ع شکل
گذشتہ مین خط منحنی سے ملی تو قطر متجانس ص د خط منحنی سے نہین ملیگا تو یہان سے
ثابت ہوا کہ ہر ایک دو اقطار متجانس مین سے ایک نا ممکن ہوتا ہی اور جونکہ حاصلضرب
مماسون کا مساوی ایک مقدار مثبت کی ہی تو دونو زاویہ حادہ یا منفرجہ ہونی چاہئین
اور جونکہ شکل گذشتہ مین وہ دونو حادہ ہین تو مقابل شاخون کے واسطی وہ دونو
منفرجہ ہونگے —

(۱۸۱) واضح ہو کہ ایسی قطر متجانس جو کہ متقاطع علی القوایم بہی ہون ایک ہی
جوڑا ہو سکتا ہی اور اسکا کچھہ ذکر فقرہ (۱۳۲) مین ہوا ہی —

(۱۸۲) تو اب مساوات خط منحنی کی یہہ ہوگی

$$\{ط^{۲} (جس ر)^{۲} - ص^{۲} (جم ر)^{۲}\} ی^{۲} + \{ط^{۲} (جس ر)^{۲} - ص^{۲} (جم ر)^{۲}\} لا^{۲} = - ط^{۲} ص^{۲}$$

اگر ہم متواتر فرض کرین ی = ۰ اور لا = ۰ تو ہمین حاصل ہونگی وہ فاصلی
جو کہ مابین نقطۂ شروع اور ان نقطون کے ہین جہانکہ خط منحنی قطع کرتا ہی نئے
محورونکو اور جونکہ ابہی ہمنے ثابت کیا ہے (۱۸۰) مین کہ ایک ان محورونمین سے خط منحنی
سے نہین ملتا ہی تو ایک فاصلہ کو انمین سے مقدار غیر ممکن سے تعبیر کرنا چاہئی آب

اب فرض کرو کہ محور لا کا خط منحنی سے شروع ہو کر ہین فاصلہ ط، پر ملتا ہی فرض کرو کہ طول دوسری محور کا ص، ١-١ یعنی فرض کرو کہ نئی قطر متجانسین ٢ط، اور ٢ص، ١-١ ہین اب اگر ر = ٠

تو { ط٢ (جس ر)٢ - ص٢ (جم ر)٢ } ط٢ = - ط٢ص٢

اور اگر لا = ٠ تو ∴ { ط٢ (جس ر)٢ - ص٢ (جم ر)٢ } - ص٢ = - ط٢ص٢

اور مساوات بدلی ہوئی یہہ ہوگی ط٢ص٢/ص٢ ر٢ - ط٢ص٢/ط٢ لا٢ = - ط٢ص٢

یا ر٢/ص٢ - لا٢/ط٢ = -١ یا ط٢ ر٢ - ص٢ لا٢ = - ط٢ ص٢ ثر

(١٨٣) بوسیلہ تبدیل کرنے کی ہمین حاصل ہوگئی تین مساواتین آینع

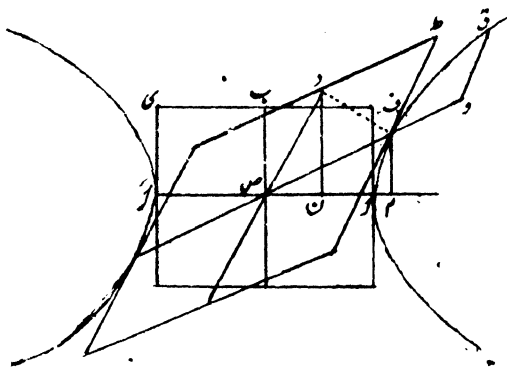
ط٢ { ط٢ (جس ر)٢ - ص٢ (جم ر)٢ } = - ط٢ ص٢ ....(١)

ص٢ { ط٢ (جس ر)٢ - ص٢ (جم ر)٢ } = + ط٢ ص٢ ....(٢)

ط٢ جس ر جس ر - ص٢ جم ر جم ر = ٠
یا مس ر مس ر = ص٢/ط٢ ....(٣)

اگر ہم عمل کرین مطابق (١٣٤) کی یا لکھین ص٢ - ص٢ کو اور - ص٢ بجای ص٢ کے تو ہمین حاصل ہوگا یہہ ط٢ - ص٢ = ط٢ - ص٢ یا حاصل تفریق مربعون کا جو کہ کھینچین جاوین اقطار متجانس پر مساوی ہوگا حاصل تفریق اون مربعونکو جو کہ کھینچی جاوین محورونپر — ثر ثر ثر ثر

(١٨٤) اور اب اگر ضرب کرین (١) کو (٢) مین اور مجدد کرین (٣) کو اور پھر تفریق کرین انکو اور اختصار کرین موافق (١٢٥) کے تو حاصل ہوگا یہہ

طا۲ صں ا جس (ر۔ ر) = طا صں اب ظاہر ہی کہ (ر۔ ر) مساوی ہی زاویہ
ف صں د کی جو کہ درمیان اقطار صں ف اور صں د کی واقع ہی یہاں سی معلوم ہوا کہ اگر

کھینچین ہم انجام اقطار متجانس سے خطوط متوازی ان اقطار کے تو ہمین حاصل ہوگی ساتھ
گذشتہ سی متوازی الاضلاع ف صں د ط = سطح ا صں ب ی تو اب ثابت ہوا
کہ تمام متوازی الاضلاع کھینچی گئے اس شکل مین مساوی ہین جو کہ ضرب
دینی سی محور دونی حاصل ہوگی

شکلین فقرہ (۱۸۳) اور (۱۸۴) کی بطور آینده کے بھی ثابت ہو سکتی ہین
فرض کرو کہ خط منحنی کے محور متقاطع علی القوایم ہین جیسا کہ فقرہ (۱۸۷) بیں ہین
اور فرض کرو کہ اوتار نقطہ ف سے لا اور ی ہین تو مساوات خط مستقیم صں د
کی یہہ ہوگی طا ی ی۔ صں۲ لا لا = ۰ دور کرنی سی لا اور ی کو بوسیلہ اس
مساوات اور مساوات خط منحنی کے (طا۲ ی۲۔ صں۲ لا۲ = ۔ طا۲ صں۲) تو ہمین حاصل
ہوگی اوتار صں ن اور صں د جنمین علامت ہ —۱ کی تعین ہوگی صں ن = لا

(۱۸۵) فقرہ (۱۸۲) سے معلوم ہوگا کہ مساوات خط منحنی کے جبکہ نشان لاَ اور یَ کی دوری کا جاوین یہہ ہوتی ہی $ط_1^2 ی^2 - ص_1^2 لا^2 = - ط_1^2 ص_1^2$

شکل گذشتہ مین ص ف = $ط_1$ اور ص د = $ص_1$ اور ص و = لا اور د ق = ی اگر مساوات کو اس صورت مین لکھین

$ی^2 = \frac{ص_1^2}{ط_1^2}(لا^2 - ط_1^2) = \frac{ص_1^2}{ط_1^2}(لا - ط_1)(لا + ط_1)$ تو اب

مربع ق و : سطح ف و اور و فَ :: مربع ص د : مربع ص ف

(۱۸۶) مساوات مماس کی نقطہ ق پر (جسکی وتر لاَ اور یَ ہین) یہہ ہی

$ط_1^2 ی یَ - ص_1^2 لا لاَ = - ط_1^2 ص_1^2$ ـ ثز ثز ثز

(۱۸۷) اب فرض کرو کہ محور خط منحنی کے ص اَ اور ص بَ ہین اور فرض کرو کہ اوتار ق کے لاَ اور یَ ہین اور چونکہ مساوات ص ف کی $ی = \frac{یَ}{لاَ} لا$ تو مساوات ص د کی یہہ ہوگی $ی = لا \, مس \, ر = لا \frac{ص_1^2}{ط_1^2}$

$= \frac{ط_1 یَ}{ص_1}$ اور د ن = ی = $\frac{ص_1 لاَ}{ط_1}$ یہانسے ہمین حاصل ہوگا یہہ $ط_1^2 - ص_1^2 =$

$لا^2 + ی^2 - لاَ^2 - یَ^2 = لاَ^2 + یَ^2 - \frac{ط_1^2 یَ^2}{ص_1^2} - \frac{ص_1^2 لاَ^2}{ط_1^2} = \frac{ص_1^2 لاَ^2 - ط_1^2 یَ^2}{ص_1^2} +$

$+ \frac{ط_1^2 یَ^2 - ص_1^2 لاَ^2}{ط_1^2} = \frac{ط_1^2 ص_1^2}{ص_1^2} - \frac{ط_1^2 ص_1^2}{ط_1^2} = ط_1^2 - ص_1^2$

اور مثلث ف ص د = منحرف ق م ن د + مثلث د س ن − مثلث ف س م

$= (لاَ - لا)\frac{یَ + ی}{2} + \frac{لا ی - لاَ یَ}{2} = \frac{لاَ ی - یَ لا}{2} =$

$\frac{1}{2}\left\{لاَ \frac{ص_1 لاَ}{ط_1} - یَ \frac{ط_1 یَ}{ص_1}\right\} = \frac{ص_1^2 لاَ^2 - ط_1^2 یَ^2}{2 ط_1 ص_1} = \frac{ط_1^2 ص_1^2}{2 ط_1 ص_1} = \frac{ط_1 ص_1}{2}$

تو اب معلوم ہوا کہ متوازی الاضلاع ف ص د = $ط_1 ص_1$

سم ر = $\frac{ص^2 لا^2}{ط^2 ی^2}$ لا یا $ط^2 ی^2 ی^2$ − ص ^{2} لالا ^{2} = ۰ لیکن مساوات مماس کی نقطہ ف پر یہہ ہوگی ی ی ^{2} ÷ ص ^{2} لالا ^{2} = − ط ^{2} ص ^{2} یہانسی معلوم ہوا کہ خط ص م یا قطر متجانس ص ف کا متوازی ہی اوسس مماس کی جو کہ ف پر کہینچا جاوے مساوات قطر متجانس کی وہی ہی جو کہ مماس کی ہی سوای جز اخیر − ط ^{2} ص ^{2} کے ۔

(۱۸۸) فرض کرو کہ لا ^{2} اور ی ^{2} اوتار نقطہ ف کی ہین تو بوسیلہ اس مساوات ط ^{2} − ص ^{2} = ط ^{2} − ص ^{2} حاصل ہوگا پہر ص ^{2} = ط ^{2} − ط ^{2} + ص ^{2} =

= لا ^{2} + ی ^{2} − ط ^{2} + ص ^{2} = لا ^{2} + $\frac{ص^2}{ط^2}$ (لا ^{2} − ص ^{2}) − ط ^{2} + ص ^{2} =

= $\frac{ط^2 + ص^2}{ط^2}$ لا ^{2} − ط ^{2} = ی ^{2} لا ^{2} − ط ^{2} = (ی لا ^{2} − ط) (ی لا ^{2} + ط) =

= ی ی ^{2} یعنے مربع قطر متجانس ص د = سطح س ف اور ہ ف

(۱۸۹) اگر خط ع ف کا نقطہ ف سے عمود ص د پر کہینچا جاوے جیسا کہ شکل گذشتہ سے ایک شکل پہلی مین کہینچا ہی تو سطح ع ف اور ص د =

= ط ص (۱۸۴) ∴ ع ف = $\frac{ط ص}{ص ا}$ = $\frac{ط ص}{\sqrt{ط^2 - ط^2 + ص^2}}$ = $\frac{ط ص}{\sqrt{ی ی}}$

اور ف ک = $\frac{ص}{ط}$ مالی ی ^{2} اور ف ک ^{2} = $\frac{ط}{ص}$ مالی ی ^{2} یہانسی ثابت ہوا کہ سطح ف ک لعد ع ف = مربع ب ص اور سطح ف ک ^{2} اور ع ف = مربع ا ص اور سطح ف ک اور ف ک ^{2} = مربع ص د —

دتر التمام کی بیانمین

(۱۹۰) اگر دو خط ایک نقطہ سے جو کہ خط منحنی پر ہی دو انجام ایک قطر تک کہینچے

اگر فاصلہ ص ف = ع اور ب = اوس عمود کی جو کہ کہینچا جاوی مرکز سے مماس پر تو یہہ مساوات ہوگی ب ^{2} = $\frac{ط^2 ص^2}{ع^2 - ط^2 + ص^2}$

کھینچے جاوین تو انہین دونو خطونکو وتر التمام کہتے ہین۔ اور انکو وتر التمام اعظم اوس
وقت کہتے ہین جبکہ قطر محور کلان ہو تو مساوات مین دو وتر ان کی یہہ ہین
$د - د' = ا(ل - ل')$ اور $د + د' = ا'(ل + ل')$ اور بوسیلہ ان مساواتون
کے ہمین حاصل ہوگا یہہ $ا ا' = \frac{ص^2}{ط^2}$ جیسا کہ (۱۴۱) مین ثابت ہوا ہے
یعنی حاصل ضرب مماس اُن زاویون کا جو کہ یہہ اوتار بناتی ہین قطر سے مساوی
ایک مقدار مقررہ کی ہے اور برعکس اسکی بھی ثابت ہوسکتا ہے موافق (۱۴۱) کے
(۱۹۱) وہ زاویہ جو کہ درمیان دو اوتار التمام ہے صورت آیندہ سے معلوم ہوسکتا ہے
مس ق ن $= \frac{۲ ص^2}{ط^2 + ص^2}$ $\frac{ل د' - د ل'}{د^2 - د'^2}$ ...... (دیکھو اوس شکل کو جو کہ فقرہ
(۱۴۱) مین لکھی ہے) اور اگر $\overline{ار}$ اور $\overline{ا'ر}$ اوتار التمام اعظم کھینچے جاوین ایک
نقطہ ر سے تو مس $ا ر ا' = \frac{۲ ط ص^2}{(ط^2 + ص^2) ر}$ واضح ہو کہ زاویہ $ا ر ا'$ کا ہمیشہ
حادہ ہوگا اور کم ہوگا جاویگا زاویہ قایمہ سے $\mp$ تک اور زاویہ $ا ا' ر$ اسی وقت
مین زیادہ ہوتا جاویگا ایک قایمہ سے دو قایمہ یعنی ۱۸۰° تک یہانسے یہانسے ثابت
ہوا کہ زاویہ درمیان دو اوتار التمام اعظم کے ایک ایسا زاویہ ہوگا جو کہ واقع ہوگا مابین
$\mp$ اور ۱۸۰° کے واضح ہو کہ ایسی اوتار بھی کھچ سکتے ہین جنکے مابین ایک زاویہ
مساوی ایک زاویہ مفروضہ کے ہوگا اور یہہ اسطرح ہوگا کھینچو ایک قطعہ دایرہ کا
جسمین ایک زاویہ واقع ہوسکے مساوی ایک زاویہ مفروضہ کی کسی قطر بعید البیضوی کے
سوای محور کلان کے اور ملاؤ خطوط درمیان دو انجام اس قطر کے اور اوس نقطہ کے
جہانکہ یہہ قطعہ دایرہ کا تقاطع کرتا ہے بعید البیضوی سے اور اب اوتار التمام اعظم متوازی

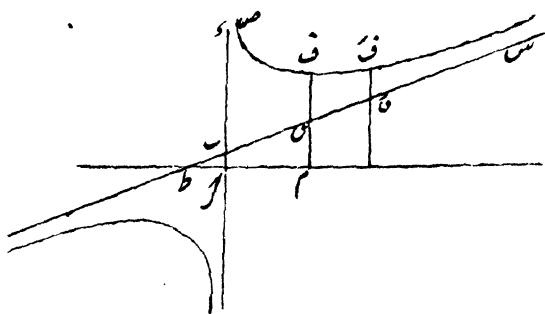
انکی کہیچ سکتے ہین

(١٩٢) چونکہ قطر متجانس متوازی اوتار التمام ہوتی ہین موافق (١٤٤) کے اسیواسطی وہ اسطرح سی کہیچ سکتی ہین کہ مابین انکی ایسا زاویہ ہوگا جو کہ درمیان ٠ اور ٩٠ بن سکتا ہی —

(١٩٣) واضح ہو کہ مساوی قطر متجانس بعید البیضوی مین نہین ہوتی ہین لیکن اس خاص خط منحنی مین جسمین ص = ط اور اس صورتمین ہمین حاصل ہوگا یہہ ط۲ - ص۲ = ط۲ - ص۲ = ٠ یہانسی ثابت ہوا کہ قطر متجانس ط۱ اور ص۱ مساوی ایک دوسری کی ہین اور مساوات اس خط منحنی کے جسکو کہ بعید البیضوی مساوی القطرین کہتی ہین یہہ ہی ی۲ - لا۲ = ط

خطوط متنفر الملاقات کی بیانمین

(١٩٤) ہمنی ابہی بیان کیا ہی کہ اکثر خواص بیضوی کے بوسیلہ تہوڑی تبدیلی کے خواص بعید البیضوی کی مطابق ہوتی ہین لیکن بعض خاصیتین بعید البیضوی کی ایسی ہین جو کہ بیضوی مین نہین پائی جاتی ہین یہہ فرق صرف بسبب شکل عجیب اوسکی شاخون کی جو لانہایت پہیلتی ہین واقع ہوتی ہین ظاہر ہی کہ مس ر مس ر = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (١٨٠) اور جیساکہ قیمت مس ر کی قریب $\frac{ص}{ط}$ کی آتی ہی ویسی قیمت مس ر کی بہی قریب اسکی آتی ہی — ہم اب بیان کرین گے کہ خط منحنی قریب بہی خط متنفر الملاقات کے آتا ہی لیکن اوسسی مین ملتا ہی اور چونکہ یہہ صفت صرف بعید البیضوی مین ہی نہین پائی جاتی ہی اسیواسطی اسکو اب ہم عموماً لکہین گے —

(۱۹۵) فرض کرو کہ س ف ف ایک ایسا خط منحنی ہے جسکی مساوات بعد اختصار
کی یہہ ہوگی ی = ط لا + ص + س/لا اور مان لو کہ ط ب س وہ خط ہے جسکی
مساوات یہہ ہے ی = ط لا + ص واسطے ایک خاص قیمت لا کی ی تر ق م کا
حاصل ہوگا اور جبکہ جمع کرینگے اس خط پر س/لا کو تو ہمین حاصل ہوگا ایک نقطہ
ف خط منحنی کا اسیطرحسے ہم دریافت کرسکتے ہین نقاط (ف اور ف وغیرہ) جو

خط منحنی اور خط مستقیم پر ہونگے - چونکہ س/لا کم ہوتا ہے جبکہ لا زیادہ ہوتا ہے
اسیواسطے خط ف ق کا کم ہوگا ف ق سے جیسا کہ لا زیادہ ہوتا ہے اتنا
ہی خط ف ق کا کم ہوتا ہے اور جبکہ لا نہایت زیادہ ہوگا تو ف ق نہایت کم
ہوگا یا خط منحنی لا نہایت قریب خط ط ب س کے آویگا لیکن پھربھی حقیقت مین
اوسسے نہین ملیگا اسیواسطے خط ط ب س کو خط متقرب الملاقات خط منحنی کا کہتے ہین
مساوات خط ط ب س کے یہہ ہے ی = ط لا + ص اور یہی مساوات خط منحنی کے
ہوجاویگی جبکہ لا اوسسے زیادہ کیا جاوے

(۱۹۶) یہی دلیل اسوقت بھی عمل مین آسکتی ہے جبکہ قوای منفی لا کی ایک سے

زیادہ ہوں اگر صورت عام مساوات خط منحنی کی یہہ ہو

$$ی = وغیرہ + م\,لا^{3} + ن\,لا^{2} + ط\,لا + ص + \frac{س}{لا} + \frac{ر}{لا^{2}} + وغیرہ$$

تو مساوات خط متنفر الملاقات منحنی کے یہہ ہوگی $ی = وغیرہ + م\,لا^{3} + ن\,لا^{2} + ط\,لا + ص$ اور مساوات $ی = وغیرہ + م\,لا^{3} + ن\,لا^{2} + ط\,لا + ص + \frac{س}{لا}$

سی حاصل ہوتا ہی ایک خط زیادہ متنفر الملاقات کا بہ نسبت پچھلی مساوات کی یہاں سی حاصل ہوتا ہی ایک سلسلہ خطوط منحنی کا جو کہ زیادہ تر قریب اصلی خط منحنی کے اوینگی ۔

(۱۹۷) اب ہم استعمال کرینگے اوس ترکیب کا اون خط منحنیوں مین جنکی مساوات درجہ دویم کی ہی اور انکی مساوات عام یہہ ہی موافق فقرہ (۷۵) کے

$$ی = -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm \frac{1}{۲ط}\sqrt{(ص^{2} - ۴ط\,س)\,لا^{2} + ۲(ص\,د - ۲ط\,ی)\,لا + د^{2} - ۴ط\,ف}$$

$$= -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm \sqrt{م\,لا^{2} + ن\,لا + ع}$$ موافق فرض کی

$$= -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm لا\sqrt{م}\left\{1 + \frac{ن\,لا + ع}{م\,لا^{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm لا\sqrt{م}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{ن\,لا + ع}{م\,لا^{2}}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{ن\,لا + ع}{م\,لا^{2}}\right)^{2} + وغیرہ\right\}$$

$$= -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm \sqrt{م}\left\{لا + \frac{1}{2}\,\frac{ن}{م}\right\} \pm \frac{\text{اجزای مقدار مقررہ}}{\text{قوای لا پر}}$$ تو اب معلوم

ہوتا ہی کہ مساوات خط متنفر الملاقات کی یہہ ہی $ی = -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm \sqrt{م}\left\{لا + \frac{1}{2}\,\frac{ن}{م}\right\} = -\frac{ص\,لا + د}{۲ط} \pm \frac{\sqrt{ص^{2} - ۴ط\,س}}{۲ط}\left\{لا + \frac{ص\,د - ۲ط\,ی}{ص^{2} - ۴ط\,س}\right\}$

چونکہ $ص^{2} - ۴ط\,س$ منفی ہی بیضوی مین اسیواسطی اسمین ہونہین مساوات گذشتہ کسی خط منحنی سے تعلق نہین رکھی گی اور جبکہ یہہ صورت ہوگی $ص^{2} - ۴ط\,س = ۰$

کہینچی جاوین تو اس صورت مین مساوات گذشتہ مین لا^{2} پایا جاویگا اسواسطے یہہ مساوات تعلق رکہی گی خط مستغر الملاقات منحنے سی تو اب معلوم ہوا کہ حرف تعبیدی کا خط مستغر الملاقات مستقیم خط ہی اور اس $\pm$ علامت سے معلوم ہوتا ہی کہ دو خط مستغر الملاقات ہونگی اور انکو دو قطر تنصیف کریگا جسکی یہہ مساوات ہی

$$\text{ی} = -\frac{\text{ص لا} + \text{د}}{2\,\text{ط}}$$

اور خطوط مستغر الملاقات مرکز سی بہی گذرتی ہین کیونکہ اگر فرض کرین

$$\text{لا} = \frac{2\,\text{ط ی} - \text{ص د}}{\text{ص}^{2} - 4\,\text{ط س}} \quad \text{تو ی} = -\frac{\text{ص لا} + \text{د}}{2\,\text{ط}} = \frac{2\,\text{س د} - \text{ص ی}}{\text{ص}^{2} - 4\,\text{ط س}}$$

اور یہہ قیمتین لا اور ی کے اوتار مرکزی ہین —

(١٩٨) اگر مساوات خط منحنی مین اجزای لا^{2} اور ی^{2} کی پائی نجاوین تو ایک تہوری تبدیلی کے وسیلے سے ہم مساوات کو ایک ایسی سلسلہ سی بدل سکتی ہین کہ اوسمین قوی ی اور لا کی منفی ہونگی مثلاً اگر مساوات یہہ ہو $\text{ص لا ی} + \text{س لا}^{2} + \text{د ی} + \text{ی لا} + \text{ف} = 0$

$$\text{تو ی} = -\frac{\text{س لا}^{2} + \text{ی لا} + \text{ف}}{\text{ص لا} + \text{د}} = -\frac{\text{س لا}^{2} + \text{ی لا} + \text{ف}}{\text{ص لا}\left(1 + \frac{\text{د}}{\text{ص لا}}\right)} =$$

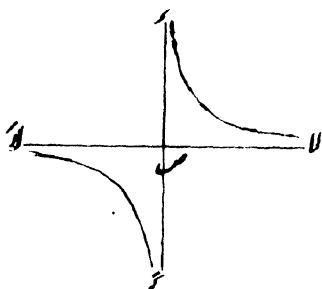
$$-\frac{\text{س لا}^{2} + \text{ی لا} + \text{ف}}{\text{ص لا}}\left(1 + \frac{\text{د}}{\text{ص لا}}\right)^{-1} =$$

$$-\left(\frac{\text{س لا}}{\text{ص}} + \frac{\text{ی}}{\text{ص}} + \frac{\text{ف}}{\text{ص لا}}\right)\left(1 - \frac{\text{د}}{\text{ص لا}} + \left(\frac{\text{د}}{\text{ص لا}}\right)^{2} - \text{وغیرہ}\right)$$

جبکہ ضرب کرین ہم اور دور کرین باقی قوای لا کو تو حاصل ہوگی مساوات خط مستغر الملاقات کی جو یہہ ہی

$$\text{ی} = -\frac{\text{س لا}}{\text{ص}} - \frac{\text{ی}}{\text{ص}} + \frac{\text{س د}}{\text{ص}^{2}} \quad \text{یا ص ی} + \text{س لا} = \frac{\text{س د} - \text{ص ی}}{\text{ص}}$$

دوسرا خط مستغر الملاقات اس طرح حاصل ہو سکتا ہی فرض ایک ایسی خاص قیمت لا کی جسکے وسیلہ سی ایک صحیح لانہایت قیمت ی کی حاصل ہو اس قیمت لا کے وسیلہ سے مقام دوسرے خط مستغر الملاقات کی معلوم ہوجایگا اب اگر فرض کرین ہم $\text{ص لا} + \text{د} = 0$ تو $\text{ی} = \infty$

یہان سے ثابت ہوا کہ اگر خط نقطہ (لا = − د/ص) سے متوازی محور ی کے کھینچا جاوے تو یہہ خط متنفر الملاقات مطلوب ہوگا اگر مساوات یہہ ہو ط ی۲ + ص لا ی + د ی + ی لا + ف = ۰ تو مساوات خط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی ط ی + ص لا = (ط ی − ص د)/ص اور ص ی + ی = ۰ اور دوسرا خط متنفر الملاقات متوازی محور ی کی ہے اگر مساوات یہہ ہو ص لا ی + د ی + ی لا + ف = ۰ تو مساواتین خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہونگی ص لا + د = ۰ اور ص ی + ی = ۰ پہلا خط متنفر الملاقات متوازی ی کی ہے اور دوسرا موازی محور لا کی ہے

(۱۹۹) اگر مساوات یہہ ہو ص لا ی + ف = ۰ تو اس صورت مین خطوط متنفر الملاقات محور ہونگے مقام خط منحنی کا اس مساوات سے معلوم ہوجاویگا

ی = − ف/(ص لا) = م/لا موافق فرض کے فرض کرو کہ ص لا اور ص ی محور ہین اب فرض کرو کہ لا = ۰ تو ی = ∞ جتنا لا زیادہ ہوگا اوتنا ہی ی کم ہوگا اور جب لا = ∞ تو ی = ۰ تو اب ہمین حاصل ہوگی شاخ ی لا کی اگر لا منفی ہو تو ی بہی منفی ہوگا اور جبکہ لا زیادہ ہو ۰ سے ∞ تک تو ی کم ہونا شروع کریگا ∞ سے ۰ تک تو اب حاصل ہوگی

ہمین دوسری شاخ $\text{ی}\ \text{لاَ}$ کے برابر اور مثل پہلی کے

(۲۰۰) دریافت کرو مساوات خطوط متنفر الملاقات کی مساوات بعید البیضوی سی جبکہ مرکز نقطۂ شروع اس مساوات کا ہو ظاہر ہی کہ

$$\text{ی} = \pm \frac{\text{ص}}{\text{ط}} \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2} = \pm \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\, \text{لا} \sqrt{1 - \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2}} =$$

$\pm \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\, \text{لا} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}^2} + \text{وغیرہ} \right\}$ تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی $\text{ی} = \pm \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\, \text{لا}$ واسطی کہینچنے ان خطوط کے تمام کرو متوازی الاضلاع کو محوروں پر قطر اس متوازی الاضلاع کی لوکس مساوات گذشتہ کے ہوگی تو اب معلوم ہوا کہ یہی خطوط متنفر الملاقات مطلوب ہین یعنی خطوط $\overline{\text{ص ی}}$ اور $\overline{\text{ص یَ}}$ کہینچے گئے خطوط متنفر الملاقات ہین — مساوات خطوط متنفر الملاقات کی آسانی یاد رہ سکتی ہی کیونکہ یہہ مساوات مثل مساوات خط منحنی کی ہی سواے جز اخیر کی اور دونو سے مساواتین یہہ ہین $\text{ط}^2\text{ی}^2 - \text{ص}^2\text{لا}^2 = -\text{ط}^2\text{ص}^2$ مساوات خط منحنی کی

اور $\text{ط}^2\text{ی}^2 - \text{ص}^2\text{لا}^2 = 0$ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی ہے

اگر مساوات بعید البیضوی کے محور قطر متجانس ہون تو اس صورت مین مساواتین گذشتہ اس شکل کی ہو جاوینگی

$\text{ط}_1^2\text{ی}^2 - \text{ص}_1^2\text{لا}^2 = -\text{ط}_1^2\text{ص}_1^2$ مساوات خط منحنی کی ہی

اور $\text{ط}_1^2\text{ی}^2 - \text{ص}_1^2\text{لا}^2 = 0$ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی ہی

(۲۰۱) اگر $\text{ص} = \text{ط}$ اور مرکز بعید البیضوی کا نقطہ شروع فرض

فرض کیا جاوے اور محور متقاطع علی القوایم تو $ی^2 - لا^2 = - ط$

اسواسطے مساوات خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی $ی^2 - لا^2 = ۰$

یا $ی = \pm لا$ یعنے خطوط متنفر الملاقات زاویہ ۴۵° کا محوروں سے بناتی ہین اور زاویہ ۹۰° کا آپس مین یہانسے معلوم ہوا کہ محور بعید البیضوی مساوی القطرین کے متقاطع علی القوایم ہوتی ہین — ش

(۲۰۲) اگر اس خط منحنی کا نقطہ شروع ز فرض کیا جاوے اور محور متقاطع علی القوایم تو ظاہر ہی کہ مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہوگی

$ی = \pm \frac{ص}{ط} (لا^2 - ۲ ط لا)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{ص}{ط} لا \left(۱ + \frac{۲ ط}{لا}\right)^{\frac{1}{2}}$ جبکہ

پھیلاوین یالیوین صورت مفصلہ اسکی جذر کی اور چھوڑ دین قوای منفی لا کو تو حاصل ہوگی یہہ مساوات خطوط متنفر الملاقات کی

$ی = \pm \left(\frac{ص}{ط} لا + ص\right)$

(۲۰۳) اگر فرض کرین ہم مساوات ایک خاص خط مستقیم کی ($ی = \frac{ص}{ط} لا + س$) اور یہہ خط متوازی خط متنفر الملاقات کی ہو اور دور کرین ی کو بوسیلہ اس مساوات کی اور مساوات خط منحنی کے تو ہمین حاصل ہوگی صرف ایک قیمت لا کی تو اب ثابت ہوا کہ ایک خط مستقیم متوازی خط متنفر الملاقات کی قطع کرتا ہی خط منحنی کو ایک نقطہ پر

(۲۰۴) فقرہ (۷۷) ہمنی بیان کیا ہی کہ بعض صورتون مین صورت خط منحنی کی آسانی سے نہین معلوم ہوسکتی ہے مثلاً جبکہ خط منحنی

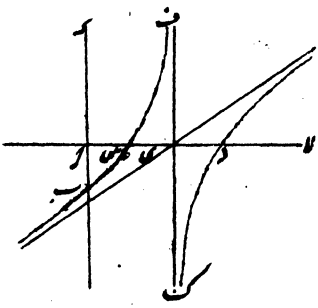
نقطہ کو تقاطع نگری دو اقطار متجانس مین سے تو اس صورت مین ایک طرح کا
اشکال واقع ہوگا دریافت کرنی مین صحیح صورت خط منحنی کے اور ان خطوط
متنفر الملاقات بہت فایدہ مند ہوگی واسطی معلوم کرنے مقام خط منحنی
کی مثلاً اگر مساوات یہہ ہو لا ی = لا۲ + ص لا + س۲ یا ی = لا + ص
+ س۲/لا اگر فرض کیا جاوے لا = ۰ تو ی = ∞ اور جبکہ لا
بہت بڑا فرض کیا جاوے تو ی تقریباً مساوی لا + ص کی ہوگا تو اب
معلوم ہوا کہ خطوط ا ی اور ط ب س شکل (۱۹۴) مین خطوط متنفر
الملاقات بعید البیضوی سے تعبیر کرینگے اور چونکہ خط منحنی محور ولسی نہین ملتا
تو معلوم ہوا کہ یہہ خط منحنی واقع ہی درمیان زاویہ ی ب س کی اور مقابل
کی زاویہ ط ب ا کے تو اب رستہ خط منحنی کا بخوبی معلوم ہوگیا جیسا کہ
شکل (۱۹۴) مین ہی۔

مثال (۲)

ی (لا − ۲) = (لا − ۱) (لا − ۳) یا ی = (لا − ۱) (لا − ۳) / (لا − ۲) چونکہ
ص۲ − ۴ س مثبت ہی تو معلوم ہوتا ہی کہ یہہ مساوات بعید البیضوی
کی ہی تو اب کھینچو محور متقاطع علی القوایم ا لا اور ا ی اور دریافت کرو
وہ نقاط جہانکہ یہہ خط منحنی تقاطع کرتا ہی محورون کو ∴ فرض کرو
کہ لا = ۰ ∴ ی = − ۳/۲ = ا ب اور فرض کرو کہ ی = ۰
∴ لا = ۱ = ا س اور لا = ۳ = ا د تو اب معلوم ہوا کہ
خط منحنی نقاط ب س اور د سی گذرتا ہی واسطی دریافت کرنی

خطوط متنفر الملاقات کی فرض کرو کہ لا = ۲ ؁ ی = ∞ تو اب

ثابت ہوا کہ اگر ا ی = ۲

توخط ف ی ک جو کہ عمود ہے آلا پر

ایک خط متنفر الملاقات ہی

اور اب دریافت کرو دوسرے

خط متنفر الملاقات کو تو اب

ظاہر ہی کہ ی = (لا - ۱)(لا - ۳) / (لا - ۲) = (لا - ۱)(لا - ۳) / (لا × (۱ - ۲/لا)) =

= (لا - ۱)(لا - ۳) / لا × (۱ - ۲/لا)^{-۱} =

(لا² - ۴لا + ۳) / لا (۱ + ۲/لا + وغیرہ) = (لا - ۴ + ۳/لا)(۱ + ۲/لا + وغیرہ)

لا - ۴ + ۲ + ۵/لا + وغیرہ تو اب یہاں سے معلوم ہوا کہ مساوات

دوسری خط متنفر الملاقات کی یہ ہی ی = لا - ۲ اسی واسطے اس خط

کو کھینچنا چاہیے نقطہ ی سے بناتا ہوا زاویہ ۴۵° کا محور آلا سے

اب ہم مقام خط منحنی کا بخوبی دریافت کرسکتے ہیں کیونکہ واسطے تمام قیمتوں

لا کے جو کہ کم ہیں آ سے ی منفی ہوگا تو اب اس فرض کی موافق شاخ

ب س حاصل ہوگی اور واسطے ایسی قیمتوں لا کے جو کہ آ سے زیادہ اور

۲ سے کم ہیں ی مثبت ہوگا اور زیادہ ہوتا جاویگا ۰ سے ∞

تو اب اس فرض کے وسیلہ سے شاخ س ف کے حاصل ہوگی اور

واسطی ایسی قیمتون لا کے جو کہ ۲ سے زیادہ اور ۳ سے کم ہین ی منفی
ہوگا تو اب پیدا ہوگے شاخ ک د کی اور واسطے اون قیمتون لا کے
جو کہ ۳ سی زیادہ ہین ی مثبت اور قریب آتا جاویگا لا - ۲ کے
یہانسی معلوم ہوگی وہ شاخ جو کہ نقطہ د سی دوسری خط متنفر الملاقات
کی طرف پہیلتی ہی واسطی تمام قیمتون منفی لا کے ی منفی ہوگا اور
زیادہ ہونا شروع کریگا - ۳/۲ سی ∞ تک اور قریب آتا جاویگا
(- لا - ۲) کی یہانسی معلوم ہوا کہ خط منحنی نقطہ ب سی نیچی کو پہیلتا ہی
طرف خط متنفر الملاقات کی - مثال (۳)

ی (لا - ط) = لا (لا - ۲ ط) یہان لا = ط اور ی = لا - ط
ساواتین خطوط متنفر الملاقات کی ہین شکل اسکی پچہلی شکل کی ہے
اگر فرض کیا جاوے نقاط ا ر اور س کو منطبق ایک دوسری پر
مثال (۴) ی^۲ = ط لا^۲ + لا^۲ ظاہر ہی کہ یہان محور ی کا
ایک خط متنفر الملاقات ہوگا کیونکہ جب لا = ۰ تو ی = ∞
اور ی = لا (۱ + ط/لا)^۲ = لا + ۲ ط + ط^۲/لا تو اب یہان سے معلوم
ہوتا ہی کہ دوسری خط متنفر الملاقات کی یہہ مساوات ہی ی = لا + ۲ ط
(۲۰۵) باب (۷) مین ہمنے بخوبی بحث مساوات درجہ دوم کی
لکہی ہی اور وہان ترکیب اسکی اختصار کی بہی بیان کی گئی ہی اور وہان
یہہ بہی لکہا ہی کہ اگر مساوات متعلق بعید البعضوی ہو تو مساوات

اسکی بعد اختصار کے یہہ ہوجاویگی ا ی'۲ + س لا'۲ + ف = ۰ (۸۴)
واضح ہو کہ یہی مساوات اسقدر مختصر ہوسکتی ہی کہ اسکی صورت بعد اختصار
کی یہہ ہوجاویگی لا ی = کہ۲ اور چونکہ یہہ صورت بہت فایدہ مند ہی
واسطی بحث خطوط مستقر الملاقات کی اسیواسطے اب ہم اسکو بیان کرینگے

(۲۰۶) فرض کرو کہ محور مساوات متقاطع علی القوایم ہین اور صورت
اسکی یہہ ہی ا ی۲ + ب لا ی + س لا۲ + د ی + ی لا + ف = ۰ اب فرض
کرو کہ لا = لا' + م اور ی = ی' + ن اور اب موافق فقرہ (۸۰)
فرض کرو کہ امثال لا' اور ی' کی مساوی صفر کی ہین تو اب بوسیله
اس تبدیل کے جو مساوات کہ حاصل ہوگی وہ متعلق مرکز سی ہوگی
اور صورت اسکی یہہ ہوجاویگی ا ی'۲ + ب لا' ی' + س لا'۲ + ف' = ۰
اسیطرحسی واسطی دور کرلنے امثال لا' اور ی'۲ کی بہ لوسمت
محوروں متقاطع علی القوایم کے طرف ترچھی محوروں کے (۵۷)

∴ ی' = لا'' جب ر + ی'' جم ر'

اور لا = لا'' جم ر + ی'' جم ر' بوسیله لکھنی ان قیمتوں
لا' اور ی' کی مساوات گزشته مین اور علی الترتیب لکھنی قوای لا'
اور ی' وغیرہ کی حاصل ہوگا یہہ

ی''۲ {ا (جب ر')۲ + ب جب ر' جم ر' + س (جم ر')۲} +

لا''۲ {ا (جب ر)۲ + ب جب جم ر + س (جم ر)۲} +

لاً یؔ { ۲ا جبس رَ جس ر + ب (جبس ر جم رَ + جبس رَ جم ر) +

۲ س جم رَ جم ر } + فَ = ۰ چونکہ اس مساوات مین دو مقدارین

ر اور رَ کی غیر منقطع ہین اسیواسطی فرض کر سکتے ہین امثال لاً

اور یؔ = ۰ ∴ ا (جبس ر)۲ + ب جبس ر جم ر + س (جم ر)۲ = ۰ (۱)

اور ا (جبس رَ)۲ + ب (جبس رَ) (جم رَ) + س (جم رَ)۲ = ۰ (۲)

تقسیم کرنیسی اول مساوات کو (جم ر)۲ پر ہمین حاصل ہوگا یہہ

ا (مس ر)۲ + ب مس ر + س = ۰ ∴

مس ر = ب ± √(ب۲ − ۴ ا س) / ۲ ا چونکہ صورتین دونو

مساواتون گذشتہ کی ایکسی ہین تو حل کرنے سی مساوات دویم کو ہمین

حاصل ہوگی وہی قیمت (مس رَ) کی جو کہ (مس ر) کی حاصل ہوئی ہی

یعنی سمت دونونئی محورونکی (مس ر) کے وسیلہ سے دریافت ہو سکتی ہی

اور ظاہر ہی کہ اس صورت مین شکل مساوات کی یہہ ہوگی

بَ لاً یؔ + فَ = ۰

(۲۰۷) اب دریافت کرو قیمت بَ کی ظاہر ہی کہ

بَ = ۲ ا جبس رَ جبس ر + ب (جبس ر جم رَ + جبس رَ جم ر) +

+ ۲ س جم رَ جم ر = جم رَ جم ر { ۲ ا مس رَ + مس ر +

ب (مس رَ + مس ر) + ۲ س } ہم ابہی ثابت کر آئی ہین

مس ر مس رَ = س/ا اور مس ر + مس رَ = − ب/ا اسیواسطے

جم رجم ر = $\frac{1}{\sqrt{(ا - س) + ب^2}}$

∴ $\overline{ب}^2 = \frac{1}{\sqrt{(ا - س) + ب^2}} \{۲ س - \frac{ب^2}{ا} + ۲ ی\} =$

$-\frac{ب^2 - ۴ ا س}{\sqrt{(ا - س) + ب^2}}$ + ف (۸۰) اور ف' = $\frac{ای^2 - س د^2 - ب د ی}{ب^2 - ۴ ا س}$

تواب ثابت ہوا کہ $-\frac{ب^2 - ۴ ا س}{\sqrt{(ط - س)^2 + ب^2}}$ لاً ۲ + $\frac{ای^2 + س د^2 - ب د ی}{ب^2 - ۴ ا س}$

+ ف = ۰ ثر ثر ثر ثر

(۱۰۸) اگر اصلی محور ترچھی ہون تو ہمین صورتین (۵۶) کی لینی چاہئیں

اور پھر موافق گذشتہ کی انپر عمل کرکے ہمین حاصل ہوگا یہہ

مس ر = ± $\frac{\sqrt{ب^2 - ۴ ا س} - ب + ۲ س جم ک}{۲ (ا + س (جم ک)^2 - ب جم ک}$ اور

ب' = $\frac{-(ب^2 - ۴ ا س)}{\sqrt{(ا + س - ب جم ک)^2 + (ب^2 - ۴ ا س) (جب ک)^2}}$

(۱۰۹) مثالین آیندہ کو کہ جنکی مساواتین محور متقاطع علی القوائم

ہین ایسی مساواتون سی تبدیل کرنی چاہئی جو متعلق خطوط متقرالملاقات

سی ہون

مثال (۱)

ر^۲ - ۱۰ ل ر + لا^۲ + ر + لا + ۱ = ۰ یہان م = $\frac{۱}{۸}$ اور ن = $\frac{۱}{۸}$

اور ف' = $\frac{۹}{۸}$ اور مس ر = ۵ ± ۲ $\sqrt{۶}$ اور ب' = $-\frac{۹۶}{۵}$

∴ $-\frac{۴۸}{۵}$ لاً ۲ + $\frac{۹}{۸}$ = ۰ یا لاً ۲ = $\frac{۱۵}{۱۲۸}$

مثال (۲) ۴ ر^۲ - ۸ ل ر - ۴ لا^۲ - ۴ ر + ۲۸ لا - ۱۵ = ۰

یہان ب' = - ۸ $\sqrt{۲}$ اور ف' = ۲ ∴ ۸ $\sqrt{۲}$ لاً ۲ + ۲ = ۰

مثال (۳) $\frac{ط^2}{لا^2}$ + $\frac{ص^2}{ی^2}$ = ۱ یا لاً یً = $\frac{1}{۲ ۱ ۲}$

یا لا ی = ط ی + ص لا واضح ہو کہ اس مساوات مین محور متوازی خطوط متنفر الملاقات کے ہین (۱۹۸) واسطے بدلنے نقطہ شروع کے طرف مرکز کی فرض کرو کہ ی = یً + ن اور لا = لاً + م یہانسی معلوم ہوا کہ م = ط اور ن = ص اور اسیواسطے صورت مساوات بعد اختصار کی یہہ ہوگی لاً یً = ط ص —

(۲۱۰) اگر ر اور رً تعبیر کرین اون زاویون کو جو کہ خطوط متنفر الملاقات محور اصلی کے بناتے ہین اور ہم ابہی کر آئے ہین فقرہ (۲۰۶) کہ ا (مس ر)^۲ + ب مس ر + س = ۰ ∴ مس ر مس رً = $\frac{س}{ا}$

اب اگر فرض کیا جاوے س = -ا تو صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوجاویگی مس ر مس رً = -۱ یا مس ر مس رً + ۱ = ۰ تو اب معلوم ہوا موافق (۷۴) کے کہ زاویہ درمیان خطوط متنفر الملاقات کی = ۹۰° تو اب ثابت ہوا کہ اگر مساوات بعید البیضوی مین س = -ا تو اس بعید البیضوی کے محور متقاطع علی القوایم ہونگے —

مثال (۴) ی^۲ - لا^۲ = ۲ لا ی یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہے اور اسکا نقطہ شروع مرکز اور محور متقاطع علی القوایم ہین اور جبکہ حاصل کرینگے دونو قیمتین (مس ر) کی بوسیلہ مساوات (۲۰۶) کی تو حاصل ہوگا مس ر = ۱ اور مس رً = -۱ یعنے ر = ۴۵° اور رً = ۱۳۵°

اور مساواتین تبدیل کرنی کی یہہ ہوجاینگی $ی = \frac{لا - ی}{\sqrt{2}}$ اور

$لا = \frac{لا + ی}{\sqrt{2}}$ ∴ $\left(\frac{لا - ی}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{لا + ی}{\sqrt{2}}\right)^2 = ۲ہ$

$\therefore ۲ لا ی = ۲ ہ$ اور $لا ی = \frac{ہ}{۲}$ اس مثال مین مقام خط

منحنی کا ایسا ہوگا جیسا کہ شکل آیندہ مین ہی پہلی اس مساوات کی محور

آلا اور آر تھی لیکن ابہ اسکی محور خطوط مستقر الملاقات ص ع

اور ص ح ہین اور اور زاویہ ح ص ع = ۹۰°

(۲۱۱) برعکس مرقومہ بالا کی فرض کرو کہ یہہ مساوات دی ہوئی ہی

$لا ی = ک^2$ اور دریافت کیا جاہتے ہین ہم بوسیلہ اس مساوات کی ایک

ایسی مساوات جسکے محور متقاطع علی القوایم ہون اور معلوم کرو طول

اس مساوات کی محورونکا واسطی ثبوت اس دعوی کے استعمال کرو

(۵۶) کو واسطی بدلنی سمت ترچھی محورونکے طرف محورون متقاطع علے

القوایم کے ظاہر ہی کہ $ی = \frac{لا جس ر + ی جم ر}{جس ک}$ اور $لا =$

$\frac{لا جس (ک - ر) - ی جم (ک - ر)}{جس ک}$ رکھنے سے ان قیمتون لا اور ی

کو مساوات $لا ی = ک^2$ مین حاصل ہوگا $لا^2 جس ر جس (ک - ر)$

$- ی^2 جم ر جم (ک - ر) + لا ی \{جم ر جس (ک - ر) - جس ر جس (ک - ر)\}$

$= ک^2 (جس ک)^2$ فرض کرو امثال $لا ی = ۰$ ∴ جم ر جس (ک - ر)

$-$ جس ر جم (ک - ر) یا جس (ک - ۲ ر) = ۰ ∴ ک = ۲ ر

اور $ر = \frac{ک}{۲}$ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ محور لا جو کہ بوسیلہ زاویہ ر

کی معلوم ہو سکتا ہی تنصیف کرتا ہی زاویہ ک کو جو کہ درمیان خطوط متنفر الملاقات کی ہی یہہ مطابق ہی اوس اشارہ کی جو کہ ضمنی فقرہ (۱۸۹) کی انجام مین لکھا ہی جبکہ لکھین گے ہم $ر = \frac{ک}{۲}$ تو صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی $لا^۲ (جب \frac{ک}{۲})^۲ - ی^۲ (جم \frac{ک}{۲})^۲ = کہ^۲ (جب ک)^۲$ اور ہمین جز $لا ی$ کا زایل ہوگیا ہی اور جبکہ لکھا ہمنے $جب ک = ۲ جب \frac{ک}{۲} جم \frac{ک}{۲}$ تو حاصل ہوگا یہہ

$$\frac{لا^۲}{۴ کہ^۲ (جم \frac{ک}{۲})^۲} - \frac{ی^۲}{۴ کہ^۲ (جب \frac{ک}{۲})^۲} = ۱$$

مطابق کرلی ہی اس مساوات کو مساوات $\frac{لا^۲}{ط^۲} - \frac{ی^۲}{ص^۲} = ۱$ اس سے ہمین حاصل ہوگا یہہ $ط = ۲ کہ جم \frac{ک}{۲}$ اور $ص = ۲ کہ جب \frac{ک}{۲}$ تو اب طول $ط$ اور $ص$ جو کہ نصف محور ہین معلوم ہو جاویگا اگر صورت مساوات کی یہہ ہو $لا ی + ط لا + ص ی + س = ۰$ پہلی اس مساوات کو رجوع کرو طرف مرکز کے یعنی بدلو اس مساوات کو ایسی مساوات سی جسکا نقطہ شروع مرکز ہو اور پھر عمل کرو موافق ترکیب گذشتہ کے —

(۲۱۲) تحویل کرو مساوات بعید البیضوی جسکا نقطہ شروع مرکز ہی اور محور متقاطع علی القوایم طرف اس مساوات کے $لا ی = کہ^۲$

فرض کرو کہ $ص لا$ اور $ص ی$ محور متقاطع علی القوایم ہین اور $ص ح$ اور $ص ع$ خطوط متنفر الملاقات یانی محور ہین $ص م = لا$ $م ن = ی$ } اصلے دونقطہ ف کی ہین

صںاں = لاَ } نئے و ترف کے ہین —
ںف = ءَ }

اب واسطی تبدیل کرنی سمت

محوروں کے فرض کرو کہ

ء = لاَ جس ر + ءَ جس رَ

لا = لاَ جم ر + ءَ جم رَ

لکہو ان قیمتون لاَ اور ءَ

کو مساوات بعید البیضوی

مین $ط^۲ ء^۲ - ص^۲ ا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ تو یہہ مساوات ہوگی

$ط^۲ ($ لاَ جس ر + ءَ جس رَ $)^۲ - ص^۲ ($ لاَ جم ر + ءَ جم رَ $)^۲ = - ط^۲ ص^۲$

یا { $ط^۲$ (جس رَ$)^۲$ − $ص^۲$ (جم رَ$)^۲$ } $ءَ^۲$ + ($ط^۲$ (جس ر$)^۲$ − $ص^۲$ (جم ر$)^۲$) لاَ^{۲} +

۲ ($ط^۲$ جس ر جس رَ − $ص^۲$ جم ر جم رَ) لاَ ءَ = − $ط^۲ ص^۲$ واسطی بدلنی

اس مساوات کی طرف مساوات مطلوب کی اجزای لاَ^{۲} اور ءَ^{۲} کو دور کرنا

چاہیئی اور چونکہ اس مساوات مین دو مقدارین غیر مقررہ داخل کی گئی

ہین اسیواسطے ہم امثال لاَ^{۲} اور ءَ^{۲} کو مساوی صفر کی فرض کرسکتے ہین

تو اب فرض کرو کہ $ط^۲$ (جس رَ$)^۲$ − $ص^۲$ (جم رَ$)^۲$ = ۰ اور

$ط^۲$ (جس ر$)^۲$ − $ص^۲$ (جم ر$)^۲$ = ۰ ، مساوات اخیر مین یہہ حاصل ہوگا

مس ر = ± $\frac{ص}{ط}$ اور چونکہ مساوات اول سی یہی قیمت (مس رَ$)^۲$ کی

حاصل ہوگی تو اب معلوم ہوتا ہی کہ قیمتین ر اور رَ کی دو نوامن مساوات

مین داخل ہین مس ر = ± ص/ط یعنے اگر مس ر (= − ص/ط)
متعلق محور لا کی ہو تو مس ر (= + ص/ط) متعلق لاَ کی ہوگا
(ہمنی مس ر = − ص/ط واسطی محور لا کے فرض کیا ہی تاکہ بیہ فرض
مطابق شکل کی ہو) تو اب ثابت ہوا کہ مساوات خط منحنی کی جبکہ خطوط
متنفر الملاقات اسکی محور ہوں یہہ ہوگی

۲{ط۲ جبس رجبس رَ − ص۲ جم رجم رَ} لا لاَ = − ط۲ ص۲ یا

۲جم رجم رَ{ط۲ مس ر مس رَ − ص۲} لا لاَ = − ط۲ ص۲ اور چونکہ

مس ر = ± ص/ط تو جم ر = ۱/√(۱ + (مس ر)۲) = ط/√(ط۲ + ص۲) = جم رَ

∴ ۲ ط۲/(ط۲ + ص۲) {− ط۲ ص۲/ط۲ − ص۲} لا لاَ = − ط۲ ص۲ یا

− ۴ط۲ ص۲/(ط۲ + ص۲) لا لاَ = − ط۲ ص۲ ∴ لا لاَ = (ط۲ + ص۲)/۴

اگر ص = ط یعنے اگر بعید البیضوی مساوی القطرین ہو تو مساوات اوسکی
موافق محوروں خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی لا لاَ = ط۲/۲

(۲۱۴) ظاہر ہی کہ زاویہ درمیان خطوط متنفر الملاقات کی ۲ر ہی
تو اب اگر ف ذ متوازی ص ن کی کہنچا جاوے تو سطح ف ذ ص ر =
لا لاَ جبس ۲ر = لا لاَ ۲ جبس ر جم ر = (ط۲ + ص۲)/۴ × ۲ × ص/√(ط۲ + ص۲) ،
× ط/√(ط۲ + ص۲) = ط ص/۲ تو اب ثابت ہوا کہ تمام متوازی الاضلاع بنائی
گئی اوپر اوتار کی جو کہ متوازی خطوط متنفر الملاقات کی ہوں مساوی ایک
دوسری کی ہوتی ہیں اور مساوی نصف سطح نصف محوروں کی یعنے برابر

برابر $\frac{ط\, ص}{۲}$ کے ہیں ۔ ثز ثز ثز ثز ثز

(۲۱۴) فرض کرو کہ $\overline{ص س}$ اور $\overline{ص س}$ خطوط متنفر الملاقات ایسی خط منحنی کے ہیں جسکی محور اقطار متجانس $\overline{ص د}$ اور $\overline{ص ف}$ (ط، و ص۱) ہیں اب اگر خط ط ف متوازی خط $\overline{ص د}$ کے کھینچا جاوے تو وہ مماس خط منحنی کے نقطہ ف پر ہوگا موافق (۱۸۷) کے اور خط ط ف ط دوگنا خط متنفر الملاقات کا ہے کیونکہ

مساوات $\overline{ص س}$ کی یہہ ہی $ی = \pm \frac{ص۱}{ط۱}$ لا اور جب لا = ط۱ تو ی = ± ص۱ یعنی ف ط = ف ط یا وہ حصے مماس کے جو کہ درمیان نقطہ تماس اور خطوط متنفر الملاقات کے واقع ہیں مساوی ایک دوسرے کے اور نصف قطر متجانس کے ہیں ۔ ثز ثز ثز

(۲۱۵) ملاؤ خط د ط کو تو ظاہر ہے کہ د ف ایک متوازی الاضلاع ہوگی اور چونکہ خط $\overline{ص د}$ کا مساوی اور متوازی خط ف ط کی ہے تو خط د ف کا متوازی خط متنفر الملاقات $\overline{ص س}$ کے ہوگا یہاں سے معلوم ہوا کہ اگر اقطار متجانس معلوم ہوں تو خطوط متنفر الملاقات معلوم ہوسکتی ہیں بوسیلہ کھینچنے ایک متوازی الاضلاع کے اوپر ان اقطار کے بعد اسکے کھینچو قطر اس متوازی الاضلاع کی تو یہہ قطر خطوط متنفر الملاقات ہونگی اور اگر خطوط

متنفر الملاقات معلوم ہون تو قطر متجانس صَ فَ کا معلوم ہو سکتا ہی
بوسیلہ کہینچنی خط فَ رَ کی متوازی صَ سَ کی اور اب قطع کرو
فَ وَ = ۲ فَ رَ تو دَ صَ قطر متجانس صَ فَ کا ہوگا اور اگر خط
متنفر الملاقات معلوم ہون تو اسطرح پر مماس کہینچ سکتا ہی قطع کرو
صَ طَ = ۲ صَ رَ اور ملاؤ خط فَ طَ کا تو یہہ مماس مطلوب ہوگا
اگر مقام نقطہ آتشی کا معلوم ہو تو طول قطر متجانس کا مساوی اوس
عمود کے ہوگا جو کہ کہینچا جاوے نقطہ آتشی سے خط متنفر الملاقات پر - مثل
(۲۱۶) دریافت کرو مساوات مماس طَفَ کی جبکہ محور اسکی خطوط متنفر
الملاقات ہون فرض کرو کہ لاَ اور یَ وتر نقطہ فَ کی ہین اور لاً
اور یً وتر ایک اور دوسری نقطہ خط منحنی کے ہین

∴ یَ = کہ² / لاَ اور یً = کہ² / لاً ∴ (یَ − یً) / (لاَ − لاً) = − کہ² / لاَ لاً = − یَ / لاً

∴ ی − یَ = − (یَ / لاً) (لا − لاَ) مساوات سیکنٹ کی ہی —

اور اب فرض کرو کہ لاً = لاَ تو مساوات مماس کی یہہ ہوگی

ی − یَ = − (یَ / لاَ) (لا − لاَ) = − (یَ / لاَ) لا + یَ یعنی لاَ ی + یَ لا
= ۲ لاَ یَ = ۲ کہ² یہہ مساوات مماس کے مساوات خط منحنی سی اسطرح
نکل سکتی ہی (مساوات خط منحنی کی لا ی = کہ² یا لا ی + لا ی = ۲ کہ²)
لکہو اس مساوات مین متواتر لاَ ی اور لا یَ بجای لا ی کی تو ظاہر ہی کہ
وہ مساوات مماس کی ہوگی فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ صہ طَ = ۲ لاَ =

= ۲ ص ن اور ص ط = ۲ ی = ۲ ن ف اور مثلث ص ط ط =

= $\frac{1}{2}$ × ۲ لا × ۲ ی جس ط ص ط = ۲ لا ی جس ۲ ر = ط ص (۱۱۳)

(۲۱۷) واضح ہو کہ دو حصے س ق اور س ق کا سیکنٹ ق س کی جو کہ واقع درمیان خط منحنی اور اسکی خط متنفر الملاقات کی ہین مساوی ایک دوسری کی ہین کیونکہ اگر قطر ص ف د اور اسکا قطر متجانس ص د کھینچا جاوے تو د ق = د ق بوسیلہ مساوات خط منحنی کے

(ی = ± $\frac{ص_۱}{ط_۱}$ $\sqrt{لا^۲ - ط_۱^۲}$) ثابت ہوگا اور بوسیلہ مساوات خطوط متنفر الملاقات (ی = ± $\frac{ص_۱}{ط_۱}$ لا) کی ثابت ہوگا کہ د س = د س

∴ س ق = س ق

(۲۱۸) اگر دتر د س اور د ق کو حروف ع اور ی سے تعبیر کیا جاوے تو ع۲ - ی۲ = $\frac{ص_۱^۲}{ط_۱^۲}$ لا۲ - $\frac{ص_۱^۲}{ط_۱^۲}$ (لا۲ - ط۱۲) یا

(ع - ی) (ع + ی) = ص۱۲ یعنے سطح س ق اور س ق = مربع ص د کے

قطبی مساوات کے بیان مین

(۲۱۹) فرض کرو کہ مرکز ص نقطہ شروع ہی اور ص ک اور ص ب محور متقاطع علی القوایم ہین اور فرض کرو کہ اوتار قطب د کی لا اور ی ہین اور نقطہ د کا سطح خط منحنی پر ہی اور نقطہ ف کا خط منحنی پر ہی جیسا فقرہ (۱۴۲) مین اور ر وہ زاویہ ہی جو کہ نصف قطر متحرک د ف یا ع بناتا ہی اوس خط سے کہ متوازی محور لا کی ہی تو بموافق فقرہ (۶۱)

$ی = ی' + ع$ جس ر اور $لا = لا' + ع$ جم ر اور جبکہ لکھین گے ہم ان قیمتون $لا$ اور $ی$ کو مساوات خط منحنی مین جو کہ یہہ ہی

$ط^۲ ی^۲ - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ تو حاصل ہوگا یہہ

$ط^۲ (ی' + ع جس ر)^۲ - ص^۲ (لا' + ع جم ر)^۲ = - ط^۲ ص^۲$ ؂

(۲۲۰) فرض کرو کہ مرکز قطب ہی تو $لا' = ۰$ اور $ی' = ۰$

$$\therefore ع^۲ = - \frac{ط^۲ ص^۲}{ط^۲ (جس ر)^۲ - ص^۲ (جم ر)^۲} = \frac{ط^۲ (ی^۲ - ۱)}{ی^۲ (جم ر)^۲ - ۱}$$

(۲۲۱) فرض کرو کہ قطب نقطہ آتشی س ہی تو ظاہر ہی کہ $ی' = ۰$ اور $لا' = ط ی$ اور اب $ع$ نق ہو جاویگا جبکہ لکھین ان قیمتون کو اور عمل کرین موافق (۱۴۸) کے تو حاصل ہوگا یہہ

$نق = \frac{ص^۲}{ط - س جم ر} = \frac{ط (ی^۲ - ۱)}{۱ - ی جم ر}$ اور اگر زاویہ ا س ف $= ر$ تو

$نق = \frac{ط (ی^۲ - ۱)}{۱ + ی جم ر}$ اس مساوات کا اکثر استعمال کرتی ہین یہہ صورت مساوات آیندہ سے بآسانی ثابت ہوسکتی ہی نق $= ی لا - ط$ شکل (۱۶۱)

$= ی (ط ی - نق جم ر) - ط \therefore نق = \frac{ط (ی^۲ - ۱)}{۱ + ی جم ر}$ ؂ ؂

(۲۲۲) اگر $\frac{ل}{۲} = ط (ی^۲ - ۱)$ تو $نق = \frac{ل}{۲} \cdot \frac{۱}{۱ + ی جم ر}$ = س ف اور اگر خط س ف خط منحنی سے نقطہ ف' پر بھی ملی تو $\frac{۱}{س ف}$ اور $\frac{۱}{س ف'} = \frac{۲}{ل} (ف س + ف س') = \frac{ل}{۲}$ و نصف ضلع

طول وتر جو کہ نقطہ آتشی سے گذری $= ۲ \frac{ص^۲}{ط}$ جہانکہ ص نظر اوس قوس کا

بیان البعید البیضوی متجانس کا ؂

(۲۲۳) واضح ہو کہ مساوات بعید البیضوی ایک اور طرح کی بھی ہوتی ہی اوسکا اب ہم بیان کرینگے اگر (ـــ ف ر) منفی فقرہ (۱۰۳) مین فرض کیا جاوے تو صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی ف ی۲ - ق لا۲ = ۱ یا ط ی۲ - ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲ جبکہ ف = ۱/ط اور ق = ۱/ص اب اگر دریافت کیا جاوے مقام اس خط منحنی کا تو ظاہر ہوگا کہ ب بَ = ۲ص محور کلان اس خط منحنی کا ہی اور ر رَ یا ۲ط قطر متجانس اسکا ہی اور یہہ بھی معلوم ہو جاویگا کہ خط منحنی دونو طرف نقطہ ب کی اور بَ کی لانہایت پھیلتا ہی یعنے اسکی صورت مثل بعید البیضوی کے ہی جسکا ابھی ہم بیان کر آئی ہین لیکن مقام اسکا مختلف ہی اسکی مقام سی دونو خطوط منحنی شکل آیندہ سی معلوم ہو جاوینگی اور محور ایک کا انمین سے قطر متجانس دوسری کا ہی اور صورت مساوات سی ظاہر ہوگا کہ دونو خطوط منحنی خطوط متنفر الملاقات ی ص یَ اور ف ص فَ ہین ثز

(۲۲۴) فرض کرو کہ ف ص اور ص د دو قطر متجانس بعید البیضوی اوف ی کے ہین اب دریافت کیا چاہتی ہین ہم لوکس نقطہ د کا

فرض کرو کہ ص م = لا اور ف م = یَ

اور ص ن = لا اور ن د = ی تو $ط^۲ - ص^۲ = ط^۲ - ص^۲$

∴ $لاَ^۲ + یَ^۲ = لا^۲ + ی^۲ + ط^۲ - ص^۲$ لیکن مساوات ص د کی

یہہ ہی $ط^۲ ی یَ - ص^۲ لا لاَ = ۰$ ∴ $لاَ = \frac{ط^۲ ی یَ}{ص^۲ لا}$

∴ $لاَ^۲ + یَ^۲ = \frac{ط^۴ ی^۲ + ص^۴ لا^۲}{ص^۴ لا^۲} یَ^۲ = لا^۲ + ی^۲ + ط^۲ - ص^۲$

∴ $یَ^۲ = \frac{ص^۴ لا^۲}{ط^۴ ی^۲ + ص^۴ لا^۲} (لا^۲ + ی^۲ + ط^۲ - ص^۲)$ اور

$لاَ^۲ = \frac{ط^۴ ی^۲}{ط^۴ ی^۲ + ص^۴ لا^۲} (لا^۲ + ی^۲ + ط^۲ - ص^۲)$ جبکہ لکہین ہم ان

قیمتون کو اس مساوات $ط^۲ یَ^۲ - ص^۲ لاَ^۲ = - ط^۲ ص^۲$ تو بعد تحویل

کی حاصل ہوگا یہہ $ط^۲ ی^۲ - ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲$ اب ثابت ہوا کہ

لوکس نقطہ دَ کا بعید البیضوی متجانس ہی — یہانسی معلوم ہوا کہ

صرف علامت بدلنی مقدار مقررہ سی جو کہ مساوات بعید البیضوی مین ہی

جبکا مرکز نقطہ شروع ہو ہمین مساوات بعید البیضوی متجانس کی حاصل

ہوگی جسکے محور لاَ اور یَ ہونگی مساواتین دو نوخطوط منحنیہ کے مساوات

آیندہ مین داخل ہین $(ط^۲ ی^۲ - ص^۲ لا^۲)^۲ = ط^۴ ص^۴$ یا $لا ی = ک^۲$

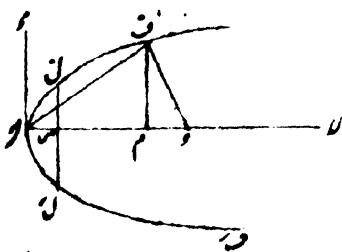
باب دہم ۱۰

قریب البیضوی کے بیان مین

(۲۲۵) مساوات قریب البیضوی کی جسکی محور متقاطع علی القوائم ہین یہہ

ثابت ہو چکی ہی $ط^۲ ی^۲ + ی لا = ۰$ اب ہم بوسیلہ اس مساوات اس تمام

خواص اس خط منحنی کے ثابت کرینگے — فرض کرو کہ $\frac{ی^۲}{ط} = ن$
∴ $و^۲ = ن لا$ فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محور دن آلا اور آی کا
اب ظاہر ہی کہ اگر لا = ۰ تو و = ۰ یہاں سی معلوم ہوا کہ خط منحنی
نقطہ شروع سی گذرتا ہی واسطی ہر ایک مثبت قیمت آلا کی دو قیمتیں وکی
ایک مثبت اور دوسری منفی حاصل ہونگی جو کہ ۰ سی ∞ تک زیادہ
ہوتی جاوینگی جیسا کہ لا ۰ سی لانہایت زیادہ ہوتا جاویگا یہاں سے
معلوم ہوا کہ اس خط منحنی کی دو قوسین آف اور آف ہوتی ہین
اور آف کی دونو طرف لانہایت پھیلتی ہین اور یہاں سی یہہ معلوم ہوتا ہی
کہ یہہ خط منحنی دونو طرف محور آلا کی مشابہ ہی اور اسکی طرف مجوف محور
کی طرف پھری ہوئی ہی نہین تو ایک خط مستقیم اس خط منحنی کو ایک نقطہ
سی زیادہ پر قطع کریگا مساوات گذشتہ سی ظاہر ہی کہ واسطہ ہر ایک
منفی قیمت لا کی قیمت و کی ناممکن ہی

(۲۲۶) واضح ہو کہ نقطہ آ کو راس خط منحنی کا کہتی ہین اور آلا اور آی

کو ... کہتی ہین لیکن اگر حرف
... ہی کو مجموعہ ضرب البیضوی
کا کہتی ہین اور مساوات
خط منحنی کی جبکہ راس

نقطہ شروع اور آلا اور آی محور ہوں یہہ ہی $و^۲ = ن لا$ اس مساوات کی

وسیلہ سی ثابت ہوتا ہی کہ مربع وتر کا = سطح وتر العرض اور ایک مقدار مقررہ کی یعنی مربع وتر کا کم یا زیادہ ہونا موقوف ہی وتر العرض پر

(۲۲۷) خواص اخیر اس خط منحنی سے معلوم ہوتا ہی فرق درمیان اس خط منحنی اور بعید البیضوی کی — شاخین ان دونوں کی لانہایت پہیلتی ہین لیکن مختلف خواص کی ہین کیونکہ مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہی

$ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(لا^2 - ط^2) = \frac{ص^2}{ط^2} لا^2 (۱ - \frac{ط^2}{لا^2})$ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ واسطے ہر ایک بڑی قیمت لا کے ی^2 کم و زیادہ ہوتا ہی موافق لا^2 کے یا ی بدلتا ہی موافق لا کے یہانسی ثابت ہوا کہ شاخ بعید البیضوی کی جلدی سی بلند ہوتی جاتی ہی نسبت قریب البیضوی کے جسکا وتر کم و زیادہ ہوتا ہی موافق $\sqrt{لا}$ کی جبکہ قیمت لا کی بہت بڑی ہوگی تو رستہ بعید البیضوی کا تقریباً مثل اس خط منحنی کے ہوگا $ی = \frac{ص}{ط} لا$ لیکن قریب البیضوی مین لا کی زیادہ ہونی سی قیمت ی کی بہت زیادہ نہین ہوتی ہی اس سی معلوم ہوتا ہی کہ قریب البیضوی تقریباً میلان متوازی ہونی کا محور لا سے رکہتا ہی —

(۲۲۸) محور کلان بیضوی کا لانہایت بڑا فرض کیا جاوے تو مساوات قریب البیضوی کی مساوات بیضوی سی بآسانی حاصل ہو سکتی ہی فرض کرو کہ ص مرکز اور س نقطہ آتشی اس بیضوی کا ہی جسکی مساوات یہہ ہی $ی^2 = \frac{۲ص^2}{ط} لا - \frac{ص^2}{ط^2} لا^2$ (۱۰۵) فرض کرو کہ م = اس = اص — س ص = ط — $\sqrt{ط^2 - ص^2}$ ... دیکہو ... شکل (۱۰۶) کو

∴ ص = ۲ ط م − م ∴ ی = (۴ م − ط/م) لا − (ط − م)

اب اگر مقدار ط کی بغیر منقطع فرض کیجاوے تو اس مساوات سے ایک سلسلہ بیضویونکا حاصل ہوگا جسمین کہ فاصلہ ر س یا م ایکسا واسطی تمام بیضویون کی ہیگا لیکن محور کلان ہر ایک کا مختلف ہوگا تو اب ثابت ہوا کہ واسطی ہر ایک خاص قیمت ط کے ایک خاص بیضوی حاصل ہوتا ہی

اب فرض کرو کہ ط لا نہایت ہی اور چونکہ تمام اجزا اسوای جز اخیر ۴ م لا کی مساوی صفر کے ہوجاوینگی اسواسطی صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی ی = ۴ م لا یہانسی معلوم ہوا کہ مساوات بیضوی کی موافق ایک خاص فرض کے مساوات قریب البیضوی کی ہوجاتی ہی اسیطرح مساوات قریب البیضوی کی مساوات بعید البیضوی سے بہی حاصل ہوسکتی ہی

نقطۂ آتشی کے بیان مین

(۲۲۹) مقدار ن کو جو کہ مساوات قریب البیضوی مین سر لا کا ہی نشتر آتشی اعظم کہتے ہین اور چونکہ ن = ی/لا ∴ لا : ی :: ی : ط فقرہ (۲۲۸) مین ہمنی بجای مساوات قریب البیضوی کی یہہ مساوات لکہی ہی ی = ۴ م لا صرف واسطی دو کرنی کسرکے واضح ہو کہ اس مساوات کی وسیلہ

اگر لا نہایت چہوٹا ہو نسبت ط کے تو مساوات بیضوی تقریبا مساوات قریب البیضوی کی ہوگی موافق اسی دلیل کے رستہ دُم دار ستارہ کا نزدیک حضیض کے ایک حصہ قریب البیضوی کا معلوم ہوتا ہے۔

وسیلہ سی مساوات قریب البیضوی کی بہت آسانی سی حل ہو سکتی ہی اور
عمل مین بوسیلہ لکھنی ۴م = ن بہت اختصار ہوتا ہی بغیر دور
ہونی عمومیت انھی مساوات کی تو اب ہم صورتین آیندہ کی ثابت کرنی
ہین اس مساوات کا استعمال کر سکتی ہین اسطرح پر کہ جس جای مقدار م کی ہوگی
وہان $\frac{ن}{۴}$ = م کی لکھین گے اسی واسطی جو مساوات کہ بعد اس عمل کی حاصل
ہوگی اوسمین اجزاء وتر آتشی اعظم کے پائی جاوینگی

(۲۳۰) دریافت کرو مقام اوس وتر کا جسکا دو چند مساوی مقدار
وتر آتشی اعظم کے ہو فرض کرو کہ ۲ ی = ۴ م ∴ ۴ ی^{۲} = ۱۶ م^{۲} یا
۱۶ م لا = ۱۶ م^{۲} ∴ لا = م محور ا ل مین سے قطع کرو ا س = م
اور نقطہ س مین سے گذرتا ہوا کھینچو وتر ل س ل' کا جو وتر آتشی اعظم اور
س، نقطہ آتشی ہوگا مقام نقطہ س کا بطور آیندہ کی بھی دریافت ہو سکتا ہی
فرض کرو کہ ا م = لا اور م ف = ی اور ملاؤ خط ا ف کو اور کھینچو
خط ف و کا عمود ا ف پر تو اب ظاہر ہی کہ ا م : م ف :: م ف : م و
∴ م و = $\frac{ی^{۲}}{لا}$ = ۴ م ∴ ا س = م = $\frac{۱}{۴}$ م و

(۲۳۱) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا اوس فاصلہ کا جو کہ واقع ہی درمیان نقطہ
آتشی اور ایک نقطہ ف کے جو کہ خط منحنی پر ہی - فرض کرو کہ س ف = ق اور ا م
= لا اور م ف = ی اور ظاہر ہی کہ اوتار نقطہ س کی ی' = ۰ اور
لا' = م ∴ ق^{۲} = (ی − ی')^{۲} + (لا − لا')^{۲} = ی^{۲} + (لا − م)^{۲} =

۴ م لا + (لا − م)^۲ = (لا + م)^۲ ∴ ن ق = س ف = لا + م

مماس کے بیان مین

(۲۴۲) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا مساوات مماس کی جو ایک نقطہ ف (لاَ اور یٓ) قریب البیضوی پر کھینچی جاوے ظاہر ہی کہ مساوات اُس سیکنٹ کی جو دو نقطون خط منحنی (لاَ اور یٓ) اور (لاً اور یً) مین سی گذرتا ہی یہہ ہوگی ی − یٓ = (یٓ − یً)/(لاَ − لاً) (لا − لاَ)

اور مساوات قریب البیضوی کی یہہ ہی یٓ^۲ = ۴ م لاَ اور یً^۲ = ۴ م لاً

∴ یٓ^۲ − یً^۲ = ۴ م (لاَ − لاً) اور (یٓ − یً)/(لاَ − لاً) = ۴ م/(یٓ + یً) جبکہ لکھین ہم مساوات گذشتہ مین تو مساوات سیکنٹ کی یہہ ہو جاویگی

ی − یٓ = ۴ م/(یٓ + یً) (لا − لاَ) اور جبکہ دو نقطی ایک دوسری پر منطبق ہونگی تو یٓ = یً اور اس صورت مین یہ مساوات سیکنٹ کی مساوات مماس کے ہو جاویگی

اسیواسطے ی − یٓ = ۴ م/۲ یٓ (لا − لاَ) یا ی یٓ − یٓ^۲ = ۲ م (لا − لاَ)

∴ ی یٓ = یٓ^۲ + ۲ م (لا − لاَ) = ۴ م لاَ + ۲ م (لا − لاَ)

∴ ی یٓ = ۲ م (لا + لاَ) واضح ہو کہ یہہ مساوات مماس کی مساوات قریب البیضوی سی حاصل ہو سکتی ہی کیونکہ ی^۲ = ۴ م لا = ۲ م (لا + لا)

لکھو اس مساوات مین بجای ی؛ کی ی یَ اور بجای (لا + لا) کی (لا + لاَ) تو اب حاصل ہوگی مساوات مماس کی جو کہ یہہ ہی

ی یَ = ۲ م (لا + لاَ)

(۲۳۳) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا اون نقاط کا جہان مماس قطع کرتا ہے محورونکو ا ب واسطی ثبوت اس دعوی کی فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا + لاَ = ۰ یا لا = − لاَ یعنی ر ط = − ر م یہانسی معلوم ہوا کہ قیمت مطلق مماس التمام کی یعنی بغیر لحاظ علامت کی یہہ ہی م ط = ۲ ر م اور اب فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ی = ۲ م $\frac{\text{لاَ}}{\text{یَ}}$ = $\frac{\text{یَ}^2}{\text{۲یَ}}$ = $\frac{\text{یَ}}{۲}$ ∴ ر ع = ½ م ف

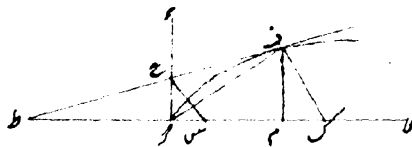
(۲۳۴) چونکہ مساوات مماس کی ی یَ = ۲ م (لا + لاَ) اور ظاہر ہے کہ نقطہ آ پر دونو لاَ اور یَ = ۰ اسیواسطی صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی ۲ م لا = ۰ یا لا = ۰ لیکن لا = ۰ مساوات محور ر ی کی ہی تو اب ثابت ہوا کہ مماس نقطہ آ پر محور ر ی پر منطبق ہوتا ہے

(۲۳۵) دریافت کرو مساوات مماس کی انجام وتر الشی اعظم پر چونکہ مساوات مماس کی یہہ ہی

ی یَ = م (لا + لاَ) تو

نقطہ ل پر جہانکہ لاَ = م

اور یَ = ۲ م صورت اوسکی

یہہ ہوجاویگی ۲ م ی = ۲ م (لا + م) ∴ ی = لا + م اور اگر وتر کی

یا م ق قطع کری خط منحنی کو خط ف ق پر تو س ف = لا + م (۲۴۱)

∴ م ق = س ف

(۲۴۶) دریافت کرو وہ نقطہ جہانکہ یہہ خاص مماس تقاطع کرتا ہی محور لا سی فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا = ا ط = − م = − ا س نقطہ ط سی کہینچو خط ط ر کا عمود ا ر لا پر اور نقطہ ف سی کہینچو خط ف ر کا متوازی ا ر لا کے تو ف ر = ا ط + ا م = م + لا = س ف واضح ہو کہ ہمنی اسمین قیمت ا ط کی بغیر لحاظ علامت کی لکہی ہی یہانسی معلوم ہوا کہ فاصلہ کسی نقطہ ف کا نقطہ س سے مساوی خط ط ر کی ہی یہہ خط ط ر کا خط بنیادی قریب البیضوی کا کہلاتا ہی کیونکہ بوسیلہ معلوم ہونی اس خط کی اور مقام نقطہ آتشی کے قریب البیضوی بآسانی کہیچ سکتا ہی یہہ مماس محور لا سی زاویہ ۴۵° کا بناتا ہی (۳۵ مثال سوم) ش ش

(۲۳۷) چاہتی ہین ہم دریافت کرنا طول عمود س ع کا جو کہ کہیچا گیا ہی نقطہ آتشی س سے مماس ف ط پر موافق صورت (۴۸) کی ظاہر ہی کہ

س ی = − $\frac{ی' - ط لا' - ص}{\sqrt{1 + ط^2}}$ لیکن دیکہنی شکل (۲۳۲) کی سی معلوم ہوگا کہ ی' = ۰ اور لا' = م اوتار نقطہ س کے ہین اور ی = ط لا + ص مساوات خط ف ط کی ہی اور مساوات آیندہ بہی خط ف ط کی ہی ی = $\frac{۲م}{ی'}$ (لا + لا') ∴ ط = $\frac{۲م}{ی'}$ اور ص = $\frac{۲م لا'}{ی'}$

اسیواسطے

$$\text{س د} = \sqrt{\frac{\frac{۴ م^۲}{ک^۲} م + \frac{۴ م لا^۲}{ک^۲}}{\left(۱ + \frac{۴ م^۲}{ک^۲}\right)}} = \sqrt{\frac{۴ م (م + لا^۲)}{ک^۲ + ۴ م^۲}} = \sqrt{\frac{۴ م (م + لا^۲)}{۴ م لا^۲ + ۴ م^۲}}$$

$= \sqrt{م (م + لا^۲)} = \sqrt{م ل ق}$ اگر س ف = ل ق یہاں سی معلوم ہوا کہ

مربع س د = سطح س ف اور س ر یعنے $س د^۲ = س ف × س ر$

(۲۳۸) دریافت کرو لوکس کو کا شکل گذشتہ مین مساوات مماس ف ط

کی موافق شکل (۲۳۲) یہہ ہی $د = \frac{۲ م}{ک} (لا + لا^۲)$ تو اب ظاہر ہی کہ

مساوات خط س د کی جو کہ گذرتا ہی نقطہ (م اور ۰) مین سے اور عمود مماس

ف ط پر ہی یہہ ہوگی $د = - \frac{ک}{۲ م} (لا - م)$ معلوم کرو وہ نقطہ جہاں کہ یہہ

خط تقاطع کرتا ہی محور د کو اسیواسطی واسطے ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ

لا = ۰ ∴ $د = \frac{ک}{۲}$ لیکن اسی نقطہ پر مماس نقطہ ف کا محور د کو

تقاطع کرتا ہی (۲۳۲) یہاں سی ثابت ہوا کہ مماس اور عمود نقطہ س سی اس

مماس پر محور ا د سی ایک ہی نقطہ پر ملتی ہین یا لوکس د کا محور ا د کا ہی

(۲۳۹) دریافت کرو وہ نقطہ جہاں کہ عمود س ع تقاطع کرتا ہی خط

بنیادی کو واسطی ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ لا = - م ∴ د =

$- \frac{ک}{۲ م} (لا - م) = - \frac{ک}{۲ م} (- م - م) = ک$ لیکن یہہ یعنی ک = م ف تو دریافت

ہوا کہ اگر ایک مماس کھیچا جاوے کسی نقطہ ف سی تو عمود کھیچا گیا نقطہ آتشی

س سے اوس مماس پر تقاطع کریگا خط بنیادی کو اوس نقطہ پر جہان کہ

ایک عمود کھیچا گیا نقطہ ف سی خط بنیادی کو کاٹتا ہی ∴ ∴

(۲۴۰) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ مماس نقطہ آتشی کے فاصلوں سے بناتا

ہی ظاہر ہی کہ مساوات مماس ف ط کی یہہ ہی ی = ۲م/یَ (لا + لاَ)

اور مساوات فاصلہ نقطہ آتشی کی یعنے خط س ف کی جو کہ نقاط س (= ۰ اور م)

اور ف (= لاَ اور یَ) میں سے گذرتا ہی یہہ ہی ی = یَ/(لاَ − م) (لا − م)

اور مس س ف ط = مس (ف س لا − ف ط لا) =

= (یَ/(لاَ − م) − ۲م/یَ) / (۱ + یَ/(لاَ − م) × ۲م/یَ) = (یَ۲ − ۲م (لاَ − م)) / (یَ (لاَ − م) + ۲م یَ) = (۴م لاَ − ۲م لاَ + ۲م۲) / (یَ (لاَ + م))

= ۲م (لاَ + م) / (یَ (لاَ + م)) = ۲م/یَ = یَ/۲لاَ کیونکہ ۲م = یَ۲/۲لاَ

لیکن م ف = م ط × مس ف ط م

∴ مس ف ط م = یَ/۲لاَ

∴ مس س ف ط = مس س ط ف

= مس طَ ف ں یہہ اوس وقت

صحیح ہی جبکہ خط ف ں کا

متوازی لا لاَ کی کھیچا جاوے تو اب ثابت ہوا کہ زاویہ جو کہ مماس فاصلہ آتشی

یعنی س ف سے بناتا ہی مساوی اوس زاویہ کی ہی جو کہ یہی مماس بناتا ہی

اوس خط سے جو کہ کھیچا گیا ہی نقطہ ف سے متوازی محور لا کی

یہہ شکل مشہور اور مفید بطور آئندہ کی بوسیلہ فقرہ (۲۴۳) کے ثابت ہو سکتی

ہی ہمنی اس فقرہ مین ثابت کیا ہی کہ قیمت ط بغیر لحاظ علامت کی نصف وتر

ہی تو اب ثابت ہوا کہ س ط = س ر + ر ط = م + لا = س ف

اسیواسطی زاویہ. س ف ط = زاویہ س ط ف = زاویہ ق ف ط'

ظاہر ہی کہ اگر ایک کرن بسمت ق ف مین قریب البیضوی پر گری تو یہہ کرن

بسبب برابری زاویہ ق ف ط' اور س ف ط کی اس نقطہ قریب البیضوی سے

منعکس ہوکر نقطہ س پر آویگی اسیطرح سے تمام کرنین جو کہ متوازی محور لا کی

قریب البیضوی پر واقع ہون تو یہہ تمام کرنین نقطہ س پر آکر جمع ہون گی

اگر ایک قریب البیضوی محور لا کی گرد پہر کر ایک مجوف خالی شیشہ بنادی تو تمام

کرنین جو کہ متوازی محور لا کی اس شیشہ پر گرینگی وہ نقطہ س پر جمع ہونگی

مثلاً اگر ایک قریب البیضوی کی صورت کا شیشہ طرف آفتاب کی اسطرح سے

رکہا جاوے کہ محور قریب البیضوی کا مقابل آفتاب کی ہو تو ایک بڑی روشنی

نقطہ آتشی س پر جمع ہوگی — برعکس اسکی اگر ایک روشن جسم نقطہ

آتشی پر رکہا جاوے تو مجموعہ کرنون روشنی کا بجای بی ترتیبی سے پہیلنی کے اس

سمت مین جاوینگی جو کہ متوازی محور کی ہی اور اسطرح سے روشن کریگا ایک بڑی

فاصلہ کی جزو کو جو کہ مقابل اوس سمت کی ہی اسیواسطی اکثر روشن خانون مین ایسی

صورت کی شیشون کو استعمال مین لاتے ہین —

عمود مماس کے بیان مین

(۱۴۲) دریافت کرو مساوات عمود مماس ف ک کی جو کہ عمود نقطہ

ف (لا اور ر) سی مماس پر کہینچا گیا ہی ظاہر ہی کہ مساوات اوس خط

کی جو کہ نقطہ ف سے گذرتا ہی یہہ ہی ی - یَ = ط (لا - لاَ) اور

چونکہ یہہ خط عمود مماس پر ہی جسکی مساوات یہہ ہی یَ = ۲م/یَ (لا + لاَ)

تو ط = - یَ/۲م اسواسطے مساوات عمود مماس کی یہہ ہوگی

ی - یَ = - یَ/۲م (لا - لاَ)

(۲۴۲) دریافت کرو وہ نقطہ جہانکہ عمود مماس تقاطع کرتا ہی محور لا سے - فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ لا - لاَ = م یعنی خط باطن مساوی نصف وتر آتشی اعظم کے ہی اسواسطے س ک = س م + م ک = لاَ - م + ۲م = لاَ + م = س ف اور ف ک = √(یَ² + ۴م²)

= √(۴م لاَ + ۴م²) = √(۴م (لاَ + م)) = √(۴م ل) یہانسے معلوم ہوا کہ خط ف ک وسط فی النسبت ہی درمیان وتر آتشی اعظم اور خط س ف

قطرون کے بیان مین

(۲۴۳) فقرہ (۱۸) مین بیان کیا گیا ہی کہ مرکز قریب البیضوی کا نہین ہوتا ہی - چونکہ واسطے ہر ایک قیمت لا کے دو قیمتین مثبت اور منفی ی کی حاصل ہوتی ہین تو اب معلوم ہوا کہ محور لا کا قطر قریب البیضوی کا ہی لیکن محور ی کا قطر نہین ہو سکتا ہی اسیواسطے محور اسکی قطر متجانس نہین ہین - واضح ہو کہ یہہ خط منحنی لانہایت قطر متوازی محور کی رکھتا ہی واسطے ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ ی = ط لا + د مساوات کسی ایک وتر کی ہی اور ی² = ن لا مساوات خط منحنی کی ہی اب بدلو

نقطہ شروع کو نقطہ تنصیف (لاَ اور ىَ) وتر پر تو صورتین مساواتون گذشتہ کی یہہ ہوجاوینگی ى = ط لا اور (ى + ىَ)^{۲} = ن (لا + لاَ) اب معلوم کردہ نقطہ جہانکہ وتر قطع کرتا ہی خط منحنی کو واسطی ثبوت اس مطلب کے لکہو ط لاَ بجای ىَ کی مساوات دویم مین ∴ (ط لا + ىَ)^{۲} = ن (لا + لاَ) یا ط^{۲} لا^{۲} + (۲ ط ىَ - ن) لا + ىَ^{۲} - ن لاَ = ۰ چونکہ نقطہ شروع نقطہ تنصیف وتر پر ہی تو دو قیمتین لاَ کی مساوی ایک دوسری کی ہوگی اور علامت ان دونو کی مختلف ہوگی یعنی علامت ایک کی مثبت اور دوسری کی منفی ہوگی اسیواسطی دوسرا جز مساوات گذشتہ کا مساوی صفر کی لکہنا چاہیی اسیواسطے ۲ ط ىَ - ن = ۰ بوسیلہ اس مساوات کی قیمت ىَ کی معلوم ہوجاویگی اور چونکہ اسمین مقدار مقررہ یعنی دَ نہین پائی جاتی ہی اسیواسطے یہہ ایک سی ہوگی واسطی کسی ایک وتر کی جو کہ متوازی ى = ط لا + د کی ہی یہانسی ثابت ہوا کہ ى = ن/۲ط تمام متوازی وترون کی نقاط تنصیف کو کسرتا ہی اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات ایک ایسی خط مستقیم کی ہی جو کہ متوازی محور کی ہی

(۲۴۴) تبدیل کرنا اس مساوات کو ایک اور ایسی مساوات سی جسکا نقطہ شروع اور سمت محورون کی مختلف پہلی سے ہو اسکی صورت مساوات مین کسی نوع کا فرق نہ آوی فرض کرو کہ لا = ط + لاَ جم ر + ىَ جم رَ اور ى = ص + لاَ جب ر + ىَ جب رَ (۵۷) لکہو ان قیمتون کو اسی مساوات مین ى^{۲} = ن لا تو بعد علی الترتیب لکہنی قوای لاَ اور ىَ کی حاصل ہوگا یہہ

ی^۲ (جس رَ)^۲ + لاَ^۲ (جس ر)^۲ + ۲ لاَ یَ جس ر جس رَ + یَ (۲ ص جس رَ − ن جم رَ)
+ لاَ (۲ ص جس ر − ن جم ر) + ص − ط ن = ۰ اور چونکہ صورت اسکی
مثل مساوات (یَ^۲ = ن لا) ہونی چاہیے اسیواسطے فرض کرو کہ

(جس ر)^۲ = ۰ (۱) اور ۲ جس ر جس رَ = ۰ (۲)

۲ ص جس رَ − ن جم رَ = ۰ (۳) ص^۲ − ط ن = ۰ (۴)

اسیواسطے صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی

یَ^۲ (جس رَ)^۲ + (۲ ص جس ر − ن جم ر) لاَ = ۰ اور چونکہ ر = ۰

تو یَ^۲ (جس رَ)^۲ − ن لاَ = ۰

(۲۴۵) جبکہ امتحان مساوات (۱) اور (۲) اور (۳) اور (۴) کا کیا جاوے تو (۱) سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ نئی محور لاَ کا متوازی محور لا کی ہی اور چونکہ مساوات (۱) سے دریافت ہوتا ہی کہ ر مساوی صفر کی ہی تو مساوات (۲) کی جاتی رہیگی یعنی = ۰ کی ہوگی تو اب تین مساواتین باقی رہین اور چونکہ چار مقدارین مجہول ہین تو اب ثابت ہوا کہ لانہایت ایسی نقاط ہو سکتے ہین کہ جن پر اگر مساوات گذشتہ کا نقطۂ شروع بدلا جاوے تو صورت مساوات کی ویسی ہی رہیگی یعنے اسمین کسیطرح کی تبدیلی نہین ہوگی باقی تین مقدارین ط اور ص اور رَ کو کسی ترتیب سے لو تو نتیجہ ان سے ایک ہی حاصل ہونگے مثلاً فرض کرو کہ ط مقدار معلوم ہی تو مساوات (۴) سے یہہ حاصل ہوگا ص^۲ = ط ن اس مساوات سے معلوم ہوتا ہی کہ ط کو آ سے مثبت سمت

کی طرف شمار کرنا چاہئیں اور نیا نقطہ شروع کسی نقطہ فَ خط منحنی پر ہی
جیسا کہ شکل آیندہ مین ہی اور مساوات (۴) سی یہہ حاصل ہوگا
مس ر = ن / ۲ص = ص / ۲ط کیونکہ مساوات (۴) سی ن = ص^۲ / ۲ط
∴ مس ر = ص^۲ / ۲ط ص = ص / ۲ط لیکن یہہ بعینہٖ قیمت اوس زاویہ کی ماس
کی ہی جو کہ ماس فَ طَ بناتا ہی محور لاَ سی (۲۴۰) یہانسی دریافت ہوا
کہ نیا محور رَ کا ماس خط منحنی کا نئی نقطہ شروع فَ ہی اب تمام اِس
بیان سی شرطین آیندہ حاصل ہوگئی نیا نقطہ شروع کسی نقطہ فَ خط
منحنی پر ہی (دیکھو شکل آیندہ کو) نئی محور وہین فَ لاَ متوازی لا
کی اور دوسرا فَ رَ ماس نئے نقطہ شروع فَ پر ہی اور صورت
مساوات سی دریافت ہوتا ہی کہ نیا محور لاَ کا قطر قریب البیضوی کا ہی
(۲۴۶) ظاہر ہی کہ مساوات خط منحنی کی رَ^۲ = ن / (جس رَ)^۲ لاَ = نَ لاَ
جبکہ نَ = ن / (جس رَ)^۲ = ن (کث رَ)^۲ = ن (۱ + مم رَ)^۲ =
ن (۱ + ۴ط^۲ / ص^۲) = ن + ۴ط = ۴ (ن/۴ + ط) = ۴ س ف (۲۳۱)
یہانسی معلوم ہوا کہ نیا وتر آتشی نقطہ فَ پر = ۴ س ف
(۲۴۷) مساوات قریب البیضوی کی جبکہ معلوم ہو مقام اور سمت نئی محوروں کی
کی آسانی اصلی مساوات سی جسکی محور متقاطع علی القوایم ہین حاصل ہو سکتی ہی
واسطہ ثبوت اس دعوی کی فرض کرو کہ فَ نقطہ شروع ہی اور فَ لاَ
اور فَ رَ نئی محور اور زاویہ فَ لاَ = ر اور کرن = لا اور ن مہ = رَ

وتر متقاطع علی القوایم نقطہ ق سے لے ہین اور ر م = ط اور م ف = ص اور ف ر = لاَ اور و ق = ءَ سنی وتر ق کے ہین ۔ تو اب ظاہر ہی

کہ ء = ق ن = م ف + ق ع

= ص + ءَ جس ر اور لا = ا ن

= ر م + ف و + و ع = ط + لاَ

+ ءَ جم ر جبکہ لکھین ہم ان

قیمتون کو مساوات آیندہ مین ءَ = ن لا تو حاصل ہوگا یہہ

(ص + ءَ جس ر)^2 = ن (ط + لاَ + ءَ جم ر)

∴ ءَ (جس ر)^2 + (۲ ص جس ر – ن جم ر) ءَ + ص^2 = ن ط + ن لاَ

لیکن ص^2 = ن ط اور مس ر = مس ف ط م = $\frac{ص}{۲ ط}$ = $\frac{ص}{۲ \frac{ص^2}{ن}}$ = $\frac{ن}{۲ ص}$ ∴ ۲ ص جس ر – ن جم ر = ۰ تو اب صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہو جاویگی ءَ^{2} (جس ر)^2 = ن لاَ اور بوسیلہ اسکی (مس ر)^2 = $\frac{ص^2}{۴ ط^2}$ ہمین حاصل ہوگا یہہ (جم ر)^2 = $\frac{۴ ط^2}{۴ ط^2 + ص^2}$ اور (جس ر)^2 = $\frac{ص^2}{۴ ط^2 + ص^2}$ = $\frac{ن}{۴ ط + ن}$ ∴ ءَ^{2} $\frac{ن}{۴ ط + ن}$ = ن لاَ یا ءَ^{2} = (۴ ط + ن) لاَ = ۴ (ط + $\frac{ن}{۴}$) لاَ = نَ لاَ جبکہ نَ = ۴ س ف

تو اب ثابت ہوا کہ مربع وتر کا = سطح وتر العرض اور وتر آتشی اعظم کے

(۸ ۴ ۲) دریافت کرو طول اوس وتر کا جو کہ نقطہ آتشی مین سے گذرتا ہی

ظاہر ہی کہ یہان لا = ف و = س ط = س ف = نق ∴ ءَ^{2} = ن لا

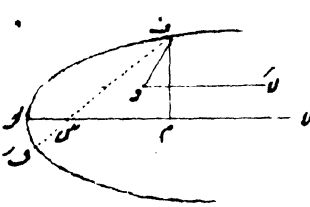
ر وَ = $\frac{نَ}{۲}$ (لا + لاَ) یہہ ہوجاویگی ر = لا + نق اسیطرح سی صورت اوپکی کہ جس نقطہ وَ لاَ سی کہینچا جاوے یہہ ہی - رَ = لا + نق اور یہہ خط محور فلاَ سی فاصلہ -نق پر نقطہ ق سی ملتی ہین یعنے اگر دو مماس ایک ذوزائتی کے دو سرون سی کہینچی جاوین تو وہ خط بنیادی پر ملین گے اور زاویہ جو کہ درمیان اِن دو مماسون کے واقع ہی صورت آیندہ سی حاصل ہو سکتا ہی

$$\text{سس ر} = \frac{(ط - طَ)\ (\text{جس ک})}{۱ + ططَ + (ط + طَ)\ \text{جم ک}} \quad .... \quad (۵۱)$$

$= \frac{(۱ + ۱)\ \text{جس ک}}{۱ - ۱ + ۰}$ کیونکہ ط = ۱ اور طَ = -۱ = $\frac{۱}{۰}$ = سس ۹۰°

یہانسی دریافت ہوا کہ اگر دو مماس ایک وتر آتشی کی دونو سرون سے کہینچی جاوین تو وہ خط بنیادی پر ملکر ایک دوسرے سی زاویہ قایمہ بناتی ہین -

مساوات قطبی کے بیان مین

(۲۵۱) دریافت کرو مساوات قطبی قریب البیضوی کی فرض کرو کہ وتر نقطہ رَ کی لاَ اور رَ ہین اور فرض کرو کہ زاویہ رَ پیمایش کیا جاتا ہی خط ولاَ سے جو کہ متوازی محور خط منحنی کے ہی تو اب بوسیلہ (۶۱) کے یا شکل خط منحنی کے وسیلہ سی ثابت ہو سکتا ہی کہ ر = رَ + ع جس ر اور

لا = لاَ + ع جم ر جبکہ لکھین ہم

ان قیمتون لاَ اور رَ کو مساوات

آیندہ مین رَ^{۲} = ن لا

تو حاصل ہوگا یہہ

(ذ + ع جس ر)^۲ = ن (لا + ع جم ر)

(۲۵۲) فرض کرو کہ قطب ایسا نقطہ ہی جو کہ خط منحنی پر واقع ہی

∴ ذ^۲ + ۲ ع ذ جس ر + ع^۲ (جس ر)^۲ = ن لا + ن ع جم ر یا

ع (جس ر)^۲ = ن جم ر − ۲ ذ جس ر کیونکہ ذ^۲ = ن لا

∴ ع = (ن جم ر − ۲ ذ جس ر) / (جس ر)^۲ اور اگر راس خط منحنی کا قطب فرض کیا جاوے

تو ذ = ۰ ∴ ع = ن جم ر / (جس ر)^۲ — ثر ثر ثر

(۲۵۳) فرض کرو کہ نقطہ آتشی س قطب ھی ∴ ذ = ۰ اور لا = ن/۴

اور اسصورتمین ع نق ہوجاویگا اسیواسطے صورت مساوات عام کی جو کہ یہہ ہی

(ذ + ع جس ر)^۲ = ن (لا + ع جم ر) یہہ ہوجاویگی

نق^۲ (جس ر)^۲ = ن^۲/۴ + ن نق جم ر یا نق^۲ (جس ر)^۲ + نق^۲ (جم ر)^۲ =

ن^۲/۴ + ن نق جم ر + نق^۲ (جم ر)^۲ ∴ نق^۲ = (ن/۲ + نق جم ر)^۲

∴ نق = ن/۲ + نق جم ر یا نق = ن/۲ · ۱/(۱ − جم ر) مساوات قطبی اس

صورت مین بوسیلہ فقرہ (۲۴۱) کی بھی حاصل ہوسکتی ہی فرض کرو کہ

زاویہ اس ف = ر تو نق = س ف = ا م + ا س =

۲ ا س + س م = ن/۲ − نق جم ر ∴ نق = ن/۲ · ۱/(۱ + جم ر) = ن / ۲ (جم ر/۲)^۲

(۲۵۴) اگر ف س خط منحنی سے نقطہ فَ پر بھی ملی تو ہمین حاصل ہوگا

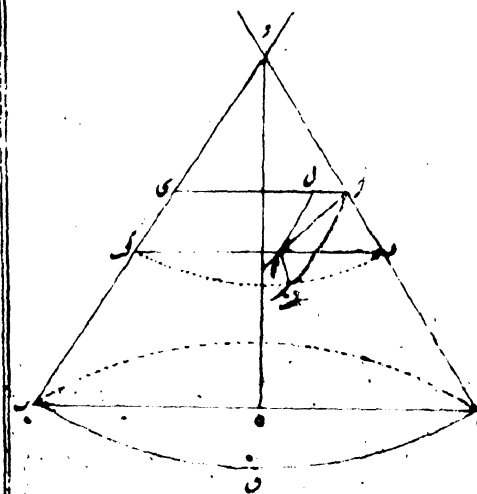
س فَ = ن/۲ × ۱/(۱ − جم (کہ − ر)) = ن/۲ × ۱/(۱ + جم ر) یہان کہ = ۱۸۰°

تو اب ثابت ہوا کہ سطح ف س اور س فَ = ن/۴ × ن/(۱ − (جم ر)^۲) =

ن/٢ (س ف + س ف′) = ن/٢ ف ف′

باب یازدهم

تراشہاء مخروطی کی بیانمین

(٢٥٥) واضح ہو کہ تین خط منحنی بیضوی اور بعید البیضوی اور قریب البیضوی پہلی مخروطہ کی تراشنے سی حاصل ہوئی تہی اسیواسطے انکو تراشہای مخروطی کہتی ہین اب ہم بیان کرینگی خاص ترکیبین مخروط کی قطع کرنے کی اور اونسی دریافت ہوگا کہ اگر مخروط کو ایک طرحسی کاٹین تو ایک خاص خط منحنی ان خطوط مین سی پیدا ہوتا ہی — واضح ہو کہ گردش کرنے ایک مثلث قایمۃ الزاویہ سے گرد ایک ضلع عمود کے مخروط پیدا ہوتا ہی — مثلاً خط و ہ جسکے گرد مثلث مذکور پہرتا ہی

محور کہلاتا ہی اور نقطہ و کو جہان کہ وتر مثلث کا محور سی ملتا ہی راس مخروط کا کہتی ہین اگر وتر متحرک کو محور پر راس کے کہینچین تو پیدا وتر ایک دوسرا مخروط پیدا کریگا جسکے راس اور محور وہی ہونگی جو کہ پہلے مخروط کی تہی پر ایک

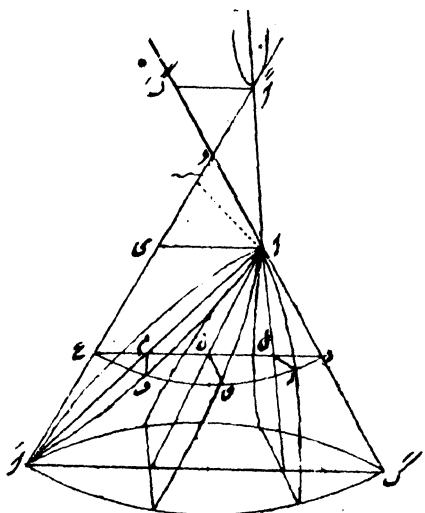
ہر ایک نقطہ وتر مثلث قایمہ الزاویہ کا وقت گردش کی ایک دایرہ پیدا کرتا ہی
یہاں سی معلوم ہوا کہ قاعدہ مثلث کا حرکت کرنی سی ایک سطح دایرہ بنا تا ہی اور اسکو
قاعدہ مخروط کا کہتے ہین اون تراشون کو جو کہ پیدا ہوتی ہین ایک ایسی سطح سے
جو راس مخروط سی شروع ہو کی محور مین سے گذرتی ہی عمودی تراشین کہتی ہین
اور ظاہر ہی کہ ان تراشون سی مثلث پیدا ہوتی ہین اگر ایک سطح مخروط کی
کسی سمت مین گذری تو وہ تراش جو کہ اس سطح کی گذرنی سی پیدا ہوگی تراش
مخروطی کہلاتی ہی خواص اون خطون کی جو کہ اس سطح کی تراشنے سے پیدا ہونگی
مختلف موافق مختلف مقام سطح مذکور کی ہونگی اب ہم بیان کرینگے کہ کس
قسم کے خطوط منحنی کو ایک خاص تراش تعلق رکھتی ہی اور یہہ بھی لکھینگی کہ
ایک خاص قسم کی خطوط منحنی ایک خاص تراشنے والی سطح سی پیدا ہوتے ہین
(۲۵۶) فرض کرو کہ و ب ق س ایک مخروط ہی اور و راس اور و ہ
محور اور ب س ق قاعدہ اور ف ا وہ خط ہی جو کہ سطح تراشنی والی اور
سطح مخروط کی ملنی سی پیدا ہوتا ہی اور ا وہ نقطہ خط منحنی کا ہی جو تمام نقطون
خط منحنی سے نزدیک تر راس و کی ہی فرض کرو کہ د ب ہ س ا ایک ایسی
سطح عمودی ہی جو کہ گذرتا ہی محور و ہ مین سی اور عمود تراشنی والی سطح ف ا م
پر ہی اور ا م جو کہ مقام تقاطع ان سطحون کا ہی ایک خط مستقیم ہی اور اسکو
محور تراش مخروطی کا کہتے ہین کیونکہ خط منحنی مشابہ دونو طرف اس خط کے ہی
فرض کرو کہ ک ف د ایک تراش متوازی قاعدہ کے ہی اور ظاہر کہ یہہ تراش

دایرہ ہی اور خط ک ف د جو کہ تقاطع کرنی اس سطح اور سطح و ب ہ س ا کی
سی پیدا ہوا ہی قطر اس دایرہ کا ہی — چونکہ سطح ک ف د اور تراشنی والی
سطح ف ر م دونو عمود سطح و ب ہ س پر ہین تو خط م ف جو کہ تقاطع کرنے
پہلی دو سطح سی پیدا ہوتا ہی عمود سطح و ب ہ س پر ہوگا (موافق ایک شکل
۱۱ مقالہ ۲ کے) اور اسیواسطی یہہ خط عمود ہوگا تمام اون خطون پر جو کہ اس
سطح مین اوس سے ملین گی اسیواسطے خط م ف کا عمود خط ک د اور ر م پر
ہوگا فرض کرو کہ زاویہ د ر م کا جو کہ درمیان خط ا د اور ا م کے ہی
= ط اور فرض کرو کہ زاویہ ا و ب = م اور کہینچو خط ا ی کا متوازی
خط ب ہ کی اور م ل متوازی و ب کی اور فرض کرو کہ زاویہ ا م = لا
اور م ف = ی اور ا د = ا تو اب موافق خاصیت دایرہ کی مربع ف م =
سطح ک م اور م د کی اور م د = $\frac{\text{م ا جس م ا د}}{\text{جس م د ا}} = \frac{\text{لا حس ط}}{\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}}$ اور
ک م = ی ا − ا ل = $\frac{\text{ا و حس ا د ی}}{\text{جس و ی ا}} - \frac{\text{ا م حس ا م ل}}{\text{جس ا ل م}}$ لیکن زاویہ
و ی ا = $۹۰^\circ - \frac{\text{م}}{۲}$ اور ا ل م = $۹۰^\circ + \frac{\text{م}}{۲}$ اگر ہم کہینچین م ل کو
یہان تک کہ ملی خط ا د سی تو ظاہر ہی کہ ا م ل = $۱۸۰^\circ - (\text{ط} + \text{م})$
تو اب ثابت ہوا کہ ک م = $\text{ا}\ \frac{\text{حس}\ \frac{\text{م}}{۲}}{\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}} - \text{لا}\ \frac{\text{حس}\,(\text{ط}+\text{م})}{\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}}$ اسیواسطے

$$\text{ی}^۲ = \text{لا}\ \frac{\text{حس ط}}{\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}} \left\{ \text{ا}\ \frac{\text{حس م}}{\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}} - \text{لا}\ \frac{\text{جس}\,(\text{ط}+\text{م})}{\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}} \right\}$$

$$\therefore \text{ی}^۲ = \frac{\text{جس ط}}{\left(\text{جم}\ \frac{\text{م}}{۲}\right)^۲} \left\{ \text{ا حس م} \times \text{لا} - \text{جس}\,(\text{ط}+\text{م})\ \text{لا}^۲ \right\}$$ چونکہ

چونکہ یہہ مساوات دوسری درجہ کی ہی تو معلوم ہوا کہ تراشہای مخروطی مساوات درجہ دویم سی تعلق رکھتی ہین جبکہ مطابق کرینگی ہم اس مساوات کو مساوات آیندہ سی ر۲ = ن لا + ق لا۲ جو کہ تعبیر کریگی بیضوی یا قریب البیضوی یا بعید البیضوی کو جبکہ ق مساوی ایک مقدار منفی یا صفر یا مثبت کی فرض کیا جاوی تو معلوم ہوگا کہ مساوات گذشتہ تعلق رکہتی ہی بیضوی یا قریب البیضوی یا بعید البیضوی سی جبکہ مقدار جب (ط + م) مثبت یا صفر یا منفی فرض کی جاویگی اور واسطی ثبوت ان صورتون کے اب ہم فرض کرینگے کہ کاٹنی والی سطح حرکت کرتی ہی گرد نقطہ آ کے اسطرح پر کہ قیمتین ط کی ۰ سی زیادہ ہوتی جاینگی ۱۸۰° تک ۔ ثر ثر ثر

(۲۵۷) فرض کرو کہ ط = ۰ ∴ ر۲ = ۰ اور ر = ۰ یہہ مساوات اوس خط مستقیم کی ہی جو کہ محور لا کا ہی یہہ شکل سے بہی ظاہر ہوتا ہی کیونکہ جب ط = ۰ تو اس صورت مین تراشنی والی سطح صرف مخروط سی مس کرتی ہی اسواسطی مقام خط ا م کا آ و ہو جاویگا ۔

(۲۵۸) فرض کرو (ط + م) کم ہی ۱۸۰° سے تو اس صورت مین خط منحنی بیضوی ہوجاویگا چونکہ اب شکل مرقومۂ بالا مین دونو زاویہ ردی اور درم کی ۱۸۰° سے کم ہین اسیواسطے خطوط دی اور رم نقطہ ح پر ملینگے یا تراشنی والی سطح قطع کریگی مخروط کے دونو ضلعونکو۔

(۲۵۹) فرض کرو کہ م مرکز بیضوی کا ہی تو اب م = ½ ری اور م د = ½ رگ ∴ مربع محور جوڑ کا = سطح ری اور رگ اور جبکہ کھینچینگے ہم دو عمود نقاط ر اور ی سے رگ پر تو مربع محور کلان کا = مربع رک + سطح ری اور رک ∴ فاصلہ درمیان نقاط آتشی کے = ک ر اگر خط مستقیم رکہ کا کھینچا جاوے بناتا ہوا ایک زاویہ ی ح ی کو = زاویہ ی ار تو خط ا کہ خط بنیادی تراشش مخروطی کا ہوگا اگر

اگر ایک دایرہ اندر مثلث ا ز ا' و سے کھینچا جاوے تو یہہ مس کریگا خط ا ز ا' سی تراش مخروطی کے نقطہ آتشی پر ــ ثر ثر ثر

(۲۶۰) فرض کرو کہ ط = ۹۰° ــ م/۲ تو جیب ط جیب (ط + م) / ۲ (جم م/۲)^۲ = ۱

اسیو اسطی اس صورت مین جبکہ تراشنے والی سطح متوازی قاعدہ کی ہو تو مساوات گذشتہ مساوات دایرہ کی ہو جاویگی ــ ثر ثر ثر

(۲۶۱) فرض کرو کہ ط + م = ۱۸۰° ∴ جیب (ط + م) = ۰

تو اب اس صورت مین خط منحنی قریب البیضوی ہو جاویگا اور قطع کرنی والی سطح حرکت کرتی ہوئی مقام ا ن ق پر آجاویگی جو نکہ اس صورت مین محور ا ن کا متوازی ضلع و ع مخروط کی ہے اسیواسطے مساوات گذشتہ مساوات قریب البیضوی کی اور صورت اوسکی یہہ ہوگی ی^۲ = ۴ ط (جس م/۲)^۲ لا

اگر ا ک لہ کھینچا جاوے بنا تا ہے زاویہ ی ا ک = زاویہ ا و کہ تو ا ک خط بنیادی ہے تراش مخروطی کا ہی اور وہ دایرہ جو کہ مس کرتا ہی خطوط ا و اور ا ن اور و ع سی مس کریگا خط ا ن قریب البیضوی کے نقطہ آتشی پر

(۲۶۲) فرض کرو کہ (ط + م) زیادہ ہی ۱۸۰° سی تو جیب (ط + م) کی منفی ہوگی اور خط منحنی مطلوب بعید البیضوی ہوگا اور قطع کرنیوالی سطح اس خاص صورت مین مقام ا ل ر پر ہوگی اس صورت مین اگر خطوط ا ل اور و ی کو پیچھی کیطرف کھینچین تو وہ بالضرور نقطہ ا' پر ملینگے یا قطع کرنی والی سطح دو نو مخروطونسی ملی گی اور خط منحنی کی دو شاخین ہو نگی بلکہ

نتائج انہین سی ہر ایک مخروط کی سطح پر بنی ہی -

موافق بیضوی کی ثابت ہوسکتا ہی کہ مربع قطر متجانس کا = سطح ا ی او ا ک
اور خط ا ک فاصلہ درمیان دو نقطہ آتشی کے ہی اور ا ک خط بنیادی ہی اور
وہ دایرہ جو کہ مس کرتا ہی ا د اور د ا اور ا ل سے ا ل کو نقطہ آتشی
پر مس کریگا - ٭ ٭ ٭ ٭ ٭

(۲۶۳) واضح ہو کہ ہم ط کی بہی مختلف قیمتین فرض کرسکتی ہین یا ہم اسکو
اسطرح پر تعبیر کرینگی کہ تراشنے والی سطح مخروط سی ملتی ہی ایک اور نقطہ پر سوای
نقطہ ا کے مثلاً فرض کرو کہ ط = ۰ تو ی٢ = $\frac{\text{جس ط جس (ط + م)}}{\text{(جم } \frac{\text{م}}{\text{۲}}\text{)}^{۲}}$ لا٢
جونکہ اس صورتین جس ط اور (جم م/۲)٢ مثبت ہین تو اب ممکن ہو نا قیمت
مساوات گذشتہ کا موقوف ہوگا مقدار جس (ط + م) پر
اگر ط + م کم ہو ۱۸۰° سی تو اس صورتین مقدار (ط + م) کی ناممکن ہوگی
اور یہہ مساوات صرف بطور آیندہ کی حل ہوگی لا = ۰ تو ی = ۰ تو اب
معلوم ہوا کہ تراش مخروطی اس صورتین ایک نقطہ ہی اور یہہ صورت اوس
وقت حاصل ہوگی جبکہ تراشنے والی سطح اس مخروط سی اسطور پر گذری
کہ وہ متوازی ا ف ا ک کی ہو - اگر (ط + م) زیادہ ہو ۱۸۰°
تو ہمین حاصل دو ایسی خطوط مستقیم ہونگی جو کہ تقاطع کرینگے ایک دوسرے کو
نقطہ شروع پر اس صورتمین قطع کرنے والی سطح نقطہ د سی گذرتی ہوئی
متوازی خط ا ل پیدا کہینچی گئی ہی اور تراش مخروطی اس صورت مین ایسی

دو خط مستقیم ہو گئے کہ ملین گے نقطہ و پر - ژ ش ثر

(۲۶۴) مرقومہ بالا سے واضح ہوگا کہ تراشہاے مخروطی سات قسم کے ہین نقطہ اور خط مستقیم اور دو خطوط مستقیم جو کہ تقاطع کرتی ہین ایک دوسرکو اور دایرہ اور بیضوی اور بعید البیضوے اور قریب البیضوی یا تمام ایسی خطوط منحنی جو کہ مساوات درجہ دویم سی تعلق رکہتی ہین سوا اونکی اختلاف کی سوای وہ خط متوازیکے جو صرف اختلاف قریب البیضوی کا ہی -

واضح ہو کہ تینون اخیر کی تراشون کو یعنی بیضوی اور بعید البیضوی اور قریب البیضوی کو تراشہای مخروطی کہتی ہین اور بیان انکا اکثر ریاضی دانون نے فلاطون کے وقت سی کیا ہی اور یہہ خطوط منحنی افلاطون کے مدرسہ مین دریافت کی گئی تہی اور جبکہ اوسکے شاگردونکو اکثر خواص ان خطوط منحنی کے معلوم ہوئی تو اونہون نے بخوبی انکا امتحان کرکے اکثر کتابین انکی باب مین چہپوائین ان کتابون مین سی وہ کتاب جو کہ اپولونیس باشندہ پرگا نے تصنیف کی ہی موجود ہی اوسکی آٹہہ باب ہین چار آسان اور چار مشکل لیکن فی الحقیقت لایق مطالعہ کرنیکے ہی اور متقدمین نے اون خطوط منحنی کو بوسیلہ علم ہندسہ کی اسطرح سے لکہا ہی جسطرح کہ متاخرین انکو بوسیلہ مساواتون کی تعبیر کرتی ہین

$$ر^۲ = ن لا + \frac{ن}{ط۲} لا^۲$$

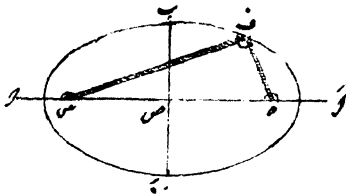
$$ر^۲ = ن لا - \frac{ن}{ط۲} لا^۲$$

$$ر^۲ = ن لا$$

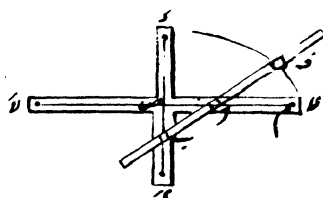
بیان کہینچنی تراشہای مخروطی کا بوسیلہ حرکت متواتر کی

(۲۶۵) واضح ہو کہ تراشہای مخروطی صرف ریاضی ہی مین مفید نہین ہین وہ اکثر علوم اور فنون مین فایدہ مند ہین اسیواسطے اب ہم بیان انکا بہ تفصیل اور صحیح طور سی کرین گے واضح ہو کہ ہر ایک خط منحنی دو طور سی کہیچ سکتا ہی بوسیلہ ایک خاص ترکیب ریاضی کے یا بوسیلہ نقاط کی مثال پہلی ترکیب کے ایک دایرہ ہے جو کہ کہیچ سکتا ہی بوسیلہ ایک خط پرکاری کی یا بوسیلہ ایک ڈوری کے جسکا ایک سرا بندہا ہوا مرکز پر اور دوسرا اسیرا حرکت کری گرد اوس نقطہ کی اس قسم کی ترکیبین جو کہ حرکت متواتر پر موقوف ہین ہمیشہ کام مین نہی آتی ہین سوای دایرہ کے کوئی اور خط ایسا سہل نہین ہی کہ اسمین ایسی ترکیب جاری ہو سکی اسیواسطے ایسی خطوط منحنی کو نقاط کی وسیلہ سے دریافت کرتے ہین یہہ ترکیب استعمال مین آ سکتی ہی بوسیلہ مساوات خط منحنی اور بعض خواص ہندسی کی جو کہ اوس خط منحنی مین پائی جاتی ہین جسکا کہینچنا مطلوب ہے بوسیلہ اس ترکیب کی بہت سی نقاط خط منحنی کے معلوم ہو جاتی ہین اور ان نقاط کو ایک مہین قلم یا آرہ سی ملا کی خط منحنی مطلوب دریافت ہو جاویگا لیکن ان نقاط کو بہت صفائی سے ملانا چاہئے اب ہم ترکیبین ان خطوط منحنی کی کہینچنی کے بیان کرین گے

(۲۶۶) کہینچو اوس بیضوی کو جسکے محور معلوم ہین — فرض کرو کہ

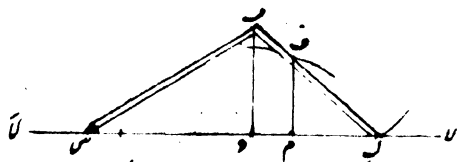
ا اَ اور ب بَ محور ہین نقطہ ب کو مرکز گردان کر کہینچو ایک دایرہ جسکا
نصف قطر مساوی اَ ص کے
ہوگا جو کاٹتا ہوا ا اَ کو نقاط
س اور ہ مین ان نقاط
کو نقاط آتشی کہتے ہین

قایم کرو دو میخین مقام س اور ہ مین فرض کرو کہ ایک سرا ڈوری کا
نقطہ اَ پر ہی اور گذارو دوسرا اس ڈوری کا نقطہ ہ مین لاؤ اوسے پہر نقطہ
اَ پر اسطرح پر کہ دونو سیری اس ڈوری کے اس نقطہ پر ملین اور ڈورا گرد
ہ اور اَ کی مساوی دو چند اَ ہ کی ہو – قایم کرو میخ یا ایک تیز آلہ کو اس ڈورے
مین نقطہ اَ پر اور پہراؤ اس ڈوری کو گرد نقاط س اور ہ کی اسطرح
کہ یہہ ڈورا ہمیشہ تنا ہوا رہی تو اب یہہ میخ یا آلہ خط منحنی بیضوی کا بناویگا
مثلا اگر ڈورا پہرتے ہوئے مقام ف پر آوی تو س ف + ف ہ + ہ س =
۲ ا ہ = ا اَ + ہ س ∴ س ف + ف ہ = ا اَ

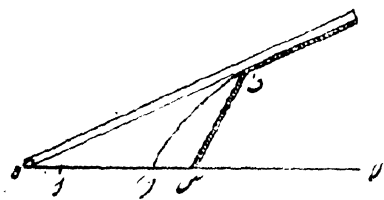
(۲۶۷) ایک اور ترکیب کہینچنے اس خط منحنی کے بوسیلہ ایک بیضوی پرکار
کی جسکو ٹریمل کہتی ہین یہہ ہی – فرض کرو کہ ڈورول یا دو لکڑیان معہ
سوراخون کے عمود ایک دوسری پر ہین اور فرض کرو کہ ب ف ایک
تیسری لکڑی ہی قطع کرو اسمین سے ب ف مساوی نصف محور کلان کے اور
اَ ف مساوی نصف محور خورد کی اور فرض کرو کہ نقطہ ب پر ایک ایسی میخ ہی

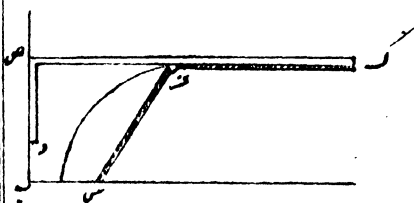
جوکہ ی ی َ پر حرکت کرسکے اسیطرح کی اور یہ نقطہ ر پر ہی اور جبکہ ب ف

حرکت کری گرد ایک قلم کے جوکہ فَ پر ہی تو ایک خط بیضوی کا پیدا ہوگا اور مان لو کہ نقطہ صَ پر محور ملتی ہین اور ص م = لا اور م ف = ی و تر ق کی ہین کہیچو خط ب نَ کا متوازی خط صَ مَ کے جوکہ ملتا ہی خط ف م سے نقطہ ن پر تو اب ظاہر ہی کہ ر م = $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ ب ن اور مربع ر ف = مربع ف م + مربع ر م

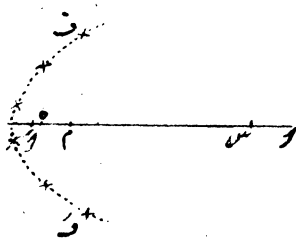
یا ص۲ = ی۲ + $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ لا۲ ∴ ط۲ ی۲ + ص۲ لا۲ = ط۲ ص۲

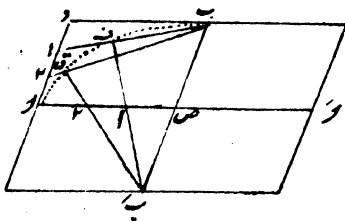
(۲۶۸) ترکیب آئندہ بہی بہت آسان ترکیب واسطے کہینچنے بیضوی کی ہی فرض کرو کہ لا لاَ ایک لکڑی ہی اور سَ عَ اور کَ عَ دو لکڑیان ہین ہر ایک انمین سی مساوی نصف مجموعہ محور کلان اور محور خورد کے ہی یعنی

س ع یا ک ع = $\frac{\text{ط} + \text{ص}}{2}$ جہانکہ ط مساوی نصف محور کلان اور ص مساوی نصف محور خورد کی ہی یہہ دونو لکڑیان نقطہ عَ پر بوسیلہ ایک ایسی

بندش کے علاوہ لٹکے ہین جو کہ باسانی حرکت کرسکتے ہی - اور فرض کرو کہ
ف ع = $\frac{ط - ص}{۲}$ اب اگر نقطہ ک کو خط لالا پر حرکت دیجاوے تو ظاہر
کہ نقطہ ف خط بیضوی کا بناویگا کھینچو عمود ع د اور ف م س لا برابر فرض
کرو کہ س م = لا اور ف م = ی تو اب ظاہر ہی کہ مربع ع ک = مربع ع د
+ مربع د ک لیکن ک ع : ک ف :: ع د : ف م یعنے $\frac{ط + ص}{۲}$: ص :: ع د
: ی ∴ ع د = $\frac{ط + ص}{۲} \times \frac{ی}{ص}$ اور ظاہر ہی کہ ک د : م د :: ک ع
: ع ف ∴ ک د + م د : م د :: ک ع + ف ع یعنے لا : م د ::
ط : $\frac{ط - ص}{۲}$ ∴ م د = $\frac{ط - ص}{۲} \frac{لا}{ط}$ اور یہہ بھی ظاہر ہی کہ
ک ع : ف ع :: ک د : م د یا $\frac{ط + ص}{۲}$: $\frac{ط - ص}{۲}$ :: ک د : $\frac{ط - ص}{۲} \frac{لا}{ط}$
∴ ک د = $\frac{ط + ص}{۲} \frac{لا}{ط}$ ∴ $\left(\frac{ط + ص}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{ط + ص}{۲} \frac{ی}{ص}\right)^۲ +$
$\left(\frac{ط + ص}{۲} \frac{لا}{ط}\right)^۲$ یعنے $\frac{ی^۲}{ص^۲} + \frac{لا^۲}{ط^۲} = ۱$

(۲۶۹) کھینچو خط بعید البیضوی کو بوسیلہ حرکت متواتر کے - فرض کرو کہ
ر ر محور کلان بعید البیضوی کا ہی اور س ہ فاصلہ درمیان نقاط آتشی
کی ہی اور ہ ف کہ
ایک ایسی لکڑی ہی جو کہ
نقطہ ہ پر حرکت
کرسکتی ہی اور ملاؤ
ایک ڈورا درمیان نقاط ک اور س کے مساوی ک ہ - ر ر کی اور حرکت

دو لکڑی کہ ہ ک کو اسطرح پر کہ ڈورا کہ ف س کے ہمیشہ تنی ہوئی رہی تو اب حرکت
نقطہ ف کیہیچتا ہے ایک قلم سرمہ کا لگا ہوا ہی خط بعید البیضوی کا بنیگا کیونکہ حاصل
تفریق خط ہ ف اور س ف کا ہمیشہ ایک سا رہیگا اگر طول ڈور کا مساوی خط
ہ ک کی ہو تو نقطہ ف کے حرکت سی ایک ایسا خط پیدا ہوگا جو کہ عمود ہوگا
ہ س پر — اور اگر ڈورا زیادہ ہو خط ہ ک سے تو اسصورت مین دوسری
شاخ بعید البیضوی کی گرد نقطہ ہ کی بنیگی

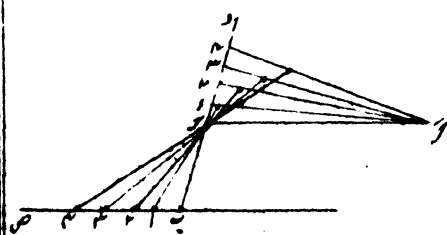
(۲۷۰) کہینچو خط قریب البیضوی کو بوسیلہ حرکت متواتر کے — فرض کرو کہ
س نقطہ آتشی ہی اور ب ص خط بنیادی ہی رکہو آلہ د ص ک کو جو کہ
اکثر بڑہیون کے پاس
ہوتا ہی اور اسمین لکڑی
ص ک عمود دوسری لکڑی
ب ص پر ہی اور علاوہ ایک
ڈورا مساوی ک ص کے درمیان نقاط ک اور س کے اسطرح پر کہ وہ گذرا
نقطہ ف مین جہانکہ ایک قلم سرمہ کا لگا ہوا ہی اب حرکت دو ک ص د کو
خط ب ص پر تو اب ظاہر ہی کہ اس حرکت سی نقطہ ف کا خط قریب البیضوی کا
بناویگا کیونکہ س ف ہمیشہ مساوی خط ف ص کے رہیگا جو کہ خط بنیادی ص ب
پر عمود ہی

(بیان بنانی تراشہای مخروطی کا بوسیلہ نقاط کے)

(۲۷۱) کہینچو خط بیضوی کو بوسیلہ نقاط کی جبکہ محور اوسکے معلوم ہون

فرض کرو کہ اا' محور کلان ہی اور س اور ہ نقاط آتشی نقطہ س کو مرکز گردان کے کہینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر خط ام ہو جو کہ چہوتا ہی خط اا' سی اسیطرحسی کہینچو ایک اور دایرہ جسکا ہ مرکز اور م ا' نصف قطر ہو اور فرض کرو کہ یہہ دایرہ قطع کرتا ہی پہلے دایرہ کو نقاط ف اور ف' پر تو اب ظاہر ہی کہ س ف + ہ ف = ا م + م ا' = اا' تو اب ثابت ہوا کہ ف ایک نقطہ خط بیضوی کی اسیطرح سی بہت نقاط معلوم ہو سکتے ہین جنکی ملانی سے خط بیضوی بنیگا — ٭ ٭ ٭

(۲۷۲) کہینچو خط بیضوی کو جبکہ اوسکی اقطار متجانس معلوم ہون

فرض کرو کہ اا' اور ب ب' اقطار متجانس ہین لقطہ ب' مین سی کہینچو خط ب' د کا متوازی خط ا ص کے اور نقطہ ا مین سی کہینچو خط ا د کا متوازی خط ب ص کے تقسیم کرو دونو خطوط

اد اور ا ص کو مساوی حصو نمین مثلاً مساوی تین حصو نمین اور ملاؤ خطوط ا
اور ب د کو نقاط تقسیم اد مین اور ا ت اور ت ۲ کو نقاط تقسیم ص ا مین
تو اب نقاط تقاطع ف اور ق کے نقطے خط منحنی کی ہونگی واسطی ثبوت اس
دعوی کے فرض کرو کہ ص نقطہ شروع ہی اور ا ص = ط۱ اور
ب ص = ص۱ تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خط مستقیم ب ف کی یہہ ہوگی
ی − ص۱ = ص۱ / ۳ط۱ لا اور مساوات خط مستقیم ب ف کی یہہ ہوگی
ی + ص۱ = − ۳ص۱ / ط۱ لا تو اب ظاہر ہی کہ حاصل ضرب اون زاویون
کی مماس کا جو کہ یہہ خطوط محور لا سے بناتی ہین = − ص۱ / ۳ط۱ × ۳ص۱ / ط۱
= − ص۱² / ط۱² اور چونکہ یہہ ایک مقدار مقررہ ہی اسیواسطے نقطہ ف کا
خط منحنی پر ہوگا (۱۴۱) اسیطور سے دریافت ہو سکتے ہین لانہایت
نقطے جنکی ملانی سے ایک خط بیضوی کا پیدا ہوگا

(۲۷۳) ترکیب آیندہ واسطی کھیچنے خط بیضوی کے بوسیلہ نقاط کی بہت خوب
اور آسان ہے
فرض کرو کہ
ا ا ایک قطر ہی
اور ا ب برابر
اور متوازی قطر

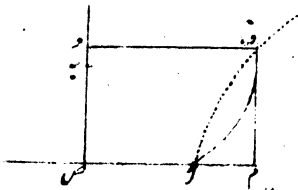
متبادل بیضوی کے ہی نقطہ ب مین سے کھیچو خط ب ص کا متوازی ا ا کی اور

قطع کرو اسکو مساوی چند ضعف اَ اَ مَ کے اور اسیطرح سی کہینچکر خط اَ بَ
کو دَ تک اور لو اَ دَ کو مساوی اوتنی ہی ضعف اَ بَ کی اور تقسیم کرو دونو خطوط
بَ صَ اور بَ دَ کو مساوی حصو مین یعنی اَ دَ کے جتنی حصے کرو اوتنی ہی
بَ صَ کے کرنے چاہین مثلا تقسیم کرو اَ دَ کو چار حصو مین اور بَ صَ
کی بہی چار حصہ کرو ملاؤ خطوط اَ اَ اور اَ ۲ اور اَ ۳ اور اَ ہ نقطہ اَ
اور نقاط تقسیم اَ دَ مین اور اسیطرح ملاؤ خطوط اَ اَ اور اَ ہو اور اَ ہ
اور اَ ہ کو نقطہ اَ اور نقاط تقسیم بَ صَ مین تو اب نقاط تقاطع
ان خطوط کی نقطہ خط منحنی کے ہونگی ثبوت اسکا موافق ترکیب گذشتہ کی ہی

(۲۷۴) کہینچو خط بعید البیضوی کو جبکہ اوسکی محور معلوم ہون ۔

فرض کرو کہ اَ اَ محور کلان ہے اور سَ اور ہ نقاط التی معلوم ہین
نقطہ سَ کو مرکز فرض کرکے کہینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر اَ م زیادہ ہو
اَ اَ سی اسیطرح سی کہینچو ایک دوسرا دایرہ نقطہ ہ مرکز اور اَ م کو نصف
قطر کرو اگر تو اب نقاط تقاطع ان دونو دایرہ کی نقطے خط منحنی کے ہونگی
ثبوت اسکا اوس طور سی ہوگا جب کہ واسطی کہینچنے بیضوی کے فقرہ (۲۷۱)
کی مین بیان کیا گیا ہی ۔

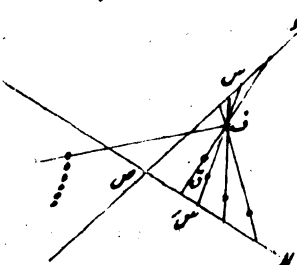
اگر (۲۷۳) مین بَ صَ کو بجای باہین طرف لینی کی سیدہی طرف کو
لیوین اور بعد اسکی عمل کرین اوسیطرح جسطور سی (۲۷۳) مین بیان
کیا تو اس عمل سے بعید البیضوی کا خط پیدا ہوگا ۔

(۲۷۵) کہینچو خط البعید ابیضوی مساوی القطرین کو بوسیلہ نقاط کے

فرض کرو کہ ص ر اور ص ب مساوی محور ہین کہینچو خط ص ب نقطہ و تک نقطہ د کو مرکز کرو انکی کہینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر ر د ہی کہینچو خط

د ف کا عمود خط ص ف پر جو کہ قطع کریگا دایرہ کو نقطہ ق پر تو اب نقطہ ق کا نقطہ خط منحنی مطلوب کا ہوگا ۔ فرض کرو کہ ص م = لا اور م ف = ی

تو اب ظاہر ہی کہ مربع ص د = مربع و ر ـ مربع ص ر یا $ی^۲ = لا^۲ - ط^۲$

(۲۷۶) معلوم ہین ہمین خطوط متقارب الملاقات ص لا اور ص ر اور نقطہ ف خط منحنی کا بناؤ خط البعید ابیضوی کو بوسیلہ نقاط کے

نقطہ ف مین سی گذرتا ہوا کہینچو خط س ف س کا جو کہ انجام ہوتا ہی خطوط متقارب الملاقات پر خط س ف مین ن کا لو س ن = س ف

تو اب نقطہ ق موافق فقرہ (۲۱۷) کے ایک نقطہ خط منحنی کا ہوگا اسیطرح سی بہت سی نقاط معلوم ہو سکتے ہین جنکی ملانی سی خط منحنی پیدا ہوگا واضح ہو کہ سوای معلوم ہونی خطوط متقارب الملاقات ایک اور شرط معلوم ہونی چاہیی واسطی دریافت کرنے خط منحنی کے کیونکہ خطوط متقارب الملاقات

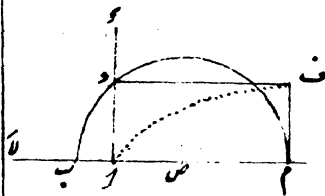
کی معلوم ہونی سے صرف نسبت محوروں کی معلوم ہوتی ہی اور اس نسبت سے محور دریافت نہین ہو سکتے —

(۲۷۷) بناء خط قریب البیضوی کا بوسیلہ نقاط کے جب کہ وتر آتشی عظم ن معلوم ہو فرض کرو کہ ا لا اور ا د محور متقاطع علی القوایم ہین محور ا لا مین سے کاٹو اب = ن نقطہ ص کو جو کہ ا لا پر ہی مرکز کر دانکر کہینچو دایرہ ب د م جسکا نصف قطر ص ب ہو تقاطع کرتا ہوا محور ی کو نقطہ د پر اور محور لا کو نقطہ م پر اب کہینچو خطوط د ف اور ف م عمود خطوط ا د اور ا لا پر تو نقطہ ف کا خط منحنی پر ہو گا —

فرض کرو کہ ا م = لا اور

م ف = ی تو اب ظاہر ہی

کہ مربع ا د = سطح ا ب اور ا م

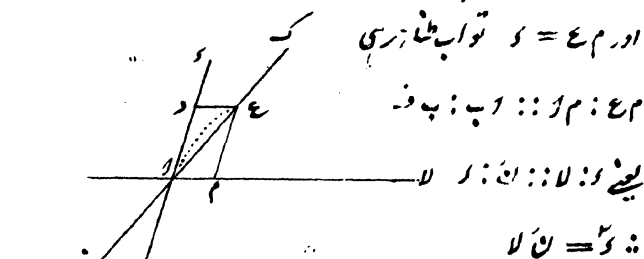
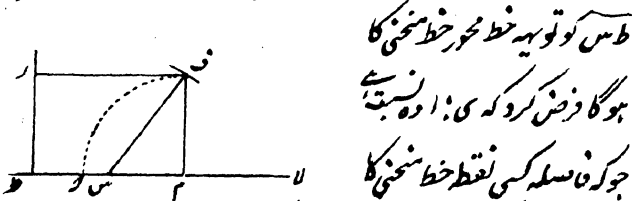
یعنی $ی^2$ = ن لا

(۲۷۸) بناء خط منحنی کو جبکہ معلوم ہو زاویہ جو کہ درمیان محوروں کی اور ایک وتر آتشی ن کے واقع ہی فرض کرو کہ ا لا اور ا ی محور ہین اور اب وتر آتشی نقطہ ب مین سے کہینچو ص ب متوازی خط ا لا کے اور نقطہ ا مین سے گذارو ایک خط ک ا ف کا جو کہ قطع کرتا ہی ص ب کو نقطہ ف مین کاٹو خط ا ی مین سے ا د = ب ف اور کہینچو خط د ع کا متوازی ا لا کی جو کہ قطع کرتا ہی ا گ کو نقطہ ع مین تو اب نقطہ ع نقطہ خط منحنی کا ہو

مطلوب کا ہوگا - کہینچو خط م ع متوازی و د کے اور فرض کرو کہ ا م = لا

اور م ع = ی تو اب ظاہر ہی

م ع : م ا :: ا ب : ب ف

یعنی ی : لا :: ان : ی

∴ ی² = ن لا

(۲۷۹) کہینچو کوئی ایک تراش تراشہای مخروطی سی جبکہ معلوم ہو مقام خط بنیادی ط ر اور نقطہ آتشی س کا - کہینچو س ط عمود ط ر پر اور کہینچو خط ط س کو تو یہہ خط محور خط منحنی کا ہوگا فرض کرو کہ ی : ا وہ نسبت ہے جو کہ فاصلہ کسی نقطہ خط منحنی کا نقطہ آتشی سے رکہتا ہی اوس فاصلہ سی جو کہ درمیان اوسی نقطہ خط منحنی اور خط بنیاد کے کی ہی یعنی اگر ا س : ا ط :: ی : ا تو ا نقطہ خط منحنی کا ہی فرض کرو ایک نقطہ م کا خط ا لا مین اور نقطہ س کو مرکز گردانکی کہینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر ی ضرب ط م ہو کہینچو م ف عمود محور ا لا پر جو کہ ملی دایرہ سی نقطہ ف پر تو اب نقطہ ف کا ایک نقطہ خط منحنی کا ہوگا - فرض کرو کہ ا نقطہ شروع ہے اور ا م = لا اور م ف = ی محور متقاطع علی القوایم مین اور ا س = م ∴ ا ط = م/ی اور اب ظاہر ہی کہ س ف = ی × ط م =

ی × ف ر ∴ ڈ^2 + (لا − م)^2 = ی^2 (لا + $\frac{م}{ی}$)^2

یا ڈ^2 + لا^2 − ۲ م لا + م^2 = ی^2 لا^2 + ۲ ی م لا + م^2

∴ ڈ^2 + (۱ − ی^2) لا^2 − ۲ م لا (۱ + ی) = ۰ اور یہہ مساوات اون خطوط منحنی کی ہی جو کہ مساوات درجہ دویم سسی تعلق رکہتی ہین اب فرض کرو کہ ی کم ہی ا سی ∴ ڈ^2 = (۱ − ی^2) {$\frac{۲ م}{۱ − ی}$ لا − لا^2} جبکہ مطابق کرینگی ہم اس مساوات کو مساوات بیضوی سے جو کہ یہہ ہی ڈ^2 = $\frac{ص^2}{ط^2}$ (۲ ط لا − لا^2) تو ۲ ط = $\frac{۲ م}{۱ − ی}$ اور $\frac{ص^2}{ط^2}$ = ۱ − ی^2 ∴ ص^2 = $\frac{م^2}{(۱ − ی)^2}$ (۱ − ی^2) = م^2 $\frac{۱ + ی}{۱ − ی}$ تو اب ثابت ہوا کہ خط منحنی ایک ایسا بیضوی ہی جسکے محور $\frac{۲ م}{۱ − ی}$ اور ۲ م × $\sqrt{\frac{۱ + ی}{۱ − ی}}$ اب فرض کرو کہ ی زیادہ ہی ا سی تو

ڈ^2 = (ی^2 − ۱) {$\frac{۲ م}{ی − ۱}$ لا + لا^2} تو اب ظاہر ہی کہ یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہی جسکی محور $\frac{۲ م}{ی − ۱}$ اور ۲ م × $\sqrt{\frac{ی + ۱}{ی − ۱}}$ ہونگی اور اب فرض کرو کہ ی = ۱ ∴ ڈ^2 = ۴ م لا یہہ مساوات ایسی قریب البیضوی کی ہی جسکا ذر آتشی اعظم ۴ م ہی —

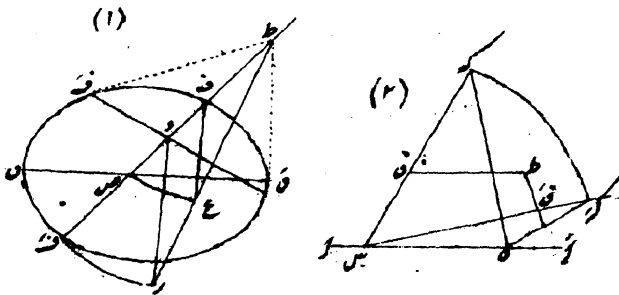
(۲۸۰) چونکہ عام مساوات تراشہای مخروطی کی یہہ ہی

ڈ^2 + (۱ − ی^2) لا^2 − ۲ م لا (۱ + ی) = ۰ تو اب ظاہر ہی کہ اگر کوئی خاصہ بیضوی کا معلوم ہو تو وہ صورت بعید البیضوی یا قریب البیضوی مین بہی صحیح ہو سکتا ہی بوسیلہ ایک خاص تبدیلی قیمت ی کی سکے مثلاً مساوات مماس بیضوی کی یہہ ہی

ڈ ڈ' + (۱ − ی^2) لا لا' − م (۱ + ی) (لا + لا') = ۰ تو مساوات مماس بعید

البیضوی کی یہہ ہوگی ی ی َ – (ی ٗ – ۱) لا لا َ – م (۱ + ی) (لا + لا َ) = ۰
اور مساوات قریب البیضوی کی یہہ ی ی َ – ۲ م (لا + لا َ) = ۰ اگر لکھین
ہم بجای ص ص َ کے –ص ٗ تو اکثر خاصہ بیضوی کی جو کہ باب ہشتم مین دریافت کی گئی ہین
خواص بعید البیضوی کے ہوجاویگی اور یہی خواص قریب البیضوی ہوجاویگی تبدیل نقطہ شروع
راس بیضوی پر اور لکھین م/(۱–ی) کو بجای ط اور م ٗ (۱+ی)/(۱–ی) کو بجای ص ٗ کے اور
فرض کرین کہ ی = ۱ مثلاً مساوات مماس بیضوی کے انجام وتر اتشی اعظم
پر جبکہ نقطہ شروع راس بیضوی کا فرض کیا جاوے یہہ ہوتی ہی
ی = ط + ی (لا – ط) (۱۱۷) یا ی = ط (۱ – ی) + ی لا لکھو بجای
ط کے م/(۱–ی) اور فرض کرو کہ ی = ۱ ∴ ی = م + لا اور یہی فقرہ
(۲۳۵) مین بہی ثابت ہوا ہی ــــ ثر ثر ثر
(۲۸۱) اگر س ف = نق اور ا س ف = ر تو مساوات قطبی آسانی سے
حاصل ہوسکتی ہی کیونکہ س ف = ی × ف ر = ی (ط س + س م)
یا نق = ی (م (۱+ی)/ی – نق جم ر) ∴ نق = م (۱ + ی)/(۱ + ی جم ر) اور جو کہ
بیضوی اور بعید البیضوی مین م (۱ + ی) = ص ٗ/ط اور یہہ صورت قریب
البیضوی مین = ۲ م ہوتا ہی تو اب حاصل ہوگی (جبکہ لکھین ہم ل واسطے
وتر اتشی اعظم کے) مساوات عام قطبی واسطے تینون خط منحنی کے
نق = ل/۲ · ۱/(۱ + ی جم ر) – (۱۵۰) – ثر
(۲۸۲) کہیچو ایک مماس نقطہ ف سے جو کہ بیضوی پر واقع ہی واسطے ثبوت

اس مطلب کے کھینچو وتر م ف اور کھینچو اسکو یہان تک کہ وہ ملی نقطہ ق پر
اوس دایرہ سی جوکہ گرد بیضوی کے کھینچا جاوے اور نقطہ ق سی کھینچو ایک مماس
دایرہ کا جوکہ قطع کرتا ہی محور کلان کو نقطہ ط پر اور ملاؤ خط ف ط کا تو اب
ظاہر ہی کہ یہہ خط مماس مطلوب ہی موافق (۱۱۴) کے اور اگر اوس شکل
مین جوکہ فقرہ (۱۲۱) کے حاشیہ مین لکھی گئی ہی ملاوین س ف اور ہ ف
کو اور کھینچین ہ ف کو نقطہ ک تک اور قطع کرین ف ک = ف ہ اور بعد اسکے
ملاوین خط س ک کو تو اب ظاہر ہی کہ خط ف ی جو تنصیف کرتا ہی خط س ک
کو مماس مطلوب ہی۔

(۲۸۳) کھینچو مماس بیضوی کا ایک نقطہ ط سی جو کہ باہر اوسکی واقع ہی

(۱) (۲)

واسطی ثبوت اس دعوی کے کھینچو خط ط ف، ص ف جو گذرتا ہوا مرکز مین سی شکل
(۱) مین اور کھینچو قطر متجانس ص ف کا اور اب صورت سوال کی یہہ ہوگی
دریافت کرو ایک نقطہ و کا خط ص ف مین کہ وتر ق و ن گذرتا ہوا اوسمین
اسطرح پر کھینچا جاوے کہ خطوط ط ق اور ط ن مماس مطلوب ہون قطع کرو

خط ص د کو اسطرح پر کہ ص ط : ص ف :: ص ف : ص ر

تو نقطہ د کا نقطہ مطلوب ہی (۲۳۱) واسطی معلوم کرنے خط ص د کے ط کو مرکز

گردانکی کہیچو دو دایرہ ص ع ف ر اور کہیچو ایک ط ع ر جو قطع کرتا ہی دو نو دایرونکو

نقاط ع اور ر مین اور ملاؤ خط ف ع اور کہیچو خط ر د متوازی ع ف کے

تو اب بوسیلہ متشابہ ہونے مثلثون کے ثابت ہو سکتا ہی

کہ ص د نسبت مین ثالث ہی خطوط ص ط اور ص ف سی اسیو اسطی

نقطہ د نقطہ مطلوب ہے

(۲۸۴) فرض کرو کہ بیضوی معلوم نہین ہی اور محور اوسکے معلوم ہین تو اس

صورت مین مان لو کہ نقاط س اور ہ شکل (۲) مین دو نقطہ ماسکی

ہین اب نقطہ س کو مرکز گردانکے کہیچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر ار

ہو اور ط کو مرکز اور ط ہ نصف قطر گردانکر کہیچو ایک دوسرا دایرہ

جو کہ قطع کری دایرہ اول کو نقاط ک اور کہ پر خطوط س ک اور س کہ

اور ہ ک اور ہ کہ کو اور نقطہ ط سی کہیچو دو عمود ط ق اور ط ق خطوط

ہ ک اور ہ کہ پر تو یہہ خطوط ملینگی خطوط س ک اور س کہ سی نقاط ق اور

ق پر اور یہی نقطی مطلوب ہین واسطی ثبوت اس دعوی کی ملاؤ خطوط ہ ق

اور ہ ق کو بعد اسکی ثابت کرنے مین اس دعوی کے حاشیہ (۷۷) کی مدد لینی

چاہئی یعنے طریقہ اسکا حاشیہ (۷۷) کی طور پر ہے

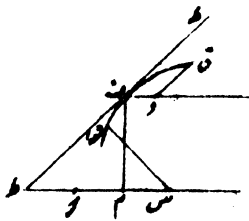
(۲۸۵) کہیچو مماس بعید البعضوی نقطہ معلوم ق سے جو کہ اوسپر واقع ہی

اسیواسطی ملاؤ خطوط س ف اور ہ ف اوس شکل مین جو کہ اوس حاشیہ
مین جو صفحہ (۹۷) مین ہی کہیچی ہوئی ہی اور ہ ف مین سی قطع کرو ف کہ =
= س ف اور ملاؤ خط س کہ تو خط ف ی جو تنصیف کرتا ہی خط س کہ کو
مماس مطلوب ہوگا

(۲۸۶) کہیچو مماس بعید البیضوی ایک نقطہ ط سی جو کہ باہر اوس سی ہی
دو طریقہ جو کہ فقرہ (۲۶۳) مین واسطے بیضوی کی لکہی گئی ہین اس خط
منحنی مین عمل مین لانی چاہئی مگر کچہہ تبدیلی شکل مین واقع ہوگی
(۲۸۷) کہیچو مماس قریب البیضوی کا ایک نقطہ معلوم ف سی جو کہ اوس پر
واقع ہی — واسطی ثبوت اس دعوی کی کہیچو دتر ف م کا اس شکل مین جو کہ
نقرہ (۲۳۲) مین کہیچی ہوئی ہی اور کہیچو محور اک کو اور کاٹو اوسمین سے
ا ط = ا م اور ملاؤ ف ط تو یہہ خط مماس مطلوب ہوگا موافق (۲۳۳) کے
یا قطع کرو س ط = س ف اور ملاؤ ف ط کو تو خط ف ط مماس مطلوب ہوگا
(۲۸۸) کہیچو مماس قریب البیضوی کا ایک نقطہ ط سی جو کہ اوسپر واقع نہین ہے
واسطی ثبوت اس مطلب کے کہیچو قطر ط ف د متوازی محور کے جو کہ قطع کرتا ہی
خط منحنی کو نقطہ ف پر اور کاٹو ف و = ف ط اور کہیچو دتر ق و ق واسطے
دتر العرض ف و کی تو اب ظاہر ہی کہ موافق (۲۴۹) کے خط ط ق اور
اور ط ق مماس مطلوب ہوگی — اگر یہہ خط معلوم نہو اور اسکا خط بنیادی
اور نقطہ آتشی معلوم ہوئی تو اس صورت مین نقطہ ط کو مرکز کر دائرہ کہیچو ایک

دایرہ جسکا نصف قطر ط س ہو اتقاطع کرتا ہو خط بنیادی کو نقطہ ر اور ر پر ملاؤ خطوط ر س اور ر س کو اور کہینچو خطوط ر ق اور ر ق متوازی محور کے تو اب خطوط ط ق اور ط ق جو کہ عمود خطوط ر س اور ر س پر ہین مماس مطلوب ہونگی موافق (۲۳۹) کے

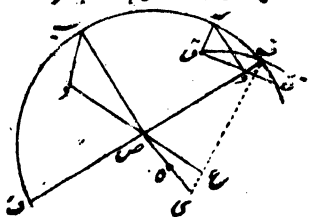
(۲۸۹) اگر ایک قوس ق ف ق تراش مخروطی کی ایک سطح پر کہینچی ہوئی ہو تو دریافت کرو کہ وہ کس خط منحنی سے تعلق رکہتی ہی اور معلوم کرو محور اور نقطہ آتشی اس تراش کے کہینچو خط ل گذرتا ہوا درمیان دو متوازی وترون کے اور اسیطرح سی کہینچو ایک اور خط ل گذرتا ہوا بیچ مین دو اور متوازی وترونکے تو اب اگر خطوط ل اور ل متوازی آپس مین ہون تو قوس مذکور قریب البیضوی سی تعلق رکہی گی اور اگر وہ مجوف طرف اس خط منحنی کے ملین تو یہہ قوس بیضوی سی تعلق رکہی گی اور اگر وہ محدب طرف اس خط منحنی کی ملین تو یہہ قوس بعید البیضوی سی تعلق رکہی گی موافق (۱۳۰ اور ۲۴۳) کے

(۲۹۰) فرض کرو کہ خط منحنی بیضوی ہی اور ان نقشہ جہانکہ خطوط ل اور ل ملتی ہین مرکز ص ہی اور فرض کرو کہ ف ف ایک قطر ہی اور اسکا قطر متوافقہ بطور آیندہ کے معلوم ہو سکتا ہی

خط ف ق کو قطر گردانکے کہینچو دایرہ ف ب ق اور ملاؤ ر ق اور کہینچو ب د متوازی ر ق کے جو کہ ملتا ہی اوس خط سی جو کہ متوازی ف و کی ہی اور مرکز ص مین سی گذرتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط ص د قطر متجانس ہی موافق (۱۳۶) کی — واسطی دریافت کرنے طول اور مقام محورون کے کہینچو خط ف ع کا عمود ص و پر اور کہینچکی اسکو نقطہ ی تک قطع کرو ف ی = ص و اور ملاؤ ص ی اور تنصیف کرو ص ی کو نقطہ ہ پر اور ملاؤ ف ہ تو اب بوسیلہ مثلث ص ف ی کے ہمین حاصل ہوگی قیمت ضلع ص ی کے اجزای ص ف مین اور ص د = √{ط² + ص² − ۲ ط ص جس (ز − ر)}

= √(ط² + ص² − ۲ ط ص) = ط − ص ∴ ص ہ = (ط − ص)/۲ اور بوسیلہ اسی مثلث کے ہمین حاصل ہوگا ف ہ = (ط + ص)/۲ تو اب یہانسی معلوم ہوا کہ ف ہ + ہ ی نصف محور کلان ہی اور ف ہ − ہ ی نصف محور خورد ہے — خط ہ ف مین سے قطع کرو ہ کہ = ہ ی تو ص ک سمت محور کلان کی ہوگی —

ﮨ ﮨ ﮨ ﮨ ﮨ

(۲۹۱) اگر قوس ی ف ی قوس لعبد البیضوی کی ہو تو واضح ہو کہ اس صورت مین بہی قطر متجانس اوس ترکیب سے دریافت ہوگا جو ابہی صورت بیضوی مین لکہی ہے اور اب خطوط متنفر الملاقات بوسیلہ فقرہ (۲۱۵) کی آسانی کہینچ سکتی ہین اور سمت محورون کی تنصیف کرتی ہی اوس زاویہ کو جو کہ خطوط متنفر الملاقات آپسمین بناتی ہین اور طول انکا دریافت ہو سکتا ہی بوسیلہ کہینچنی مماس

ف ط اور عمود ف م کے محور پر اور بوسیلہ قطع کرنے ص ر کے اسطرح پر کہ وہ
وسط فی النسبت ہو درمیان ص م اور ص ط کے (۱۶۷)
(۲۹۲) اگر قوس مذکور قوس قریب البیضوی کی ہو تو کہیچو ط ف ط متوازی
ق و کے اور کہیچو خط ف س
بناتا ہوا زاویہ س ف ط = زاویہ
ط ف د کو یہی عمل کرو نقطہ ف
پر بہی تو اب جس نقطہ پر کہ خطوط
ف س اور ف س تقاطع کرینگے وہ نقطہ آتشی ہوگا (۲۴۰) واضح ہو کہ
محور متوازی خط ف د کے ہی اور اسی طرح خط منحنی کا بوسیلہ کہینچنے عمود کے
محور پر اور تنصیف کرنے خط ط م کے دریافت ہو سکتا ہی ہوا فق فقرہ (۲۲۳)
(۲۹۳) اب ہم ختم کرینگے بحث تراشہای مخروطی کو بعد لکہنے شکل آئندہ کے
جو کہ بہت مفید ہی - اگر ایک نقطہ میں سے جو کہ باہر یا اندر تراش مخروطی کے
فرض کیا جاوے دو خط بناتی ہوئی ایک زاویہ کہیچے جاوین یہان تک کہ وہ ملین
خط منحنی سے تو سطح ایک خط کی (جو کہ ضرب دینے دو حصی ایک خط کی سی حاصل ہوتی
ہی) سطح دوسرے خط سی نسبت مقررہ رکہتی ہی
(۱) فرض کرو کہ تراشہای مخروطی بیضوی اور بعید البیضوی میں

فرض کرو کہ ص د اور ص ی دو نصف قطر متوازی دو وترون ف د ف
اور ق د ق کے ہین اور ظاہر ہی کہ جسوقت وتر متوازی انکی کہینچی جاوینگے

تو ہمین حاصل ہوگی یہہ نسبت

(۱) (۲) (۳)

سطح ف د اور د ف َ : سطح ق د اور ق د َ :: مربع ص د : مربع ص ی

فرض کرو کہ د نقطہ شروع ترچہی محورون د لا اور د ز کا ہی تو اب مساوات

خط منحنی کی یہہ ہوگی ا ز^۲ + ب لا ز + س لا^۲ + د ز + ی لا + ف = ۰

فرض کرو کہ لا = ۰ ∴ ا ز^۲ + د ز + ف = ۰ اور چونکہ حاصل ضرب قیمتون

مساوات کا ہی ف/ا اسیواسطے سطح ق د اور د ق َ = ف/ا اسیطرحسی

ف د اور د ف َ = ف/س ∴ سطح ف د اور د ف َ : سطح ق د اور د ق َ ::

ف/ا : ف/س :: س : ا اور اب بدلو نقطہ شروع کو مرکز پر بغیر

بدلنی سمت محورون کے تو اب صورت مساوات کی یہہ ہوگی

ا ز^۲ + ب لا ز + س لا^۲ + ف = ۰ (۸۱) فرض کرو لا = ۰

∴ مربع ص ی = — ف/ا اور مربع ص د = — ف/س

∴ مربع ص ی : مربع ص د :: س : ا اسیواسطے

سطح ق د اور ق د َ : سطح ف د اور ف د َ :: مربع ص ی : مربع ص د

شکل بعید الیضوی مین جو کہ (۲) ہی خطوط ص ی اور ص د خط منحنی سی

نہین ملتی ہین لیکن واسطے معلوم کرنے اس بات کی کہ یہہ نصف قطر حرکت کی ہین حرکت دو محور ی کو یہانتک کہ وہ قطر متجانس ص ن د کا ہو جاوے تو ظاہر ہی کہ صورتین (۵۵) واسطے تبدیل محورون کے جبکہ ر = ۰ اس صورت کی ہو جاوینگے ی = ی جس ر / جس ک اور لا = لاَ + یَ جس (ک − ر) / جس ک

جبکہ لکھین ہم ان قیمتون لاَ اور یَ کو مساوات گذشتہ مین یعنی اوس مساوات مین جسکا مرکز نقطہ شروع ہی اور فرض کرین کہ بَ = ۰ واسطے تبدیل کرنی اس مساوات کی اوس مساوات سے جسکی محور اقطار متجانس ہون تو اب بعد اس تبدیلی کے صورت مساوات کی یہہ ہو جاوی گی

یَ۲ + س لاَ۲ + فَ = ۰ اسمین مقادیر سَ اور فَ کی نہین بدلی ہین اور − فَ / سَ مساوی اوس مربع کی جو کہ نصف قطر پر کہیچ سکتا ہی اور یہہ محور لا پر شمار کیا گیا ہی (۸۶) تو اب دعوی مرقومہ بالا صورت بعید البیضوی مین بہی ثابت ہوا —

(۲) اب فرض کرو کہ تراش مخروطی قریب البیضوی ہی اور شکل ہو سکی (۳) بطور مرقومہ بالا کے ہین اس صورت مین بہی نسبت آئندہ حاصل ہوگی سطح ف و اور د فَ : سطح ن و اور ن وَ :: س : ل اب فرض کرو کہ فَ اور قَ اوتار آتشی و ترون ف و قَ اور ن د قَ کی ہین جو نقطہ شروع کو نقطہ آتشی پر لیکن سمت محورون کی متوازی ف و اور ن و کے رکہتی چاہئی اس تبدیل سے مقادیر سَ اور تَ مین کسی طرح کی تبدیلی

ہنبین ہوگی اور چونکہ اس صورت مین اوتار نقطہ آتشی سی گذرتی ہین توسطح

سطح ف س اور س ف : سطح ق س اور ق س :: لہ ف : لہ ق (...)

اور چونکہ ف س اور س ف : سطح ق س اور ق س :: س : ا سواسطے

سطح ف و اور ف و : سطح ق و اور ق و :: س : ا :: ف : ق

(۲۹۴) اگر نقطہ و کا باہر خطوط منحنی کے ہو اور نقاط ف اور ف
ایک دوسری پر منطبق اور اسی طرح سی ق اور ق بر باہر خطوط مماس ہوجاوین
تو ہمین صورت بیضوی اور بعید البیضوی مین یہہ حاصل ہوگا

مربع و ف : مربع و ق :: مربع ص و : مربع ص ی یا

و ف : و ق :: ص و : ص ی — قریب البیضوی کی صورت مین یہہ
حاصل ہوگا مربع و ف : مربع و ق :: س ف : س ق یہان سے معلوم
ہوتا ہی کہ اگر ایک کثیر الاضلاع گرد ایک بیضوی کے کہینچا جاوے تو حاصل
ضرب جبریہ اسکی اجزای متبادلہ کا مساوی ایک دوسری کے ہوگا اور یہی صورت
استعمال مین آسکتی ہین جبکہ مماس کہینچے جاوین گرد ایک بعید البیضوی کے اور
جبکہ یہہ مماس ایک نقطہ خطوط متنفر الملاقات سی شروع ہون — تمز

باب دوازدہم ان خطوط منحنی کے بیان مین جنکی مساوات کئی درجہ کی ہو یعنی زیادہ دو درجہ سی ہو

(۲۹۵) چونکہ بحث ان خطوط کی جنکی مساوات دوسری درجہ کی تہی
تمام ہوچکی ہے اسواسطے اب ہم بیان ان خطوط کا کرین گے جنکی مساوات

زیادہ دو درجہ سے ہی چونکہ مساوات اسٹی درجہ تک ہوتی ہی تو اس سے معلوم ہوتا ہے
کہ بحث کرنی اونکی اس مختصر رسالہ مین ناممکن ہی علاوہ اسکی بیان کرنا اُنکا کچھہ ضرور
بھی نہین کیونکہ اونسی امورات دنیوی مین کسی نوع کا فایدہ نہین ہوتا ہی لیکن وہ صرف
ریاضی دان ہی کو خوب معلوم ہونگی اور جونکہ تراشہای مخروطی بہت فایدہ مند
امورات دنیوی مین معلوم ہوتی ہین اسیواسطی ہمنی بیان انکا بخوبی کیا ہی —
چونکہ تحقیقات تیسری درجہ کی خطوط کی پہلی اسحاق نیوٹن لی کی تھی اسیواسطی
وہ بہت مشہور ہوئی وہ خطوط جو تیسری درجہ کی مساوات سی تعلق رکھتی ہین
اسٹی قسم پر ہین اونمین سی بہتر صورتین اسحاق نیوٹن نے دریافت
کی تھین اور باقی آٹھہ صورتین بعد اُسکی دریافت ہوئی ہین جو طالب علم کہ
کہ انکا مطالعہ کیا چاہے وہ انکو اسحاق نیوٹن یا سٹیرلنگ کی کتاب مین
دیکھہ سکتا ہی جوتھی درجہ کی خطوط پانچ ہزار سی زیادہ ہین اور تعداد زیادہ
درجہ کی خطوط کی اسقدر ہی کہ اونکا بیان کرنا اس رسالہ مختصر مین ناممکن
ہی جونکہ بیان کرنا تمام خطوط منحنی کا بہت مشکل ہی اسیواسطی ہم اس کتاب مین
صرف اون خطوط کو لکھین گے جو کہ بہت فایدہ مند ہین اور جنکا جاننا ضروری
یعنی اون خطوط کو اس کتاب مین بیان کرینگے جو غیر منقطع ہین یعنے جنکی مساوات
مین دو مقدار غیر مقررہ پائی جاتی ہین اور بعد اسکی لوگس ان مساواتونکا
دریافت کرینگی اور اسکی بعض ضروری خواص کو بھی لکھینگے واضح ہو کہ کوئی
خاص ترتیب واسطے معلوم کرنے ان سوالون کے فایدہ مند نہین ہوگی اور

قواعد جو کہ واسطی دریافت کرنے سوالات منقطع کے بیان کی گئی ہیں یہاں بہی مفید ہونگی اور حل کرنا سوالات منقطع اور غیر منقطع کا صرف تجربہ پر موقوف ہی۔ واضح ہو کہ واسطی دریافت کرنے سوالات غیر منقطع کے ہم ایک ہی قاعدہ نہین لکھین گی بلکہ مختلف طور بیان کرینگی تا کہ طالبعلم کو مختلف طریقی واسطی نکالنے سوالات کی معلوم ہو جاوین اب ہم بیان کرینگے ایسی شکلون کو جنکا لوکس درجہ دویم سی تعلق رکہیگا ——

(۲۹۶) معلوم ہی خط اب (= ط) دریافت کرو نقطہ جو کہ اس خط پر واقع نہین ہی جبکہ رف : ب ف :: م : ۱

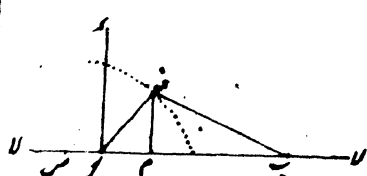
فرض کرو کہ ر نقطہ شروع ہی محورون متقاطع علی العوایم کا اور مان لو کہ

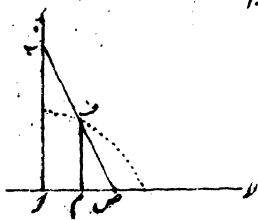
رم = لا اور م ف = ی ∴ م ب = ط − لا اسیواسطی

رف : ب ف :: م : ۱ یا √(لا² + ی²) : √((ط − لا)² + ی²) :: م : ۱

∴ لا² + ی² = م² (ط − لا)² + م² ی² یا (۱ − م²) ی² + (۱ − م²) لا² + ۲ م² ط لا

− م² ط² = ۰ یا ی² + (لا + م² ط / (۱ − م²))² = م² ط² / (۱ − م²)²

اس مساوات کے وسیلہ سی لا نہایت ایسی نقاط معلوم ہو سکتی ہین جنکے وسیلہ سے شرط اس مساوات کی پوری ہو جاویگی اور تمام یہہ نقطی محیط ایک دایرہ پر واقع ہونگی موافق (۶۶) کے

واسطے کہینچے اس دایرہ کی قطع کرو اَرلاَ مین سے اص = $\frac{م^2 ط}{1 - م^2}$
نقطہ ص کو مرکز گرداننکی کہیچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر اَص ہو یہی لوکس
مطلوب ہوگی اگر م = ۱ تو بوسیلہ مساوات اجیکے یہہ حاصل ہوگا
لا = $\frac{ط}{2}$ اور یہہ مساوات اوس خط کی ہوگی جو کہ نقطہ تنصیف اَب سی متوازی
اَرکے کہیچا جاوے ۔ ختم (۲۹۷) دریافت کرو لوکس ف کا جبکہ
کہیچے جاوین عمود نقطہ ف سی دو ایسی خطوط پر جنکا مقام معلوم ہے اور فاصلہ
درمیان اول دو مقام کے جہانکہ دو عمود واقع ہوتی ہین مساوی مقدار معلوم
کی ۔ فرض کرو کہ نقطہ تقاطع خطوط معلوم کا نقطہ شروع محوروں متقاطع
علی القوایم کا ہی اور مان لو کہ ایک ان خطوط مین سے محور لا ہی اور فرض کرو کہ
ی = ط لا مساوات دوسری خط کی ہی تو اب مساوات اوس خط کی جو کہ نقطہ ف
(لاَ اور یَ) سی گذرکی عمود اس خط پر ی = ط لا یہہ ہوگی
ی - یَ = - $\frac{1}{ط}$ (لا - لاَ) بوسیلہ ان دو مساواتون کے اوتار اون
نقاط کی جہان عمود واقع ہوتی ہین دریافت ہوسکتے ہین اور اب مساوات اخیر
بوسیلہ فقرہ (۲۹) کے یہہ حاصل ہوگی یَ² + لاَ² = اَ² $\frac{(1 + ط^2)}{ط^2}$ یہہ مساوات
اوس دایرہ کی ہی جسکا مرکز نقطہ تقاطع ان خطوط کا ہی ۔ ثر ثر ثر
(۲۹۸) فرض کرو کہ ایک خط معلوم ب س حرکت کرتا ہی درمیان دو خطوط
اَب اور اَس کی اسطرح پر کہ انجام ب اور س اس خط کی ہمیشہ خطوط اَب
اور اَس پر حرکت کرتے ہین اب چاہتے ہین دریافت کرنا اوس خط منحنی کا

جو پیدا ہوگا حرکت کرنے نقطہ معلوم ف کی سے جو ب س پر واقع ہے:
فرض کرو کہ خطوط ا ب اور ا س محور لا اور د ہیں اور ا م = لا اور
م ف = د اور ب ف = ط اور ف س = ص اور مان لو کہ زاویہ
ب ا س کا قایمہ ہے تو اب ا م : ب ف : : م س : ف س یا
لا : ط : : $\sqrt{ص^2 - د^2}$: ص ∴ ص² لا² = ط² ص² − ط² د²
یا ط² د² + ص² لا² = ط² ص² اور یہہ مساوات
ایسی بیضوی کی ہے جسکا مرکز نقطہ
ا ہے اور محور ۲ ط اور ۲ ص ہیں
اگر ایک زینہ ایسی دیوار کی
سہارے رکہا جاوے جو عمود زمین پر ہے اب شکل گذشتہ سے ظاہر ہے کہ
اگر زینہ نیچے کو زمین پر اسطرح حرکت دیں کہ اوپر کا سرا دیوار ہی پر رہے تو
ہر ایک پایہ اوسکا سوای بیچ کی پایہ کے ربع بیضوی کا بناویگا اور بیچ کا
پایہ ربع دایرہ بناویگا — اگر محور ترچھے فرض کئے جاویں اور درمیان
اونکی ایک زاویہ ز کا ہو تو ا ب = $\frac{ط + ص}{ص}$ د اور ا ص = $\frac{ط + ص}{ط}$ لا
اسواسطے ط² د² + ص² لا² − ۲ ط ص جم ز لا د − ط² ص² = ۰ اور یہہ
مساوات بیضوی کی ہے موافق (۷۶) کے ظاہر ہے کہ بوسیلہ اس شکل کے ایک
خاص ترکیب واسطے کہینچنے بیضوی کے معلوم ہوتی ہے — اگر ایک خط ب س
جسکا طول غیر منقطع ہے یعنے کم زیادہ ہوتا ہے خطوط ا ب اور ا س پید

اسطرح حرکت کری کہ مثلث ا ب س ہمیشہ ایک سا رہے یعنی مساوی ایک مقدار مقررہ کی ہو بوسیلہ حرکت نقطہ ف کے (جو کہ خط ب ف کو ایک خاص نسبت پر تقسیم کرتا ہی) بعید البیضوی پیدا ہوگا —

(۲۶۹) معلوم ہی ہمین خط ا ب (= س) دریافت کرو نقطہ ف کا (جو کہ اس خط پر واقع نہین ہے) اسطرح پر کہ اگر کھینچے جاوین خطوط ف ا اور ف ب تو زاویہ ف ب ا دوگنا ہو زاویہ ف ا ب سی فرض کرو کہ ا نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم ا لا اور ا ی کا ہی اور مساوات ا ف کی یہہ ہی ی = ط لا (۱) اور مساوات خط ب ف کی یہہ ہی ی = طَ (لا – س)

لیکن طَ = مس ف ب لا = – مس ف ب ا = – مس ۲ ف ا ب =

$$= - \frac{۲ ط}{۱ - ط^۲} \quad \therefore \; ی = - \frac{۲ ط}{۱ - ط^۲} \,(لا - س) \cdots (۲)$$

جبکہ دور کرینگے ہم مقدار ط کو بوسیلہ مساواتون (۱) اور (۲) کے تو ہمین حاصل ہوگی یہہ مساوات

$$ی^۲ = ۳ لا^۲ - ۲ س لا$$

یہان سی ثابت ہوا کہ لوکس ف کا بعید البیضوی ہی

جبکہ مطابق کرینگے ہم اس مساوات کو مساوات بعید البیضوی سی جو کہ یہہ ہی $ی^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲}(لا^۲ - ۲ ط لا)$ تو معلوم ہوگا کہ محور اسکے $\frac{۲ س}{۳}$ اور $\frac{۲ س}{\sqrt{۳}}$ ہین اور مرکز اس خط منحنی کا ص ہی جہانکہ ا ص = $\frac{س}{۳}$

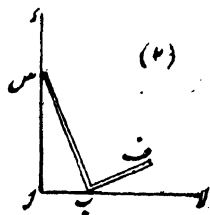
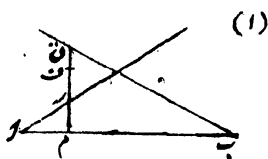
واضح ہوا کہ بوسیلہ اس بعید البیضوی کے ایک قوس دایرہ کو تین مساوی حصون مین
تقسیم کر سکتے ہین مثلاً فرض کرو کہ $\overline{\text{اف ب}}$ ایک قوس دایرہ کی ہی جسکی تین
حصہ مساوی کرنے منظور ہین واسطی ثبوت اس مطلب کے کھینچو ایک ایسا
بعید البیضوی $\overline{\text{د ف}}$ جسکا ابہی بیان ہوا ہی تو اب ہم کہتی ہین کہ قوس $\overline{\text{ب ف}}$
کی تہائی قوس $\overline{\text{اب}}$ کی ہی کیونکہ اگر فرض کرین ہم د مرکز قوس مذکور کا تو
او ف = ۲ او ب ف = ۴ ف او ب = ۲ ف و ب یعنی قوس $\overline{\text{ب ف}}$ تہائی
$\overline{\text{ب ف ا}}$ کے ہی

شکل مرقومۂ بالا بطور آیندہ کے بہی ثابت ہو سکتی ہی ـ فرض کرو کہ ا م = لا
اور م ف = ی اور زاویہ ف ا ب = ر اسلیے واسطی مس ر = $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$

اور مس ۲ ر = $\frac{\text{ی}}{\text{س} - \text{لا}}$ لیکن مس ۲ ر = $\frac{\text{۲ مس ر}}{\text{۱} - \text{مس}^{\text{۲}}\text{ ر}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ی}}{\text{س} - \text{لا}} = \frac{\frac{\text{۲ی}}{\text{لا}}}{\text{۱} - \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}$ یا ی$^{\text{۲}}$ = ۳ لا$^{\text{۲}}$ − ۲ س لا واضح ہو کہ بعید
غور کے دونو طریقے مرقومۂ بالا ایک ہی معلوم ہو گئی ـ

(۳۰۰) سوالات آیندہ مساوات درجۂ دویم سے تعلق رکہتے ہین یعنی اون مساوات کی
لوکس کی مساوات درجہ دویم کی ہی ـ (۱) معلوم کرو لوکس نقطہ ف کا
جبکہ نقاط آ اور ب سے (جو معلوم ہین شکل (۱) مین) دو خطوط ایسے
کھینچی جاوین جنکا مقام معلوم ہو اور $\overline{\text{م ق}}$ وتر مشترک ان دونو خطوط کا
ہو اور خط $\overline{\text{م ف}}$ $\overline{\text{م ق}}$ مین سے اسطرح کاٹا جاہی کہ وہ وسط فی النسبت
خطوط $\overline{\text{م ق}}$ اور $\overline{\text{م ر}}$ کا ہو ٭

(۱) (۲)

(۲) س ب ف شکل (۲) مین ایک آلہ ٹیڑہی کا اور یہہ سطح پہ بنایا گیا ہی کہ لکڑی ب س لکڑی ب ف پر عمود ہی دریافت کرو لوکس ف کا جبکہ یہہ آلہ حرکت کرتا ہی زاویہ قایمہ ی ر لا مین اسطور سے کہ نقطہ س ہمیشہ خط ر ی پر حرکت کری اور نقطہ ب خط ر لا پر

(۳) اگر قاعدہ ایک مثلث اور حاصل تفریق دو زاویون کا جو کہ قاعدہ پر بنتی ہین معلوم ہون تو ثابت کرو کہ لوکس راس مثلث کا بعد البعنوی مساوی القطرین ہوگا — (۴) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ ف کا جس سے اگر دو عمود دو خطون مفروض پر کہینچے جاوین تو وہ شکل چار ضلع کی جو کہ ان عمودون سے بنی گی مساوی ایک مربع مفروض کے ہوگی — شر شر

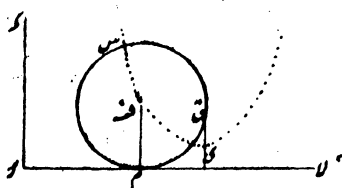
(۳۰۱) فرض کرو کہ ر ن ر ق ایک بعنوی ہی اور ر ر محور کلان اور ق ن ایک وتر اوسکا ہی اور اب ملاؤ خطوط ر ن اور ر ق کو جو تقاطع کرتے ہین نقطہ ف پر اب چاہتی ہین دریافت کرنا لوکس نقطہ ف کا

فرض کرو کہ ص نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی اور ص م = لا عمود م ف = ی اور ص ن = لا اور ن ق = ی تو اب ظاہر ہی کہ

مساوات خط اق کی یہہ ہوگی ی = ص لا + د صورت اس مساوات کی نقطہ
ق پر یہہ ہوجاویگی
۰ = - ص ط + د
∴ ی = ص (لا + ط)
نقطہ ق پر صورت
اسکی یہہ ہوجاویگی

ی' = ص (لا' + ط) ∴ ص = ی' / (لا' + ط) یہاں سے ثابت ہوا کہ مساوات
اق کی یہہ ہی ی = ی' / (لا' + ط) (لا + ط) ۰۰۰۰ (۱) اسیطرحسے مساوات
ا'ق' کی یہہ ہوگی ی = - ی' / (لا' - ط) (لا - ط) ۰۰ (۲) اور مساوات بیضوی کی
نقطہ ق پر یہہ ہوگی ط² ی'² + ص² لا'² = ط² ص² ۰۰۰۰ (۳) بوسیلہ مساوات (۱)
اور (۲) کی ہمین حاصل ہوگا لا' = ط² / لا اور ی' = ط ی / لا جبکہ لکھین سے
ہم ان قیمتون لا' اور ی' کو مساوات (۳) مین تو حاصل ہوگا یہہ
ط² ط² ی² / لا² + ص² ط⁴ / لا² = ط² ص² یا ط² ی² - ص² لا² = - ط² ص² اور یہہ مساوات
اوس بعید البیضوی کی ہی جسکا مرکز نقطہ ص اور محور کلان ۲ط ہی طریقہ دور
کرنی مساوی لا' اور ی' جو کہ یہان استعمال مین لایا گیا بہت فایدہ مند معلوم ہوتا ہی
اور بیان اسکا بہہ تفصیل ہوسکتا ہی ظاہر ہی کہ اس صورت مین ہمنے پہلی مساوات
اق اور ا'ق' کی (قیمت لا کی) اور بعد اوسکی فرض کیا کہ قیمت لا اور ی کی یے دونو مساواتون
مین ایک ہی ہی تواب ظاہر ہی کہ یہہ قیمتین لا اور ی دونو مساواتونمین مساوی نقطہ

تقاطع ف کی مساوی ایک دوسری کے نہین ہو سکتی ہین اور یہہ قیمتین لا اور ی کی
تعبیر کرینگے خطوط ص م اور م ف کو اور دور کرنے سے مقادیر لا اور ی سی معلوم
ہوتا ہی کہ لا اور ی ہمیشہ اوتار نقطہ تقاطع خطوط ر ی اور ر ی کی ہونگی اور
مساوات اخیر جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہوگی وہ لوکس نقطہ تقاطع ف کی ہوگی

(۴۰۳) دریافت کرو لوکس تمام اون دایرون کے مرکزونکا جو کہ مس کرتی ہین خط
ر لا کو اور گذرتی ہین نقطہ مفروضہ ق (ط اور ص) مین سی فرض کرو کہ
س ق م ایک اون دایرون مین
سی ہی جسکے محور متقاطع علی القوایم
ر لا اور ر ی ہین اور لا اور ی
اوتار مرکز ف کے ہین اور لا اور ی اوتار ایک ایسی نقطہ کی ہین جو کہ محیط دایرہ
پر واقع ہی اور اب مساوات دایرہ س ق م کی یہہ ہوگی $(ی - ی)^2 + (لا - لا)^2 =$
$= ن ق^2$ (۶۵) لیکن جبکہ یہہ دایرہ نقطہ ق مین سی گذریگا تو صورت مساوات
گذشتہ کی یہہ ہو جاوی گی $(ص - ی)^2 + (ط - لا)^2 = ن ق^2$ اور چونکہ خط ر لا
مماس دایرہ کا ہی اسواسطے $ن ق = ی$ ∴ $(ص - ی)^2 + (ط - لا)^2 = ی^2$
یا $لا^2 - ۲ط لا - ۲ص ی + ط^2 + ص^2 = ۰$ ظاہر ہی کہ یہہ مساوات قریب السطوحی
کی ہی موافق (۷۱) کی اور ظاہر ہی کہ صورت مساوات گذشتہ کی یہہ بھی ہو سکتی ہی
$(لا - ط)^2 = ۲ص\left(ی - \frac{ص}{۲}\right)$ اب اگر بدلین ہم نقطہ شروع نقطہ کی
جسکے اوتار ط اور $\frac{ص}{۲}$ ہین تو ہمین حاصل ہوگا یہہ $لا^2 = ۲ص ی$ ہو

مساوات خط ب س کی یہہ ہی ی = ط َ لا + ص َ تو ف ع = $\frac{ی - ط' لا - ص'}{\sqrt{۱ + ط'^{۲}}}$ ہی

اور ... د س ... ی = ط ً لا + ص ً تو ف ک = $\frac{ی - ط'' لا - ص''}{\sqrt{۱ + ط''^{۲}}}$ ہی

اور ... ا د ..... ی = ط ٗ لا + ص ٗ تو ف ہ = $\frac{ی - ط''' لا - ص'''}{\sqrt{۱ + ط'''^{۲}}}$ ہی

اسیواسطی موافق دعوی کے $\frac{ی - ط لا - ص}{\sqrt{۱ + ط^{۲}}} \times \frac{ی - ط' لا - ص'}{\sqrt{۱ + ط'^{۲}}}$ ہی ہی ہی = $\frac{ی - ط'' لا - ص''}{\sqrt{۱ + ط''^{۲}}} \times \frac{ی - ط''' لا - ص'''}{\sqrt{۱ + ط'''^{۲}}}$ ہی ہی ہی چونکہ یہہ مساوات دو مرتبہ کی ہے تو لوکس نقطہ ف کا تراش مخروطی ہوگی اور خاص صورتین اس مساوات کے تمام خطوط مفروضہ پر موقوف ہونگی یہہ شکل اسی بہی عام طور سے ثابت ہو سکتی ہی فرض کرو کہ ۳ یا ۴ یا ۵ یا زیادہ خطوط مفروض ایسی ہین جنکا مقام معلوم ہی اب مطلوب ہے ایک ایسا نقطہ جسی اگر کہینچی جاوین خطوط بناتی ہوئی زاویہ مفروضہ خطوط مفروض تک تو سطح دو خطونکا ان خطوط مین سی ایک نسبت مقررہ رکہتا ہی مربع تیسرے ضلع سی جبکہ خطوط مفروض تین ہون یا سطح باقی دو خطون سی جبکہ چار خطوط مفروض ہون اور اگر پانچ خطوط مفروض ہون تو مجسم تین خطونکا نسبت معلوم رکہتا ہی باقی دو خطون کے مجسم سے معہ ایک تیسری خط مفروض کے یا باقی تین خطوط کی مجسم سے جبکہ خطوط مفروض چہہ ہون اور اگر سات خطوط مفروض ہون تو حاصل ضرب جبریہ چار خطونکا ایک نسبت معلوم رکہتا ہی باقی تین خطون اور ایک اور خط معلوم کی حاصل ضرب سے یا باقی چار خطون کے حاصل ضرب سی جبکہ آتہہ خطوط مفروض ہون اور وغیرہ نسبت معلوم

رکھتا ہی وغیرہ سی اس شکل کے ثابت کرنیمین مہندسان متقدمین بہت دق ہوئی ہین
اور باوجود سعی بلیغ کی کوئی اوسکو ثابت نہ کرسکا اور عینیس بیان کرتا ہی کہ یہہ
شکل اقلیدس اور اپولونیس سے حل نہوئی اور اس شخص نے اس شکل کو جسکہ خطوط
مفروض تین یا چار ہوں ثابت کیا اور اس صورتین اوسنے اس شکل کو حل کرکی معلوم
کیا کہ لوکس ق کا تراش مخروطی ہی اور وہ اس سے زیادہ خطوںکی صورت کو حل نکرسکا
اور جبکہ تعداد خطوط کی سات یا آٹھہ فرض کی گئی تو متقدمین اس شکل کو اس خاص
صورتمین بیان بھی نکرسکی کیونکہ وہ سوای مجسم اور کسی صورت سی واقف نہ تھی اور
ظاہر ہی کہ سمجھنا اس شکل کا بغیر استعانت جبر مقابلہ کے ناممکن ہے کیونکہ حاصلضرب
چار خطوط کا سوائے جبر مقابلہ کی بیان نہین ہوسکتا اس شکل کو ڈیس کارٹیز صاحب
نی ثابت کیا اور اس شخص کو اس شکل کے ثابت کرنے سی طریقہ ثابت کرنے اشکال
ہندسی کا بوسیلہ جبر مقابلہ کے دریافت ہوا اس شکل کو ڈیس کارٹیز صاحب نے
بطور آیندہ حل کیا فرض کرو کہ ا ب اور ج د اور ی ع اور ک ہ شکل (۲) مین
خطوط مفروض ہین اور س نقطہ مطلوب جس سے تمام خطوط س ب اور س د
س ع اور س ہ بناتی ہوئی زاویہ مفروض س ب ا اور س د ج اور س ع ی
اور س ہ ک کھینچے گئے ہین اور ا ب (= ل) اور ب س (= ی) ایسی خط ہین
جنکے وسیلہ سی قیمت باقی اور خطوں کے دریافت کی جاویگی اور فرض کرو کہ خطوط مفروض
خط س ب سی نقاط ر اور ص اور ط مین ملتے ہین اور یہی خطوط ا ب سے نقاط
ا اور ی اور ک مین ملتی ہین فرض کرو کہ ا ی = س اور ا ک = د اور چونکہ

تمام زاوئی مثلث اب ر کے معلوم ہین تو ب ر = ط × اب = ط لا

∴ س ر = ط لا + ی اور س د = ھ (ط لا + ی) اور چونکہ ب ص = ط ب ی

= ط (س + لا) س ص = ی + ط (س + ۱۱) اور س ع =

ھ (ی + ط (س + لا)) اور چونکہ ب ط = ط ب ک = ط (د - لا)

∴ س ط = ی + ط (د - لا) اور س ہ = ھ {ی + ط (د - لا)}

اور چونکہ سطح س ب اور س ع = سطح س د اور س ہ تو

ی ھ (ی + ط (س + لا)) = ھ (ط لا + ی) ھ {ی + ط (د - لا)} اس

مساوات کو ڈس کارٹیز صاحب نے بہ تفصیل حل کرکے بیان کیا ہے یہہ مساوات

تراش مخروطی سے تعلق رکھتی ہے اوسنے مثال آئندہ عددونین بہی لکہی ہے

فرض کرو کہ ی ا = ۳ اور اک = ۵ اور اب = ب ر اور ب ص = ½

ب س = ½ ب ی اور ک ب = ب ط اور س د = ۳/۲ س ر اور

س ع = ۲ ص س اور س ہ = ۲/۳ س ط اور زاویہ اب ر = ۶۰°

اور سطح س ب اور س ع = سطح س د اور س ہ کی اور موافق طریقہ گذشتہ کے

اسنے صورت مساوات کی یہہ معلوم کی ی² + لا ی + لا² - ۲ ی - ۵ لا = ۰

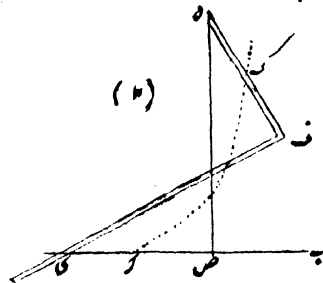
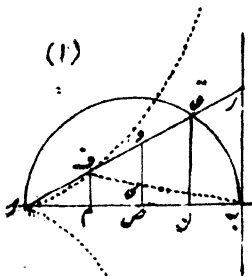
اس مساوات کو اوسنے ثابت کیا کہ دایرہ سے تعلق رکھتی ہے اور موافق فقرہ

(۲۷) کے اوتار مرکز کی یہہ معلوم ہوگئی ۳/۳ اور - ۱/۲ اور نصف قطر =

= $\frac{\sqrt{19}}{3}$ ∴ ∴ ∴ (۲۴) فرض کرو کہ ا ق ب

ایک نصف دایرہ ہے جسکا قطر اب ہے اور ب ر ایک خط غیر محدود عمود

خط اب ر ہی اور ا ق ر ایک ایسا خط مستقیم ہی جو کہ دایرہ سی نقطہ ق پر اور ب ر سی نقطہ ر پر ملتا ہی اور قطع کرو اف = ق ر اب دریافت کرو لوکس نقطہ ف کا — فرض کرو کہ ا نقطہ شروع محوروں متقاطع علی القوایم کا ہی اور اب محور لا ہی اور مان لو کہ اب = ۲ط اور ام = لا اور م ف = ی اور کھینچو ق ن متوازی م ف کے

(۱) (۲)

چونکہ اف = ق ر تو ا م = ب ن اور ا م : م ف :: ا ن : ن ق یعنی

$$لا : ی :: (۲ط - لا) : \sqrt{(۲ط - لا) لا} \quad (۶۵) \quad \therefore ی^۲ = \frac{لا^۳}{۲ط - لا}$$ اور

$$ی = \pm \sqrt{\frac{لا^۳}{۲ط - لا}}$$ جدول آیندہ سی واسطے ہر ایک خاص قیمت لا کے قیمت ی کی حاصل ہوگی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قیمتین لا کی	۰	ط	< ۲ط	۲ط	> ۲ط	—
قیمتین ی کی	۰	ط	ممکن	∞	ناممکن	ناممکن

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ شروع پر گذرتا ہی اور (۲) سی معلوم ہوتا ہے

کر وہ تنصیف نصف دایرہ ا ی ب کی کرتا ہی اور (۳) سے معلوم ہوتا ہی کہ قیمتین
نا ممکن ہوگی جبکہ قیمتین لا کی کم ۲ ط سی فرض کیجاوین اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی
کہ نقطہ ت پر ایک ایسا وتر ہی جسکا طول لا نہایت ہی یا ب ر خط متنفر الملاقات خط منحنی
کا ہی بوسیلہ تمام ان قیمتون کے ایک قوس غیر محدود حاصل ہوگی جو کہ نقطہ آ سی شروع
ہوکی ہمیشہ خط ب ر کی پاس آتی جاتی ہی اور (۵) سی دریافت ہوتا ہی کہ واسطی
تمام ان قیمتون لا کے جو کہ ۲ ط سے بڑی ہون تہ ناممکن یعنی خط منحنی داہنی
طرف خط متنفر الملاقات کی واقع نہین ہے اسیطرح (۶) سے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی
بائیں طرف آ ر کے بہی واقع نہین ہی اور چونکہ واسطے ہر ایک قیمت لا کی دو قیمتین ی
کی نکلتی ہین ایک مثبت اور دوسری منفی تو اس سے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نیچی
کی طرف آ ب کے بہی واقع ہی — واضح ہو کہ اس خط منحنی کو ڈایوکلیس صاحب نے
ایجاد کیا ہی اور یہہ اور نام اسکا اسنے سسائڈ رکہا اسسے اس شکل کی وسیلہ سے
دو وسط فی النسبت درمیان دو طرفون کی معلوم کئی بیشتر اس ریاضی دان کے
پپس صاحب نے اس شکل کی ایک خاص صورت نکالی تہی فرض کرو کہ ب ص اور
ص ی دو اطراف ہین اور ا ق ب ایک ایسا دایرہ ہی جسکا مرکز ص اور نصف قطر
ب ص ہی اور کہینچو ایک خط مستقیم غیر محدود ب ی ف گذرتا ہوا نقطہ ی مین سے اور
اب کہینچو خط ا ف و ق کا ملتا ہوا ب ی اور ص ی سی نقاط ف اور و مین اور
دایرہ سی نقطہ ق مین اسطرح سی کہ و ق = و ف تو اب ظاہر ہی کہ ص و یا
دو وسط فی النسبت مین سے ہوگا لیکن مقام نقطہ ق کا دریافت نہین ہوسکتا ہی

اسیواسطے ڈائی اوکلس نے اس خط منحنی کو واسطے دریافت کرنے ایک سلسلہ نقاط
کی ایجاد کیا جسکی وسیلہ سے اوسنے واسطے ہر ایک طول ص ی کے اس شکل کو ثابت
یعنی کچھ ہی مقدار ص ی کی فرض کرو کہ یہہ شکل تمام صورتون مین ثابت ہوگی
مثلاً فرض کرو کہ ب ص اور ص ی اور س ا ڈ کھینچا ہوا ہے اور کھینچو خط ب ی جو خط
منحنی سے نقطہ ق پر ملتا ہے اور چونکہ و ر = و ا اور ق ر = ا ف تو
د ق = د ف بوسیلہ حدود اس خط منحنی کے بہت سے نقطے اس خط منحنی کے حاصل
ہو سکتے ہین جنکے ملانے سے یہہ خط منحنی بنیگا اور چونکہ اسطور سے بنانا اس خط منحنی
کا حرکت پر موقوف ہے تو ظاہر ہے کہ بنانا اسکا موافق دلیل ہندسی کے صحیح نہین ہے
اسیواسطے نیوٹن صاحب نے ایک آسان آلہ واسطے اس خط منحنی کے بوسیلہ
حرکت متواتر کے ایجاد کیا — فرض کرو کہ ص ر ہ شکل (۲) مین ایک خط
مستقیم متوازی خط ب ر کی ہے قطع کرو ا ی = و ص اور فرض کرو کہ
ی ف ہ ایک برھئی کا آلہ ہے جسکی طرف ف ی غیر محدود ہے اور ف ہ = ر ب
اس آلہ کو اسطرح سے حرکت دو کہ بڑی طرف ی ف کی ہمیشہ نقطہ ی مین گذرتی
ہوئی رہے اور انجام ہ دوسری طرف ہ ف کی خط ص ہ پر سرکے تو اب لوکس
نقطہ ک کا جو کہ بیچ مین خط ف ہ کے واقع ہے سسائڈ ہوگا —

دریافت کرو مساوات قطبی اس خط منحنی کی فرض کرو کہ ی = نق جیب ر اور
لا = نق جم ر جبکہ لکھین ہم ان قیمتون لا اور ی کو اس مساوات مین
ی٢ = لا٣ / (ط٢ − لا) تو حاصل ہوگا یہہ نق٢ (جب ر)٢ = نق٣ (جم ر)٣ / (ط٢ − نق جم ر)

∴ ق ق = ۲ ط حس ر × مس ر ‏ (مثال) اگر ایک عمود راس ا سی بیضوی سی ایک مماس پر کھینچا جاوی تو لوکس اوسکی تقاطع کا مساوات ہوگا

(۳۰۵) اگر ا ق ب ایک دایرہ اور ص ایک نقطہ قطر ا ب پر ہو اور م ق ایک وتر ملاو ب ق کو اور کھینچو ص ف متوازی ب ق سکے جو کہ ملتا ہی منقدم ق سی نقطہ ف پر ا ب دریافت کرو لوکس نقطہ ف کا

فرض کرو ا م = لا اور م ف = ی

اور ا ب = ط ا ص = ص تو اب

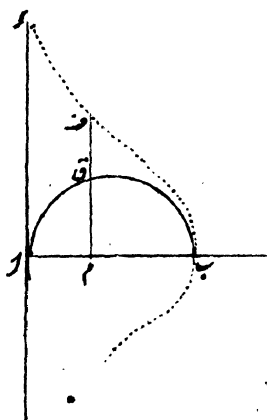
ظاہر ہی ب م : م ق :: ص م : م ف

یا (ط − لا) : √(ط لا − لا²) :: (ص − لا) : ی

∴ ی = ± (ص − لا) √(لا / (ط − لا)) جبکہ لکھینگے ہم اس مساوات مین وہ قیمتین جو کہ جدول آیندہ مین لکھی گئی ہین تو نتایج مرقومہ ذیل اس مساوات سی حاصل ہونگی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قیمتین لا کی	۰	ص	ط	< ط	> ط	−
قیمتین ی کی	۰	۰	± ∞	ممکن	ناممکن	ناممکن

(۱) اور (۲) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی ا اور ص مین سی گذرتا ہی اور (۳) سی ظاہر ہوتا ہی کہ وتر نقطہ ب پر خط متفق الملاقات خط منحنی کا ہی (۴) سی معلوم ہوتا ہی کہ دو قوسین خط منحنی کی درمیان ا اور ص کے واقع ہین اسیطرح سے

دو توسین درمیان ص اور ب کے اور (۵) اور (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ
خط منحنی داہنی طرف ب کی اور بائین طرف ا کے واقع نہین ہے —
اگر ص = ۰ تو بعضی اشکال جو کہ درمیان ا اور ص کے واقع ہی جاتی رہینگی
تو اب ظاہر ہی کہ یہہ خط منحنی سسٹا ادڈ ائی اوکلس کا ہوجاویگا — اگر ص منفی
ہو یا نقطہ ص بائین طرف ا کے ہو تو خط منحنی کی دو شاخین ہونگی اور یہہ نقطہ
ا سے شروع ہونگی پاس خط متنفر الملاقات کی آتا جاویگا جو نقطہ ب سے کھیچا گیا
ہی اگرچہ یہہ نقطہ ص کا خط منحنی پر نہین ہے لیکن تاہم اوس سے تعلق رکھتا ہی اس
نقطہ کو نقطہ مستی لس کہتے ہین ذکر اس نقطہ کا بجوبی حساب جزئیات مین ہوتا ہی
حسب طالبعلم کو کردیکھنا منظور ہے وہ حساب جزئیات کے کتابونمین دیکھی — مثال
دریافت کرو لوکس نقطہ ف کا جبکہ نقاط ا اور ق وتر م ف قریب البیضوی سی
اسطرح قطع کئی جاوین کہ وہ ہمیشہ مساوی فاصلہ پر نقطہ ف اور اس قریب البیضوی
سی واقع ہون — حل

(۳۰۶) دریافت کرو لوکس
نقطہ ف کا جبکہ خط م ق ایک
وتر نصف دایرہ ا ق ب کا
ہو اور م ق نقطہ ف تک
اسطرح سی کھیچا جاوے کہ
م ف : م ق : : ا ب : م ا

فرض کرو کہ ر ب لا اور ر ی محور متقاطع علی القوایم ہین اور فرض کرو کہ ر م = لا اور م ف = ی اور ر ب = ۲ط چونکہ م ف : م ق :: ر ب : ر م

∴ ی : √(۲ط لا − لا^۲) :: ۲ط : لا ∴ ی لا = ± ۲ط √(۲ط لا − لا^۲)

∴ ی = ± ۲ط √((۲ط − لا) / لا)

	۱	۲	۳	۴	۵
قیمتین لا کی	۰	۲ط	< ۲ط	> ۲ط	−
قیمتین ی کی	± ∞	۰	ممکن	ناممکن	ناممکن

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ وتر نقطہ شروع پر لانہایت ہے تو اب معلوم ہوا کہ وتر نقطہ شروع پر خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہے اور (۲) سے ظاہر ہوتا ہے کہ خط منحنی محور سے نقطہ ب پر ملتا ہے اور (۳) سے دریافت ہوتا ہے کہ خط منحنی درمیان ر اور ب کے پھیلتا ہے اور (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی پرے ب کے واقع نہین ہے اور (۵) سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی بائین طرف ر کے واقع نہین ہے نام اس خط منحنی کا وچ ہے اُسکو ایک عورت نے جسکا نام میریا اگنیسا اینسی ہے ایجاد کیا اور یہہ رہنے والی اٹلی کی تھی اور سنہ ۱۷۴۸ء بعد حضرت عیسی کے مدرسہ بولوگنا مین ریاضی سکھاتی تھی —

(۳۰۷) ظاہر ہے کہ دایرہ مین مربع وتر کا مساوی سطح دو حصون قطر کے ہوتا ہے تو اب دریافت کرو صورت اُس خط منحنی کی کہ مکعب اوسکی وتر کا مساوی

ایک ایسی مجسم کی ہو کہ قاعدہ اوسکا مربع ایک ٹکری قطر کا ہو اور بلندی اسکی دوسرا انکڑا یا ی۳ = لا۲ (۲ط - لا) فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محوروں متقاطع علی القوائم آی اور آلا کا ہی اور آب = ۲ط فرض کرو کہ لا = ۰ یا = ۲ط ∴ ی = ۰ یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی مطلوب نقاط آ اور ب مین سے گذرتا ہی اور جبکہ لا < ۲ط تو ی مثبت ہوگا اور جبکہ لا > ۲ط تو قیمت ی کی منفی ہوگی اور مقدار اسکی لانہایت ہوسکتی ہی کیونکہ کعب ایک مقدار منفی کا منفی اور ممکن ہوتا ہی اور جبکہ لا منفی فرض کیا جاوے تو ی مثبت ہوگا اور یہہ لانہایت زیادہ ہوتا جاویگا اور واسطی ہر ایک قیمت لا کے ایک قیمت صحیح ی کی حاصل ہوسکتی ہی اور باقی دو قیمتین اس مساوات کی ی۳ ± ۱ = ۰ ناممکن ہونگی - بوسیلہ پہیلائی یعنی کعب لینی مساوات گذشتہ کی ہمین حاصل ہوگا

ی = - لا ∛(۱ - ۲ط/لا) =

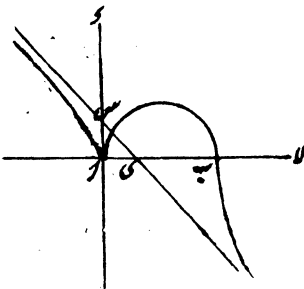
- لا {۱ - ۲/۳ ط/لا - ۴/۹ ط۲/لا۲ + وغیرہ}

اسیواسطے مساوات خط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی ی = - لا + ۲ط/۳ (۱۹۵)

قطع کرو آی مین سے آس = ۲ط/۳

اور آلا مین سے آی = ۲ط/۳ اور ملاؤ س ی کو تو جبکہ خط س ی کھیچا جاوے دونو طرف س اور ی کی تو وہ خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہوگا -

مثال دریافت کرو کس امن مساوات کا ی۳ + لا۳ = ط۳ اور اس مساوات کا

(۳۰۸) دریافت کرو لوکس اس مساوات کا ی۲ = ط۲ لا − لا۳ ۔

ط ی۲ = لا۳ + م لا۲ + ن لا + ف صورت (۱) فرض کرو کہ قیمتین اس مساوات کی صحیح اور نامساوی ہین اور تعبیر کرو انکو ط اور ص اور س سے اس طرح پر کہ ط بڑا ہو ص سے اور ص بڑا ہو س سے تو اب ظاہر ہے کہ صورت مساوات کی یہہ ہوگی ی = ± √((لا − ط)/ط (لا − ص) (لا − س))

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
قیمتین لا کی	۰	ط	< ط	> ط < س	ص	> ص < س		> س	∞	−
قیمتین ی کی	ناممکن	۰	ناممکن	ممکن	۰	ناممکن	۰	ممکن	± ∞	ناممکن

فرض کرو کہ ا نقطہ شروع
محوروں متقاطع علی القوائم
ا لا اور ا ی کا ہے اور
فرض کرو اب = ط
اور اس = ص اور

اد = س (۲) اور (۵) اور (۷) سے معلوم ہوتا ہے خط منحنی نقاط ب اور س اور د مین سے گذرتا ہے اور (۳) اور (۶) سے ظاہر ہوتا ہے کہ خط منحنی درمیان نقاط ا اور ب اور س اور د کے واقع نہین ہے اور (۲) سے دریافت ہوتا ہے کہ درمیان ب اور س کے دو شاخین خط منحنی کے واقع ہین اور

(۸) اور (۹) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ د سی لانہایت پہیلتا ہی اور (۱۰) سی دریافت ہوتا ہی کہ بائین طرف آ کی خط منحنی واقع نہین ہی —
اگر قیمتین مساوات کی منفی فرض کیجاوین تو اس صورتین بہی خط منحنی کی یہی صورت ہوگی لیکن مقام اسکا نسبت نقطہ شروع کی مختلف صورت گذشتہ سی ہوگا

صورت (۲) اگر دو قیمتین مساوات کی مساوی ہون تو صورت مساوات کی یہہ ہوگی

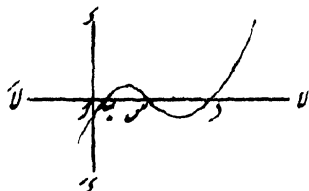
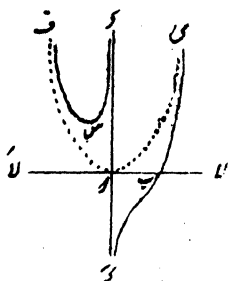
د = (لا − س) $\sqrt{}$ (لا − ط) / ط یا د = ± (لا − ط) $\sqrt{}$ (لا − س) / ط صورت اول

مین شکل خط منحنی کی تقریبا مثل شکل گذشتہ کی ہوگی لیکن نقاط س اور د منطبق ایک دوسرے پر ہونگی اور صورت دویم مین نقاط ب اور س ایک دوسرے پر منطبق ہین یا شکل بیضوی ب س نقطہ متجانس ہوجاویگا —

صورت (۳) اگر دو قیمتین مساوات کی ناممکن ہون تو وہ حصہ خط منحنی کا جو کہ مثل صورت گذشتہ کی ہی اور جو نقطہ د سی شروع ہوتا ہی حاصل ہوگا

صورت (۴) اگر تینون قیمتین مساوات کی مساوی ہون تو صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی ط د^2 = (لا − ط)^3 اس خط منحنی کی دو ساقین ہین اور یہہ دونو نقطہ ب سی شروع ہوتی ہین اور محدب طرفین اسکی طرف محور لا کی پہری ہوئی ہین اس خط منحنی کو نصف مکعبی قریب البضوی کہتی ہین مساوات اسکی بہت آسان ہوگی جبکہ راس ب نقطہ شروع خط منحنی پر فرض کیا جاوی یعنی جبکہ لا بجای (لا − ط) لکہا جاوے تو اس صورت مین ط د^2 = لا^3 اور یہہ خط منحنی بہت مشہور ہی کیونکہ اول طول اسی خط منحنی کے ایک حصہ کا مساوی ایک خط مستقیم کے

ثابت ہوا تہا — ش ش ش ش ش

(۳۰۹) دریافت کرو کہ اس مساوات کا $ط^۲ ء = لا^۳ + م لا^۲ + ن لا + ف$ واضح ہو کہ لوکس اسکا مثل مساوات گذشتہ کی دریافت ہو سکتا ہی شکل آیندہ لوکس اس مساوات کا ہوگا جبکہ تینون قیمتین اس مساوات کی مثبت اور صحیح اور مساوی ایک دوسرے کی نہوں اگر دو قیمتین مساوی ہون تو ایک نصف بیضوی کی صورت کی شکل پیدا نہین ہوگی اگر تینون قیمتین مساوی ہون تو دونو حاصل نہین ہوگی اس صورت مین صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی $ط^۲ ء = (لا - ط)^۳$ یا اگر نقطہ شروع نقطہ ب پر بدلا جاوے $ط^۲ ء = لا^۳$ اور اس صورتمین خط منحنی کو قریب البیضوی مکعبی کہتے ہین —

(۳۱۰) اگر مساوات یہہ ہو $ط لا ء = لا^۳ + م لا^۲ + ن لا + ف$ تو اس صورت مین محور ءَ کا خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہی اور ایک شاخ خط منحنی کی زاویہ ء ا لاَ مین ہوگی اور باقی صورت خط منحنی کی مثل شکل گذشتہ کی ہوگی اگر فرض کرین ہم نیچی کی شاخ نقطہ ب سی طرف ا ءَ کی پہیلی بطور خط متنفر الملاقات کی یعنی ہمیشہ خط ا ءَ کی نزدیک آتا ہی اور ظاہر ہی کہ اس صورتمین شکل خط منحنی کی مختلف ہوگی موافق قیمتون مساوات کی یعنی جبکہ قیمتین مساوات کی گہٹین اور بڑہین گی تو شکل خط منحنی کی بہی بدلتی جاویگی اب ہم فرض کرتے ہین دہ صورت جبکہ $ء = \frac{لا^۳ - ط^۳}{ط لا}$

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
قیمتین لاَ کی	۰	ط	ط >	ط <	∞	−	−∞
قیمتین یَ کی	∞	۰	−	+	∞	+	+∞

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ اَیَ خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہی اور (۲) سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط منحنی تقاطع کرتا ہی محور کو نقطہ بَ مین جہانکہ (اب = ط) اور (۳ اور ۴ اور ۵) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ اَ سے بَ تک نیچی محور لاَ پھیلتا ہی اور نقطہ بَ سی اوپر کیطرف لاَ کی لانہایت پھیلتا ہی اور (۶) اور (۷) سی شاخ فَ سَ دَ کی حاصل ہوگی۔ اس خط منحنی کو موافق اسکی صورت کی خط منحنی سہ برگہ یا ترسول کہتی ہین بوسیلہ اس خط منحنی کے فرق درمیان شاخ قریب البیضوی اور شاخ بعید البیضوی ایک خط منحنی کے دریافت ہو سکتا ہی واضح ہو کہ شکل گذشتہ مین بَ دَ اور سَ دَ دو شاخین بعید البیضوی کی ہین کیونکہ خط مستقیم دَ دَ انکا خط متنفر الملاقات ہی لیکن بَ یَ اور سَ فَ شاخین قریب البیضوی کی ہین کیونکہ انکا خط متنفر الملاقات خط منحنی فَ اَ یَ ہی جوکہ

خط متنفر الملاقات قریب البیضوی کا ہوا کرتا ہی اور مساوات اوس خط منحنی
کی جو کہ نقاط سی بنا ہوا ہی یہہ ہی $\text{ی} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ط}}$ (۱۹۶) مثال دریافت کرو
نوعیں اس مساوات کا $\text{لا}\,\text{ی}^2 - \text{ی} - \text{لا}^3 - \text{لا} = 0$ اگر مساوات یہہ ہو
$\text{لا}\,\text{ی}^2 + \text{ط}\,\text{ی} = \text{لا}^3 + \text{لا}^2 + \text{ن}\,\text{لا} + \text{ف}$ صورت اس مساوات کی خط منحنی کی مساوات
آیندہ کی قیمتوں پر موقوف ہے $\text{لا}^4 + \text{م}\,\text{لا}^3 + \text{ن}\,\text{لا}^2 + \frac{\text{ط}^2}{4} = 0$ واضح ہو کہ اس
مساوات کی خاص صورتوں میں کسی طرح کا اشکال واقع نہیں ہوگا اور مساوات
عام خطوط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی $\text{ی} = \pm\left(\text{لا} + \frac{1}{2}\,\text{م}\right)$ اور محور ی خط متنفر
الملاقات ہوگا —

* * * * *

(۱۱۳) اگر اجزای لا^3 اور $\text{م}\,\text{لا}^2$ مساوات میں نہوں تو اس صورتمیں صورت
مساوات گذشتہ کی یہہ ہو جاویگی $\text{لا}\,\text{ی}^2 + \text{ط}\,\text{ی} = \text{ن}\,\text{لا} + \text{ف}$
$\therefore\ \text{ی} = \frac{-\text{ط} \pm \sqrt{\text{ط}^2 + 4\,\text{ف}\,\text{لا} + 4\,\text{ن}\,\text{لا}^2}}{2\,\text{لا}}$ اگر مخرج اس صورت کا ایک مقدار
مقررہ ہوتا تو یہہ مساوات بیضوی یا بعید البیضوی یا قریب البیضوی سی تعلق رکھتی
جبکہ ن مثبت یا منفی یا صفر ہوتا تو اب ظاہر ہی کہ اگر بجای ایسی ایک مقدار مقررہ
کی مقدار غیر مستقیم $2\,\text{لا}$ لکہی جاوے تو یہہ تراشس مخروطی بعید البیضوی بنجاویگی جسکا
لانہایت متاقین طرف آ کہ پہنچینگی جسکا محور خط متنفر الملاقات ہوگا اور اسی مساوات
کی خط منحنی کی نو شکلیں ہوسکتی ہیں موافق قیمتوں ف کے ثبوت انکا ایک خاص
کتاب نیوٹن صاحب کی میں ہے —

فقرہ گذشتہ سی معلوم ہوتا ہی کہ خطوط منحنی تیسرے مرتبہ کے لانہایت شاخیں

رکھتی ہین اور یہہ حقیقت مین صحیح کیونکہ ہر ایک مساوات طاق درجہ سی کم سی کم ایک صحیح قیمت حاصل ہوگی پس اسصورتین ہر ایک صحیح قیمت ی کی موافق ایک خاص صحیح قیمت لا کے حاصل ہوگی —

(۳۱۲) دریافت کرو مساوات کن کواڈ کی جسکو نکومڈیز صاحب نی ایجاد کیا ہے فرض کرو کہ لالا شکل (۱) مین ایک خط غیر محدود ہی اور ر ایک نقطہ مفروض ہی کھیچو اس نقطہ سی عمود ر س ب خط لالا پر اور کھیچو اور بہت سے خطوط ر ی ف اور ر ی ف وغیرہ اور قطع کرو ی ف کو ہمیشہ مساوی س ب کے تو لوکس نقطہ ف کا کن کواڈ ہوگا — اگر ی ر مین سے قطع کرین ی ف = ی ف تو لوکس ف کا چھوٹا کن کواڈ ہوگا دو لوکن کواڈ سے ایک خط منحنی پیدا ہوگا یعنی مساوات دونو کی ایک ہی ہوگی —

(۱) (۲)

فرض کرو ر س = ط اور س ب = ص اور س م = لا اور م ف = ی

تو اب ظاہر ہی کہ ی ف : م ف :: ر ف : ر ن یا ص : ی :: $\sqrt{لا^2 + (ط+ی)^2}$: ط + ی

$\therefore$ $ی^2 لا^2 + ی^2 (ط+ی)^2 = ص^2 (ط+ی)^2$ $\therefore$ $لا^2 = (ص^2 - ی^2) \left(\frac{ط+ی}{ی}\right)^2$

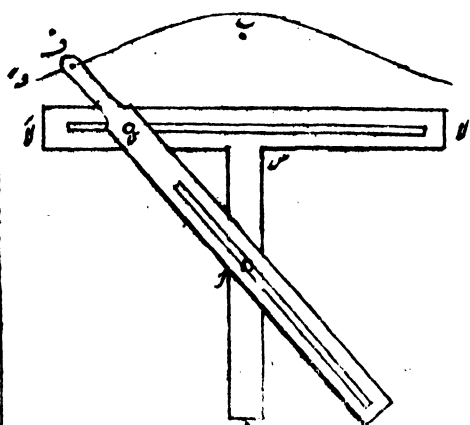
$\therefore$ $لا = \pm \frac{ط+ی}{ی} \sqrt{ص^2 - ی^2}$ اس مساوات کی تین صورتین ہو سکتی ہین

ص > ط یا = ط یا < ط صورت (۱) ص > ط

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
قیمتین ری کی	٠	ص	< ص	> ص	− ط	− ص	< − ط	> − ط اور < − ص
قیمتین لاَ کی	∞	٠	ممکن	ناممکن	٠	٠	ممکن	ممکن

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ لا لاَ خط متقرب الملاقات خط منحنی کا ہی اور (۲) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ ب مین سے گذرتا ہی اور (۳) اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ ب مین سے شروع ہوکی اوپر کی طرف خط متقرب الملاقات کی واقع ہی اور نقطہ ب کی اوپر کی طرف نہین جاتا ہی اور اسکی وسیلہ سے شاخ ب ق ح حاصل ہوگی اور (۵) اور (۶) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقاط ر اور د مین سے گذرتا ہی اگر س د = ص اور (۷) سی ظاہر ہوتا ہی کہ شاخ ر لاَ نقطہ ر سی طرف خط متقرب الملاقات کی پہیلتی ہی اور (۸) سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط منحنی درمیان نقاط ر اور د کے واقع ہی اور بوسیلہ دو قیمتون لاَ کے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی س لاَ کی طرف بہی پہیلتا ہی — صورت (۲) ص = ط جدول گذشتہ مین لکہو ص = ط اور دور کرو (۸) کو تو اب صورت خط منحنی کی مثل مرقومہ گذشتہ کے ہوگی مگر صورت مدور ر ق د معدوم ہوجاویگی اور یہہ بسبب منطبق ہونے نقاط ر اور د کے واقع ہوگا — صورت (۳) ص > ط جدول گذشتہ مین لکہو ص بجای ط کے (۷) مین — اگر ری > − ص تو لاَ ناممکن ہوگا (۸) مین موافق اس فرض کے اوپر کے اثنا خط منحنی مین کسی طرح کا فرق نہین

نہین آویگا لیکن نقطہ د درمیان ر اور س کے واقع ہوگا اور (۸) سی ظاہر ہوتا ہے
کہ کوئی حصہ خط منحنی کا درمیان ر اور د کے واقع نہین ہی اور (۵) سی معلوم ہوتا
کہ نقطہ ر خط منحنی پر نہین ہی لیکین خط منحنی سے تعلق رکہتا ہی اور اس نقطہ کو نقطہ
منتہا اس کہتے ہین اور ظاہر ہی کہ اس صورت مین تل کا خط منحنی مشابہ اوپر کی خط
منحنی کے ہی بوسیلہ بنائی کن کوا ڈ کے تصور خاصیت خط منفرالملاقات کا نتیجہ
آتا ہی کیونکہ خط ی ف ہمیشہ مساوی س ب کے ہونا چاہیئے اور ظاہر ہی کہ موافق
اس شرط کی خط منحنی ہمیشہ نزدیک خط س لا کے آتا ہی (جیسا کہ نقطہ ف پر) اگرچہ
خط منحنی خط س لا پر منطبق نہین ہوگا لیکن پہر بہی زیادہ نزدیک اوسکی آویگا
بہ نسبت کسی ایک خاص مقدار کے — یہہ خط منحنی نکومیدیز صاحب نی ایجاد کیا
واضح ہو کہ یہہ مہندس باشندہ یونان کا تہا اور ۲۰۰ برس پیشتر حضرت عیسی
کی موجود تہا اوسنی اسکی وسیلہ سی طریقہ تضعیف کعب اور تثلیث زاویہ کا دریافت کیا
واسطی ثبوت دوسری دعوی یعنی واسطی تثلیث زاویہ کی بوسیلہ اس خط منحنی کے
فرض کرو کہ شکل (۲) مین زاویہ ب س ر کی تثلیث کیا جاہتی ہین کہینچو خط ا ی ف
ملتا ہوا دایرہ سی نقطہ ی پر اور قطر سی نقطہ ف پر اسطرح ملی کہ خط ی ف مساوی
نصف قطر س ر کے ہو تو اب ظاہر ہی کہ قوس دی ایک تہائی ا ب کی ہوگی —
اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ خط مستقیم اور دایرہ کی ر ی ف اسطرح پر نہین کہینچ سکتا ہی
کہ ی ف = ر س (یہہ بوسیلہ حرکت کی ہو سکتا ہی اسیواسطے یہہ موافق
ہندسہ کی صحیح نہین ہے) اور چونکہ ایک مدت دراز سی مہندسان متقدمین کو

سوای رول اور پرکار کے کوئی اور آلہ معلوم نہتا اسیواسطی وہ اس شکل کو ثابت نہ کر سکی اور جب اونکو یہہ دریافت ہوا کہ تثلیث زاویہ کی بوسیلہ خطوط منحنی کی ہو سکتی ہی اسیواسطی اونہون نے واسطی ثبوت اس شکل کے مختلف خطوط منحنے ایجاد کئی اونمین سے بہت مشہور خط منحنی نکومیڈیز کا تہا بوسیلہ اس خط منحنی کے یہہ شکل بطور آیندہ کے ثابت ہوسکتی ہی ۔ فرض کرد کہ آر قطب کن کوادٔ خورد کا ہی اور ب ف خط متقرب الملاقات اور آر س خط متحرک تو اب ظاہر ہی کہ نقطہ تقاطع ای خط منحنی اور دایرہ کا نقطہ مطلوب ہوگا ۔ واضح ہو کہ کن کواد کلان سی بہی یہہ شکل ثابت ہوسکتی ہی ۔ چونکہ سوای حرکت متواتر کے یہہ خط منحنی نہین بن سکتا ہی اسیواسطی نکومیڈیز نی ایک آسان آلہ واسطی کہینچنی اس خط منحنی کی ایجاد کیا فرض کرو کہ لا لاَ ایک سیدہی لکڑی ہی اور اسمین ایک سوراخ ہی اور فرض کرو کہ س د دوسری لکڑی لا لاَ پر اسطرح پر جڑی ہوئی ہی کہ یہہ اوسپر عمود ہی اور نقطہ قَ پر ایک کیل تیسری لکڑی ف ق کے سوراخ مین رکہی ہوئی ہی اور ر ف مین ایک بیل نقطہ ق پر ...

اور یہہ تیل سوراخ لالاَ مین جڑی ہوئی ہے یعنے لکڑی ف ا بوسیلہ دو کیلون کے
اور ی لکڑی س ف اور لالاَ سے اسطرح ملی ہوئی ہے کہ وہ بخوبی حرکت کر سکتی ہے
اور طول خط ف ی کا معلوم ہے تو اب ظاہر ہے کہ بوسیلہ حرکت لکڑی ف ی کے
ایک سُرمہ کا قلم نقطہ ف پر کن کواڈ بناویگا اور اگر دوسرا سرمہ کا قلم خط ی کا کے
مین کسی مقام پر رکھا جاوے تو وہ کن کواڈ خورد بناویگا ۔ اس خط منحنی کو
پہلے معمار استعمال مین لاتے تھے کیونکہ وہ اکثر ایک خاص بڑے ستون مین
ب ف ف کو جو کہ ایک حصہ کن کواڈ کا ہے استعمال مین لاتے تھے ۔

مساوات قطبی کن کواڈ کی بطور آیندہ کے دریافت ہو سکتی ہے ۔ فرض کرو
کہ شکل (۱) مین قطب ے اور اف = نق اور زاویہ ف ا ب = ر
∴ ی + ط = نق جم ر اور لا = نق جس ر جبکہ لکھین گے ہم ان قیمتون کو
مساوات کن کواڈ مین تو بعد تحویل کے مساوات قطبی کن کواڈ کی یہہ حاصل ہوگی
س = ط سـ ر + ص ۔ واضح ہو کہ مساوات قطبی اس خط منحنی کی بوسیلہ
حدود اس خط منحنی کے باسانی دریافت ہو سکتے ہین ظاہر ہے کہ نق = ز ف
= ای + ی ف = اس سٹ س ای + س ب = ط سٹ ر + ص

(۳۱۳) طریقہ آیندہ واسطے دریافت کرنے مساوات کن کواڈ کے اس صورت کی
خطوط منحنی مین اکثر استعمال مین آسکتا ہے اور مختلف شکلون مین مفید ہوگا ۔
فرض کرو کہ بہت سے خطوط مثل ای ف کی شکل (۱) مین جو کہ کھنچے ہوئے ہین
کاٹتے ہین خط س لا کو نقاط ی وغیرہ مین ہر ایک نقطہ ی کو مرکز فرض

کرکے کہینچو ایسی دایرے سے جسکا نصف قطر ص ہو قطع کرتی ہوئی خطوط لری ق کو نقاط ق اور ق میں تواب ظاہر ہی کہ لوکس ق کا کن ہوا ڈ ہوگا و اسطی ثبوت اس مطلب کے فرض کرو کہ تر نقطہ شروع محوروں متقاطع علی القوایم کا ہی اور و ب محور ی کا اور تر لا متوازی س لا کے اور فرض کرو کہ مساوات عام ار ی کی ی = م لا اور اسمین م غیر منقطع ہی تواب ظاہر ہی کہ ی = ط اور لا = $\frac{ط}{م}$ نقطہ ی کی مساواتین ہین اور مساوات اوس دایرہ کی جسکا مرکز نقطہ ی اور نصف قطر ص ہی یہہ ہوگی $(ی-یَ)^2+(لا-لاَ)^2=ص^2$ یا $(ی-ط)^2+(لا-\frac{ط}{م})^2=ص^2$ جبکہ دور کرین گی ہم مقدار م کو بوسیلہ اس مساوات اور مساوات خط ار ی ق کے تو مساوات خط منحنی کی یہہ حاصل ہوگی $(ی-ط)^2+(لا-\frac{ط لا}{ی})^2=ص^2$ یا $(ی-ط)^2\frac{لا^2+ی^2}{ی^2}=ص^2$ اگر خط س لا ایک ایسا خط منحنی فرض کیا جاوے کہ اوسکی مساوات عام یہہ ہو ی = ج (لا) تو اوتار نقطہ ی کے بوسیلہ دور کرنے مقادیر لا اور ی کے مساوات ی = م لا اور ی = ج (لا) مین سے حاصل ہوگی تواب ہمین حاصل ہوگی یہہ مساواتین لا = جَ (م) اور ی = م جَ (م) اور مساوات دایرہ کی یہہ ہوگی $(ی-م جَ(م))^2+(لا-جَ(م))^2=ص^2$ اور مساوات عام خط منحنی کی یہہ ہوگی

$$\left\{ی-\frac{ی}{لا}جَ\left(\frac{ی}{لا}\right)\right\}^2+\left\{لا-جَ\left(\frac{ی}{لا}\right)\right\}^2=ص^2$$

(۱۴۰) اگر ایک عمود مرکز قطع ناقص سے اوسکی مماس پر کہینچا جاوے تو دریافت کرو لوکس انکی نقطہ تقاطع کا — چونکہ مساوات مماس کا یہہ ہے

$ط^۲ ی^۲ - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ (۱) تو مساوات اوس عمود کی جو کہ مرکز سے اس مماس پر کھینچا جاوے یہہ ہوگی $ی = - \frac{ط^۲}{ص^۲} \frac{ی'}{لا'} لا$ (۲) واسطی دریافت کرنے مساوات نقطہ تقاطع مطلوب کے مقادیر $لا'$ اور $ی'$ کو بوسیلہ مساواتون (۱) اور (۲) اور مساوات بعید البیضوی کی دور کرنا چاہئی تو اب بوسیلہ (۱) اور (۲) کے یہہ حاصل ہوگا $لا' = \frac{ط^۲ لا}{لا^۲ + ی^۲}$ اور $ی' = - \frac{ص^۲ ی}{لا^۲ + ی^۲}$ جبکہ لکھین گے ہم ان قیمتون کو اس مساوات مین $ط^۲ ی'^۲ - ص^۲ لا'^۲ = - ط^۲ ص^۲$ تو حاصل ہوگا یہہ $(لا^۲ + ی^۲)^۲ + ص^۲ ی^۲ - ط^۲ لا^۲ = ۰$ اور یہہ مساوات چوتھی درجہ کی ہی اب ہم صرف صورت اس مساوات کی ایک خاص صورت مین جبکہ $ص = ط$ یعنی جبکہ بعید البیضوی مساوی القطرین ہو دریافت کرینگی اب ظاہر ہی کہ صورت مساوات گذشتہ کے موافق اس شرط کی یہہ ہوگی $(لا^۲ + ی^۲)^۲ =$ $ط^۲ (لا^۲ - ی^۲)$ ∴ $ی^۴ + (۲ لا^۲ + ط^۲) ی^۲ + لا^۴ - ط^۲ لا^۲ = ۰$ اور

$$ی = \pm \sqrt{- (لا^۲ + \frac{ط^۲}{۲}) \pm ط \sqrt{۲ لا^۲ + \frac{ط^۲}{۴}}}$$

ظاہر ہی کہ اگر علامت اندر کی جذر کی منفی ہو تو قیمت $ی$ کی ناممکن ہوگی اسیواسطے ہم اس مساوات کو اوس خاص صورت مین دریافت کرین گے جبکہ

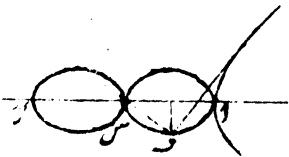
$$ی = \pm \sqrt{- (لا^۲ + \frac{ط^۲}{۲}) + ط \sqrt{۲ لا^۲ + \frac{ط^۲}{۴}}}$$

اس صورت مین قیمت $ی$ کی ناممکن ہوگی جبکہ $لا^۲ + \frac{ط^۲}{۲} > ط \sqrt{۲ لا^۲ + \frac{ط^۲}{۴}}$ یعنے اگر $لا^۴ + ط^۲ لا^۲ + \frac{ط^۴}{۴} > ۲ ط^۲ لا^۲ + \frac{ط^۴}{۴}$ یا اگر $لا^۲ > ط^۲ لا^۲$ یعنے اگر $لا > \pm ط$ اسیواسطے ہمین حاصل ہوگی جدول آیندہ

	۱	۲	۳	۴
قیمتین لا کی	٠	± ط	< ± ط	> ± ط
قیمتین د کی	٠	-	ممکن ٠	ناممکن

(۱) سی دریافت ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ س مین سے گذرتا ہی اور (۲) سے
دریافت ہوتا ہی کہ نقاط آ اور آ مین سے گذرتا ہی اور (۳) سے ظاہر ہوتا ہے
کہ اس خط منحنی کی دو شاخین ہین

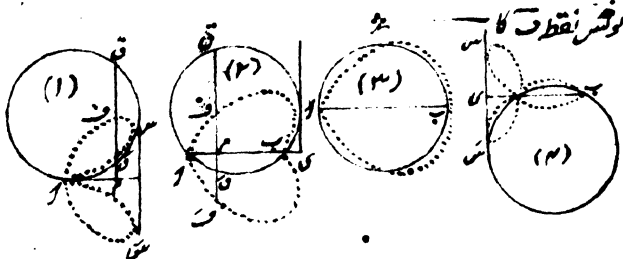
س سے آ تک

اور س سے آ تک

اور (۴) سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی پری آ اور آ کے نہین پہیلتا سی اب ہم صورتوں
ان بیضی شکلون کے زیادہ تحقیق سی دریافت کر سکتی ہین چونکہ مماس راس
بعید البیضوی پر عمود محور پر ہوتا ہی تو صورت بیضی نقطہ آ پر قطع کری گی
محور کو اسطرح پر گویا کہ یہہ عمود محور پر ہی اور نقطہ س پر زاویہ ۴۵ کا بناویگی
کیونکہ مماس تقریباً خط متنفر الملاقات پر منطبق ہوتا ہی تو اب عمود اس مماس
پر زاویہ ۴۵ کا بناویگا — اس خط منحنی کو جیمس برنولی صاحب نے ایجاد کیا ہے
اور نام اس خط منحنی کا لمنسکیٹا ہی اور یہہ ایک سلسلہ خطوط منحنی کا بناتا ہی
موافق مختلف قیمتون ص کے دریافت کرو مساوات قطبی لمنسکیٹا کی فرض کرو
س = ل جس ر اور لا = ل جم ر تو اب صورت اس مساوات کی

$(لا^۲ + ی^۲)^۲ = ط^۲ (لا^۲ - ی^۲)$ یہہ ہو جاویگی $ن^۲ = ط^۲$ جم ۲ ر
ہر ایک خط منحنی جو کہ اس شکل کا ہی لمنسکیٹ کہلاتا ہی —

(۳۱۵) مثال آیندہ مین خط منحنی بوسیلہ نقاط کی باسانی کہنچ سکتا ہی
فرض کرو کہ ایک ایسا دایرہ کہنچا ہوا ہی جسکا س مرکز اور س ق نصف قطر
ہی اب کہینچو وتر ق م اور ق س مین سے قطع کرو ق ف = ف م تو اب لوکس
ف کا لمنسکیٹ ہوگا اور اگر ق م بہی سی قطع کرین ہم م ر جو تیسری نسبت
مین ہو خط ق م اور س م کے یعنی ق م : س م :: س م : م ر تو لوکس
ر کا ایک دوسرا لمنسکیٹ ہی اور اسکی مساوات یہہ ہوگی $لا^۴ - ط^۲ لا^۲ + ط^۲ ی^۲$
$= ۰$ اور مساوات آیندہ بہی $ط^۲ (ی - ط)^۲ = (لا - ط)^۲ (۲ط لا - لا^۲)$
مساوات اسی خط منحنی کی ہی لیکن نقطہ شروع اسکا مختلف ہی — مثال
دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $ی^۲ = لا^۲ \frac{ط^۲ + لا^۲}{ط^۲ - لا^۲}$ ثر ثر ثر

(۳۱۶) اگر ر م شکل (۱) مین مماس دایرہ ر س ق کا ہو اور ق م وتر و تر ق م
العرض ر م کا اور م ف وسطی النسبت ر م اور م ق کا ہو تو اب دریافت
لوکس نقطہ ف کا —

فرض کرو و م = لا اور م ف = ی اور تا رمتقاطع علی القوایم ف کی ہن

اور فرض کرو کہ نصف قطر دایرہ کا = ص تو اب ظاہر ہی کہ موافق فرض کے مربع م ف = سطح ر م اور م ق اب دریافت کرو م ق کو چونکہ مساوات دایرہ کی یہہ ہی $(د - دَ)^۲ + (لا - لاَ)^۲ = ں^۲$ یا $دَ^۲ - ۲ص د + لاَ^۲ = ۰$

کیونکہ لاَ = ۰ اور دَ = ں = ص ∴ $م ق = ص \pm \sqrt{ص^۲ - لا^۲}$

∴ م ف یا د = $\pm \sqrt{ص لا \pm لا \sqrt{ص^۲ - لا^۲}}$ چونکہ $ص^۲ - لا^۲ < ص^۲$

تو اب معلوم ہوتا ہی کہ قیمتین د کی چار ہین موافق ہر ایک مثبت قیمت لا < ص کے اور جبکہ لا منفی ہوگا تو د کی قیمت حاصل نہین ہوگی تو اب معلوم ہوتا ہی کہ اگر اب = ص شکل (۱) مین فرض کیا جاوے تو خط مستقیم س ب سَ تک جو کہ عمود خط اب پر ہی خط منحنی کی ہوگی یعنی خط منحنی اس سے بڑی نہین پہلیگا اور جبکہ لا = ص تو وتر خط منحنی کا مساوی مماس ب س کے ہوگا درمیان لا = ۰ اور لا = ص حاصل ہونگی چار قیمتین د کی جنکی وسیلہ سے دو نقطدار بیضئی صورتین شکل (۱) مین حاصل ہونگی واسطی اثبات کی کہ یہہ دعوی عموماً ثابت ہی فرض کرو کہ خط اب کو ایک وتر دایرہ کا اشکال (۲) اور (۳) اور (۴) مین ہی تو اب اگر ط اور ص اوتار مرکز کے فرض کئے جاوین اور آ نقطہ شروع تو مساوات خط منحنی کی یہہ ہوگی $د = \pm \sqrt{ص لا \pm لا \sqrt{ص^۲ + ۲ط لا - لا^۲}}$

ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس مساوات کی چار صورتین حاصل ہو سکتی ہین اور یہہ چارون موقوف قیمتون ص اور ط پر ہین اسیواسطے چار خطوط منحنی مختلف صورتونکی حاصل ہونگی لیکن ان خطوط کی ایک ہی خاصیت ہوگی —

صورت (۱) جبکہ ط = ۰ تو شکل (۱) حاصل ہوگی اسکا منحنی ابھی ذکر کیا ہی

صورت (۲) جبکہ ط اور ص مثبت ہوں تو شکل (۲) مین وی = ط + √(ط² + ص²)

صورت (۳) ص = ۰ شکل (۳)

صورت (۴) جبکہ ص منفی ہو تو شکل (۴) پیدا ہوگی مساوات انکی یہہ ہوگی

ی = ± √(ص² + ۲ ط لا - لا²) لا - ص لا ظاہر ہی کہ اس مساوات سی دو قیمتین ی کی حاصل ہو سکتی ہین جبکہ لا مثبت اور > ۲ ط بھی فرض کیا جاے

اور چار قیمتین ی کی حاصل ہو سکتی ہین جبکہ لا منفی اور > √(ط² + ص²) - ط

یعنی > وی سے چونکہ بدلنا ایک خط منحنی کا دوسری سی آسان ہی اور اسمین کچھہ حاجت بیان کی نہین ہی اسیواسطی اسکا بیان کرنا ضرور نہین ہی اور چونکہ ایک ہی شکل سے خطوط منحنی (۲) اور (۴) پیدا ہوتی ہین یہہ شکل سی سمجھہ مین آتا ہی اسیواسطی اسکو ہم تفصیل سی بیان کرینگی - شکل (۱) مین نقاط ق اور ق دریافت ہوئی ہین بوسیلہ وسط فی النسبت لم اور ق م اور لم اور ق م کے علاوہ اسکی نقطہ ق کا خط ق م کھینچی ہوئے اور ق م مین ہو سکتا ہی اسیواسطے ہمین دو بعضی صورتین شکل (۱) مین حاصل ہوگی چونکہ بائین طرف ا کی وتر العرض لم منفی ہی اور وتر ق م مثبت اسیواسطی بائین طرف ا کی وسط فی النسبت نہین ہو سکتا ہی یا خط منحنی بائین طرف ا کی واقع نہین ہی شکل (۲) مین بوسیلہ خطوط لم اور ق م کے نقاط ق اور ق معلوم ہو سکتی ہین لیکن لم اور م ق سے صرف ایک خیالی لوکس حاصل ہوتا ہی —

شکل (۳) مین کسیطرح کی تفصیل کی حاجت نہین ہی ـ شکل (۴) مین واسطے
مثبت طرف (۱) کے وہ بیان استعمال مین آسکتا ہی جسکا شکل (۲) مین
ذکر ہوا ہی یعنی جو صورت خط منحنی کی کہ شکل (۲) مین ہوئی تھی وہی شکل (۴) مین
مثبت طرف آ کی ہوگی اور چونکہ بائین طرف ا کی وتر العرض اور دونون تر
منفی ہین اسیواسطی وہ وسط فی النسبت معلوم ہوسکتی یا چار نقطی خط منحنی کے
بوسیلہ ہر ایک وتر العرض کے حاصل ہوگی واضح ہو کہ ایسی خطوط منحنی مختلف
ہوسکتی ہین اور صورتاً انکی موجد کی اختیار ہی اور یہہ اس صورت مین بہی حاصل
ہوسکتی ہین جبکہ قریب البیضوی یا کوئی اور خط منحنی واسطی قاعدہ کی بجای دایرہ
کی فرض کیا جاوے ـ مثال دریافت کرو لوکس اس مساوات کا ی۲ + ۲ ط لا ی
- ط لا۲ = ۰ .

(۱۷۳) دریافت کرو لب ایک نقطہ ف کا کہ اگر کہینچین ہم اوس نقطہ سے
مختلف خطوط نقاط مفروضہ س اور ہ تک تو ہمیشہ سطح س ہ اور ہ ق کا
مساوی ایک مقدار مقررہ کی ہو واسطی ثبوت اس دعوی کے ملاؤ نقاط س
اور ہ کو اور تنصیف کرو خط س ہ کو نقطہ ص پر اور فرض کرو کہ ص نقطہ
مشترک محورون متقاطع علی القوایم کا ہی اور فرض کرو کہ س ہ = ۲ ط
اور ص م = لا اور م ف = ی اور فرض کرو کہ سطح س ف اور ہ ف =
ط ص اور چونکہ س م = ط + لا اور م ہ = ط - لا تو
(ی۲ + (ط + لا)۲) (ی۲ + (ط - لا)۲) = ط ص۲ یعنی

$(\text{ی}^2 + \text{لا}^2 + \text{ط}^2 + 2\,\text{ط لا})(\text{ی}^2 + \text{لا}^2 + \text{ط}^2 - 2\,\text{ط لا}) = \text{ط}^2\text{ص}^2$ یا

$(\text{ی}^2 + \text{لا}^2 + \text{ط}^2)^2 - 4\,\text{ط}^2\text{لا}^2 = \text{ط}^2\text{ص}^2$ اسیواسطی

$\text{ی} = \pm\sqrt{-(\text{ط}^2 + \text{لا}^2) + \text{ط}\sqrt{\text{ص}^2 + 4\,\text{لا}^2}}$ فرض کرو کہ $\text{ی} = 0$

$\therefore \text{لا} = \pm\sqrt{\text{ط}(\text{ط} \pm \text{ص})}$ (۱) اور فرض کرو کہ $\text{لا} = 0$

$\therefore \text{ی} = \pm\sqrt{\text{ط}(\text{ص} - \text{ط})}$ (۲)

(۱) فرض کرو کہ ط کم ہی ص سی تو اب بوسیلہ (۱) کی نقاط آ اور آَ حاصل ہونگے اور بوسیلہ (۲) کے نقاط بَ اور بَ — بوسیلہ مقابلہ کرنے قیمت ی کی جو کہ (۲) مین حاصل ہوئے اوس سی جو کہ اصلی مساوات مین سے دریافت ہوگا کہ م ق بڑا ہی ص ب سی جب تک لا بڑا ہی $\sqrt{۲ط(۲ط - ص)}$ سے تو اب ظاہر ہی کہ صورت خط منحنی کی ا ف ب اَ بَ ا ہوگی اور جیسا کہ ص زیادہ ہوگا اوسیقدر صورت بیضی کی اوپر کیطرف چپٹی ہوتی جاتی ہی اور صورت اسکی مثل بیرونی خطوط منحنی کے ہوجاوینگی — (۲) فرض کرو ط = ص تو اس صورت مین ہمین نقشہ از خط منحنی گذرتا ہوا نقطہ ص مین سے حاصل ہوگا اور چونکہ اس صورت مین مساوات یہہ ہوجاتی ہی $(\text{ط}^2 + \text{ی}^2)^2 = 2\,\text{ط}^2(\text{لا}^2 - \text{ی}^2)$ تو لوکس

اس صورت مین لمنسکیٹا برنولی صاحب پیدا ہوگا — (۳) فرض کرو کہ ط
بڑا ہی ص سی تو اس صورت مین مساوات (۱) سے دو قیمتین لا کی حاصل ہونگی
اور (۲) سے ایک ناممکن قیمت د کی تو اب یہانسی معلوم ہوتا ہی صورت خط منحنی کی
موافق اس شرط کی مشتمل دو شکل بیضی پر ہوگی جو کہ گرد ہ اور س کے
کہچی ہوئی ہین جبکہ ص کم ہوتا ہی تو یہہ دونو صورتین گہٹنا شروع کرتی ہین
یہان تک جبکہ ص = ۰ تو اس صورت مین نقاط س اور ہ کوکس ہوجاوینگے
یہہ خطوط منحنی بیضی کیسینی صاحب کی کہلاتی ہین اس مشہور ہیئت دان نی رستہ
ایک ستارہ کا مثل بیرونی خط منحنی شکل گذشتہ کے خیال کیا تہا —

اس مساوات سی $(د^{۲} + لا^{۲})^{۲} = ص^{۲} د^{۲} + ط^{۲} لا^{۲}$ جو کہ (۱۲۳) دریافت کی
گئی ہی حاصل ہوگی ایک شکل مثل صورت (۱) کے

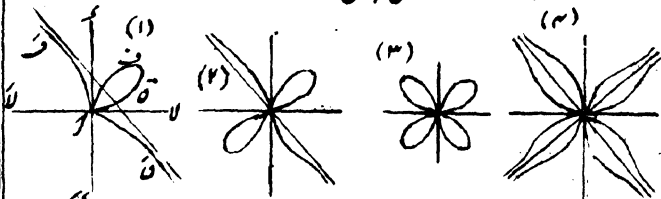
(۳۱۸) واضح ہو کہ بہت سی ایسی صورتین ہین جنمین تیسری مقدار غیر منقطع
کی داخل کرنے سی ایک طرح کی آسانی اور فایدہ ہوتا ہی مثلا اگر مساوات یہہ ہو
$د^{۴} + لا^{۲} د^{۲} + ۲ د^{۳} + لا^{۳} = ۰$ تو ظاہر ہی کہ واسطی دریافت کرنے قیمت لا
اور د کی یہہ مساوات موافق چوتہی یا تیسری درجہ کی مساوات کی حل ہوسکتی ہی
مگر چونکہ تیسری یا چوتہی درجہ کی مساوات کا حل کرنا مشکل ہی اسیواسطے فرض
کرو کہ $لا = ع د$ ∴ $د^{۴} + ع^{۲} د^{۴} + ۲ د^{۳} - ع^{۳} د^{۳} = ۰$ یا $د + ع^{۲} د + ۲ -$
$- ع^{۳} = ۰$ ∴ $د = \frac{ع^{۳} - ۲}{ع^{۲} + ۱}$ اور $لا = ع \times \frac{ع^{۳} - ۲}{ع^{۲} + ۱}$ بوسیلہ ان
مساواتونکی ایک سلسلہ لا اور د کی قیمتون کا حاصل ہوگا

اگر ع = −۳ تو ک = −۲ $\frac{۹}{۱۰}$ اور لا = ۸ $\frac{۷}{۱۰}$

ع	ک	لا
ع = −۳	= −۲	= ۴
= −۱	= −۱ $\frac{۱}{۲}$	= ۱ $\frac{۱}{۲}$
= −$\frac{۱}{۲}$	= −۱ $\frac{۷}{۱۰}$	= $\frac{۱۷}{۲۰}$
= ۰	= −۲	= ۰
= $\frac{۱}{۲}$	= −۱ $\frac{۱}{۲}$	= −$\frac{۳}{۸}$
= ۱	= −$\frac{۱}{۲}$	= −$\frac{۱}{۲}$
= ۱ $\frac{۱}{۲}$	= $\frac{۱۲}{۲۶}$	= $\frac{۳۱}{۵۲}$
= ۲	= ۱ $\frac{۱}{۵}$	= ۳ $\frac{۲}{۵}$
= ۳	= ۲ $\frac{۱}{۴}$	= ۷ $\frac{۱}{۲}$
= ۴	= ۳ $\frac{۱۱}{۱۴}$	= ۱۴ $\frac{۱۰}{۱۴}$
وغیرہ	وغیرہ	وغیرہ

اور جبکہ ک = ۰ تو لا = ۰ یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ آ میں سے گذرتا ہی فرض کرو کہ آ لا اور آ ک محور ہیں آ ک میں سے قطع کرو قیمتیں ک کی جو کہ جدول گذشتہ میں لکھی ہیں اور ان نقاط سے جو کہ بوسیلہ قیمتوں ک کی دریافت

ہوئی ہین یعنی کھینچو خطوط مساوی قیمتون لا کے جو کہ جدول گذشتہ مین لکھی ہین
(یہہ خطوط نقطہ دار خط ہین) اس ترکیب سے بہت نقطی خط منحنی مطلوب
کی معلوم ہونگی جنکی ملانی سے مقام خط منحنی کا معلوم ہوجاویگا یہہ مثال اوس
کتاب مین سی نکالے گئے ہی جو کہ کرمر صاحب باشندہ جنیوا نی بیان خطوط
منحنی مین لکھی ہی اور یہہ مہندس سنہ ۱۷۵۰ء مین موجود تہا اور یہہ کتاب بہت سی
فایدہ مند واسطی تربیتی خطوط منحنی جبریہ کی ہوگی —

(۳۱۹) دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $ی^{5} - 5 ط لا^{2} ی^{2} + لا^{5} = 0$

(۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کرو کہ لا بہت چھوٹا ہی ∴ $لا^{5}$ بہت چھوٹا ہوگا اسیواسطی جبکہ اس
مقدار کو مساوات گذشتہ مین سی دور کرینگی تو حاصل ہوگا
$ی^{5} = 5 ط لا^{2} ی^{2}$ یا $ی^{3} = 5 ط لا^{2}$ اور یہہ مساوات نصف قریب السینوی
مکعبی ق ر ق' کی ہی جو کہ شکل (۱) مین کھنچی ہوئی ہی اور اگر ی بہت
چھوٹا ہو تو ہمین حاصل ہوگا یہہ $لا^{3} = 5 ط ی^{2}$ اور اس سے حاصل ہوگا
قریب السینوی ق ر ق' یہانسی معلوم ہوا کہ خط منحنی کے نقطہ شروع پر دو شاخین
قریب السینوی کی ہین اور جبکہ لا نہایت زیادہ ہو تو $لا^{5}$ بہت ہی زیادہ ہوگا
اسیواسطی $لا^{2} ی^{2}$ کو مساوات گذشتہ مین سے دور کرکے حاصل ہوگا یہہ $ی^{5} = - لا^{5}$

∴ ی = − لا یہاں سی ثابت ہوتا ہی کہ واسطے مثبت لاؔ کے لا نہایت بڑی شاخ خط منحنی کی زاویہ لالاؔی مین حاصل ہوگی اور واسطے منفی لاؔ کے ایک لا نہایت بڑی شاخ زاویہ یؔرلاؔ مین حاصل ہوگی — دریافت کرو خط متنفر الملاقات اس خط منحنی کا چونکہ مساوات اس خط منحنی کی یہہ ہی

ی۵ = − لا۵ + ۵ ط لا۲ ی۲ = − لا۵ (۱ − ۵ط ی۲/لا۳) ∴ ی = − لا (۱ − ۵ ط ی۲/لا۳)۱/۵

= − لا (۱ − ط ی۲/لا۳ − ۲ط۲ ی۴/لا۶ − وغیرہ) = − لا + ط (ی/لا)۲ + ۲ط۲ ی۴/لا۵ + وغیرہ

= − لا + ط + ۲ ط۲/لا + وغیرہ جبکہ ی = − لا اسیواسطے مساوات خط متنفر الملاقات کی یہہ ہوگی ی + لا = ط جبکہ کہینچین ہم اس خط کو اور کہینچین شاخون رؔقؔ اور رقؔ کو طرف اس خط متنفر الملاقات کے تو ہمین تقریباً خط منحنی مطلوب حاصل ہوگا — اگر مساوات یہہ ہو ی۵ − ۵ ط۲ لا۲ ی + لا۵ = ۰ تو ہمین حاصل ہوگا ایسا خط منحنی اس مساوات کا جیسا کہ شکل (۲) مین ہی اور اگر مساوات یہہ ہو ی۶ − ط۲ لا۲ ی۲ + لا۶ = ۰ خط منحنی اسکا شکل (۴) ہے

مثال دریافت کرو کس اس مساوات کا ی۴ − ۴ ط۲ لا ی − لا۴ = ۰

ترکیب گذشتہ واسطے دریافت کرلے اس قسم کی خطوط منحنی کے اوس رسالہ حساب جزئیات مین لکہی ہوئی ہے جو کہ پیکاک صاحب مدرس کیمبرج نے ۱۸۳۲ء مین تصنیف کیا تہا —

(۳۲۰) ب سؔ ایک ایسا خط ہی جسکا طول (۲ ص) معلوم ہی اور انتہائی کنارے اسکے ہمیشہ دو مساوی دایرون کے محیط پر ہین اب دریافت کرو لوسہ

نقطہ ف کا جو کہ بیچ مین خط ب س کی ہی ملاؤ ایک خط درمیان نقاط
د اور دَ جو کہ مرکز دو دایرون کے ہین اور فرض کرو کہ یہی خط محور لاَ ہی اور اُ
نقطہ تنصیف د دَ کا نقطہ شروع محورون متقاطع علی القوایم کا ہی
فرض کرو کہ لا اور رَ اوتار ب کی اور لاَ اور رَ اوتار س کی اور ع اور
ح اوتار ت کی ہین

اور ظاہر ہی کہ
ا د = ا دَ
= ط اور

د ب = دَ س = س اور ظاہر ہی کہ مساوات نقطہ ب کی یہہ ہی

$$ر^{2} + (لا - ط)^{2} = سَ^{2} \quad (۱)$$

اور مساوات س کی یہہ ہے

$$رَ^{2} + (لاَ + ط)^{2} = سَ^{2} \quad (۲)$$

اور

$$(ر + رَ)^{2} + (لا - لاَ)^{2} = ۴ص^{2} \quad (۳)$$

$$۲ح = ر + رَ \quad (۴)$$

$$۲ع = لا + لاَ \quad (۵)$$

بوسیلہ ان پانچ مساواتون کے چار مقدارین ر اور لا اور رَ اور لاَ دور کرنی
چاہئین (۱) اور (۲) سی یہہ حاصل ہوتا ہی $ر^{2} - رَ^{2} + لا^{2} - لاَ^{2} - ۲ط(لا + لاَ)$
= ۰ اور (۴) اور (۵) سی یہہ حاصل ہوتا ہی $ر^{2} + رَ^{2} + لا^{2} + لاَ^{2} + ۲ررَ + ۲لالاَ$
$= ۴ح^{2} + ۴ع^{2}$ اور (۳) سی $ر^{2} + رَ^{2} + لا^{2} + لاَ^{2} + ۲ررَ + ۲لالاَ = ۴ص^{2}$

اور (۱) اور (۲) سے $۲د^2 + ۲د'^2 + ۲لا^2 + ۲لا'^2 - ۴ط(لا - لا') =$

$۴س^2 - ۴ط^2$ اسیواسطے بوسیلہ لکھنی قیمتون کے یہہ حاصل ہوگا

$۴ط(لا - لا') = ۴(ح^2 + ع^2 + ص^2 + ط^2 - س^2)$ یا $(لا - لا') = \frac{ح^2 + ع^2 + م^2}{ط}$

اگر $م^2 = ط^2 + ص^2 - س^2$ اور (۶) سے حاصل ہوگا یہہ $د - د' =$

$\frac{ع}{ح}\left(۲ط - \frac{ح^2 + ع^2 + م^2}{ط}\right) = \frac{ع}{ح}\{۲ط - (لا - لا')\}$ جبکہ لکھین ان قیمتون

$لا - لا'$ اور $د - د'$ کو (۳) مین تو حاصل ہوگا یہہ $\left(۲ط - \frac{ح^2 + ع^2 + م^2}{ط}\right)^2 \frac{ع^2}{ح^2}$

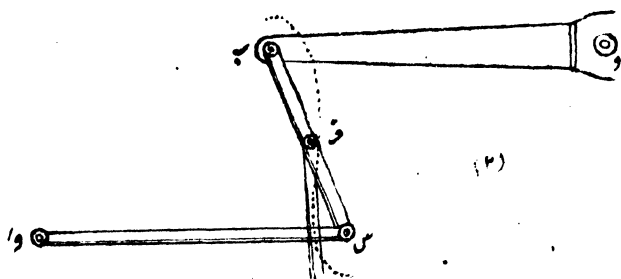
$+ \left(\frac{ح^2 + ع^2 + م^2}{ط}\right)^2 = ۴ص^2$ یا $۴ط^2ع^2 - ۴(ح^2 + ع^2 + م^2)ع^2$

$+ \left(\frac{ح^2 + ع^2 + م^2}{ط}\right)^2 (ع^2 + ح^2) = ۴ص^2ح^2 \therefore ط^2ع^2 - ص^2ح^2 - ع^2(ع^2$

$+ ح^2 + م^2) + (ع^2 + ح^2)\left(\frac{ع^2 + ح^2 + م^2}{۲ط}\right)^2 = ۰$ چونکہ یہہ مساوات

چھٹی درجہ کی ہی اور اسکی دونوں سب سی بڑی قوای کی اجزای مثبت ہین تو خط منحنی سب طرف سی محدود ہوگا جبکہ ع نہایت چھوٹا فرض کیا جاوے تو چار قیمتین ح کی حاصل ہونگی اور جب ع = ۰ تو ح = ۰ یہاں سی ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی دو چند بیضی کیسی صورت کا یا لمنسکیٹ ہی - اگر دایرہ مساوی ایک دوسرے کی ہون تو اس صورت مین بھی خاصیت خط منحنی کی یہی رہیگی لیکن اسکی ثبوت مین ایک طرح کا اشکال واقع ہوگا یعنی اس خط منحنی کی مساوات معلوم کرنی مشکل ہوگی - واضح ہو کہ واٹ صاحب کی ایک بہت اچھی ترکیب سے سی حرکت مدوّرہ حرکت علی الاستقامت سی بدلا ہے اور یہہ اکثر آدمیون کو معلوم بھی ہی فرض کرو کہ ب سرا ایک لکڑی کا ہی جو کہ گرد مرکز د کے حرکت کرتا ہی اسکی وسیلہ سے ایک دوسری لکڑی کو جو عمود ہی حرکت

دیتی ہین اور یہہ ظاہر ہی کہ یہہ حرکت عمود کو نقطہ ب یا کسی نقطہ و ب پر لگانی سے

(۲)

حاصل نہ ہوگی اب فرض کرو کہ ایک لکڑی و س گرد مرکز و کے حرکت کرتی ہی
اور علاوہ نقاط ب اور س کو بوسیلہ سلاخ ب س کے اور مان لو کہ سرا عمود
مذکور کا بیچ مین سلاخ ب س کی جڑا ہوا ہی تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ مرقومہ بالا کے
حرکت اسکی ایک ایسے حصہ خط منحنی مین ہوگی جیسا کہ تاریک حصہ لمنسکیٹ کا شکل گذشتہ
مین ہے اور ظاہر ہی کہ اس صورت مین عمود مذکور اسی حالت عمود ہی مین رہتا ہی
اور ایسا حال نقطہ ب پر نہین ہوگا بہت سی ترکیبین اسکی اکثر کتابون مین لکھی ہین
اور خصوصاً ذکر خط منحنی مرقومہ بالا کا پرونی ہائیڈرولک مین ہی

(۳۲۱) واضح ہو کہ ہم یہان بحث زیادہ مرتبہ کی مساوات کی باوجود ضرورت
کی بہی نہین کرسکتے ہین بلکہ حقیقت مین ہمین وسیلہ انکی دریافت کرنے کا نہین ہے
کیونکہ ہم ابہی ثابت کر آئی ہین کہ اکثر اشکال گذشتہ ایسی درستی سے معلوم ہونے نہین
ہین جیسا کہ اشکال ریاضی ثابت ہونی چاہیئن اگر ہم اشکال گذشتہ مین محنت

اور دقت معلوم کرنے نقاط خطوط منحنی کی نہ لیتی تو انحنا خط منحنی کا ہرگز آسانی سے دریافت نہین ہو سکتا اسواسطے اب ہم مساوات عام ن مرتبہ کا بیان کرینگے اور بعد اسکی بیان تقاطع خطوط منحنی جبریہ کا لکھین گے ⁂

⁂ واضح ہو کہ طالب علم کو یہہ خیال کرنا چاہئی کہ ہندسہ بالجبر سی صورت خط منحنی کی دریافت نہین ہو سکتی ہی مثال آیندہ سی دریافت ہوگا کہ ہندسہ بالجبر ہی بخوبی انحناء خط منحنی کا معلوم ہو سکتا ہی فرض کرو کہ ک۱ اور ک۲ اور ک۳ تین وتر مساوی فاصلہ پر ایک دوسری سے ہین اب بوسیلہ کھینچنے ان اوتار کے خط منحنی کے معلوم ہوگا کہ مجوف طرف یا محدب طرف خط منحنی طرف محور کے جیسا کہ ک۲ > یا < $\frac{ک۱ + ک۳}{۲}$ مثلاً واسطی مثال اسبات کی فرض کرو مساوات قریب البیضوی مکعبی کے ط۲ ی = لا۳ تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی محدب ہوگا اگر ۲ لا۳ > (لا − ۱)۳ + (لا + ۱)۳ > ۲ لا۳ + ۶ لا اور چونکہ یہہ ہی شرط مساوات گذشتہ مین ثابت ہی تو خط منحنی محدب ہی فاصلہ اوتار کا آپس مین موقوف مقدار مقررہ مساوات پر ہی — اور واسطی دریافت کرنے اوس زاویہ کی جو کہ خط منحنی محور لا کو تقاطع کرنیسی بناتا ہی بدلو نقطہ شروع اس نقطہ پر اور اب ظاہر ہی کہ خط منحنی اور مماس اس نقطہ پر ایک ہی زاویہ محور لا سی بناتی ہین لیکن قیمت اوس زاویہ کی مماس کی جو کہ مماس خط منحنی کا اس نقطہ پر محور سے بناتا ہی یہہ ہی $\frac{ی}{لا}$ = ب اور اسکی مختلف قیمتین ہو سکتی ہین مثلاً فرض کرو کہ ط ی۲ = لا۳ ∴ $\frac{ی}{لا}$ = $\frac{لا^۲}{ط^۲}$ = ۰ جبکہ لا = ۰ . تو اب یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ شروع پر محور سی منطبق ہوتا ہی اب لو مثال فقرہ (۳۰۷) کی ی۳ = لا۲ (۲ ط − لا) نقطہ و پر ہمین حاصل ہوگا یہہ $\frac{ی^۳}{لا^۳}$ = $\frac{۲ ط}{لا}$ − ۲ = $\frac{۱}{۰}$ اور نقطہ ب پر ۲ ط − لا = $\frac{لا^۲}{ی^۲}$ = $\frac{۴ ط^۲}{۰}$ یہانسی ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی تقاطع کرکے محور لا سے بناتا ہی زاویہ ۹۰° کا -

(۳۲۲) مساوات عام $\bar{ن}$ درجہ کی مع تمام اوسکے اجزا کی یہہ ہی

$ر^{ن} + (ط لا + ص) ر^{ن-۱} + (س لا^{۲} + د لا + ی) ر^{ن-۲} + \ldots ف لا^{ن} + ک لا^{ن-۱}$
$+ ہ لا^{ن-۲} + \ldots + کہ لا + ل$ واضح ہو کہ اس مساوات مین تمام ممکن مرکب اجزا $\bar{لا}$ اور $\bar{ر}$ کے اسطرح جبر ہین کہ قوای ہر ایک جز کی $\bar{ن}$ سی زیادہ نہین ہین تعداد اجزا کی یہہ ہی $۱ + ۲ + ۳ + \ldots\ldots + (ن + ۱)$ یا ایسا ایک سلسلہ جمع کا ہی جسکا جز اول اور فرق عام عدد ایک ہی اور تعداد اجزا کی $(ن + ۱)$ ہی اور حاصل جمع اس سلسلہ کا یہہ ہی $\frac{(ن+۱)(ن+۲)}{۲}$ اور تعداد اجزای مقادیر مقررہ کی (تقسیم کرکی امثال $\bar{ل}$ سے اگر ضرور ہو) جو کہ کسی پر موقوف نہین ہی ایک کم تعداد اجزای مساوات سی ہین یعنی $= \frac{(ن+۲)(ن+۳)}{۲} - ۱ = \frac{ن(ن+۳)}{۲}$

(۳۲۳) واضح ہو کہ ہر ایک خط منحنی جبریہ $\bar{ن}$ مرتبہ کا اُتنی نقاط مین سے گذر سکتا ہی جتنی اسکی مقدار مقررہ ہین یعنی $\frac{ن(ن+۳)}{۲}$ نقاط مین سے گذریگا کیونکہ جب فرض کرین ہم قیمتین $\bar{لا}$ اور $\bar{ر}$ کی ہر ایک نقطہ مفروضہ پر تو ہمین حاصل ہونگی $\frac{ن(ن+۳)}{۲}$ مختلف مساواتین بوسیلہ ان مساواتون کے قیمت مقادیر مقررہ کی دریافت ہو سکتی ہی مثلاً مساوات عام تراشہای مخروطی کی بعد تقسیم کرنیکے امثال $ر^{۲}$ پر یہہ ہوگی $ر^{۲} + ب لا ر + س لا^{۲} + د ر + ی لا + ف = ۰$ اسمین پانچ امثال ہین اسیواسطے ایک تراش مخروطی پانچ نقطون سے گذر سکتی ہین جبکہ لکہین ہم اوتار نقاط مفروضہ کو بجای $\bar{لا}$ اور $\bar{ر}$ تو حاصل

ہونگی ہمین پانچ مساواتین جنکی وسیلہ سے مقادیر مقررہ معلوم ہو سکتی ہین اسلیئے ہمین خط مطلوب دریافت ہوجاویگا یہہ خط منحنی بیضوی یا بعید القطع ی یا قریب القطع ہوگا جبکہ ب^۲ - ۴ہ س منفی یا مثبت یا صفر ہی (۷۹) —

(۴۲۳) چونکہ حساب دور کرنے کا بہت طایل ہوگا اسیواسطی واسطی دور کرنی اس دقت کی فرض کرو کہ ایک نقطہ ان نقاط مین سے نقطہ شروع ہی اور فرض کرو دو خطوں کو جو کہ کھینچے جاوین اس نقطہ شروع سی دو نقطہ مفروضہ تک محور ہین مثلاً اگر ایک تراش مخروطی کو چار نقاط ب س د ی مین سے گذارنا مطلوب ہو تو ملاؤ ب س اور د ی کو اور فرض کرو کہ وہ نقطہ ر پر ملتی ہین اور فرض کرو کہ ر ب محور ی اور ر د محور لا کا ہی - فرض کرو کہ ر س = ی۱ اور ر د = لا۱ اور ر ب = ی۲ اور ر ی = لا۲ فرض کرو کہ مساوات یہہ ہی ی^۲ + ب لا ی + س لا^۲ + د ی + ی لا + ف = ۰ واسطی لا = ۰ کے یہہ حاصل ہوتا ہی ی۱^۲ + د ی۱ + ف = ۰ اور ی۲^۲ + د ی۲ + ف = ۰ ∴ د = - (ی۱ + ی۲) اور ف = ی۱ ی۲ اسیطرحسی جب ی = ۰ تو ی = - س (لا۱ + لا۲) اور ف = س لا۱ لا۲ جبکہ لکھا ہمنی دونون قیمتون ف کو مساوی ایک دوسری کی تو حاصل ہوگا یہہ س = $\frac{ی۱ ی۲}{لا۱ لا۲}$ جبکہ لکھین گے ہم ان قیمتون کو اور تقسیم کرینگی ی۱ ی۲ پر تو حاصل ہوگا یہہ

ا $\frac{\text{كا}_1\ \text{لا}_2 + \text{كا}_2\ \text{لا}_1}{\text{لا}_1\ \text{لا}_2}$ + د $\frac{\text{كا}_1 + \text{كا}_2}{\text{كا}_1\ \text{كا}_2}$ − $\frac{\text{لا}^2}{\text{لا}_1\ \text{لا}_2}$ + لا د $\frac{\text{ک}}{\text{کا}_1\ \text{کا}_2}$ + $\frac{\text{ک}}{\text{کا}_1\ \text{کا}_2}$

+ ا = ۰ اس مساوات مین صرف امثال ب کا مجہول ہی واضح ہو کہ
بعض نقص مقام نقاط مفروضہ پر بہی موقوف ہین اور ایک خط مین دو
نقطون سے زیادہ نہین ہوسکتی ہین اور بالفرض اگر ایسا ہو تو تراش مخروطی
دو خط ہو جاوینگی واضح ہو کہ اسیجای پانچ نقاط الیسی ہین جیسیکہ پانچ شرطین
صورتون جبریہ مین لکہی ہوئی ہو سکتی ہین اور چار شرطین کافی ہونگی اگر خط منحنی
قریب البعنوی ہو کیونکہ ب٢ - ۴ س = ۰ سوای ایک شرط کی ہی اگر خط منحنی کا مرکز جسکا
مقام معلوم ہے تو تین اور شرطین کافی ہونگی کیونکہ ہم اس صورت مین صورت مساوات کا یہ
فرض کرینگے د٢ + ب لا د + س لا٢ + ف = ۰ اگر مقام دو قطرون
متحابلس کا معلوم ہو تو صرف دو اور شرطین کافی ہونگی — واضح ہو کہ
نیوٹن صاحب نے اپنی کتاب حساب عامہ مین ایک ترکیب بوسیلہ حرکت
متواترہ کے واسطے گذرنے ایک تراش مخروطی کے پانچ نقطوںین سے لکہی ہی —
(۳۲۵) اگر ایک خط منحنی کو جسکے قسم معلوم نہین ہے چند نقاط مفروضہ میں
گذرنا منظور ہو تو ہم اس صورت مین واسطی فایدہ کی یہہ مساوات خط منحنی کی فرض
کرینگے د = ا + ب لا + س لا٢ + د لا٣ + وغیرہ اس مساوات مین سی مقادیر
مفروضہ آسانی دو ہو سکتی ہین کیونکہ الیسی خطوط منحنی کو خطوط قریب البعنویہ کہتی ہین
(تین اجزای اول مساوات گذشتہ سی قریب البعنوی معلوم ہوگا) اور مشتمل ایک
سلسلہ الیسی جمعوان خط منحنی پر ہی جیسا کہ (۳۰۹) مین ہین اور خطوط دراثنائی سی

دریافت ہو سکتی ہین واسطے دور کرنے مقادیر مقررہ کے لاگر یا لارڈ نرصاحب
ہندسہ بالجبر فقرہ (۶۱۷) کو دیکھو —

(۳۲۶) ہمنی فقرہ (۷۹) مین بیان کیا ہی کہ بعض صورتونمین مساوات عام درجہ دویم سی خطوط مستقیم حاصل ہوتی ہین اور یہہ صورت واقع ہوگی جبکہ ایک مساوات عام سی بعد اختصار کے اجزای صحیح درجہ اول کے حاصل ہونگی پس یہانسے معلوم ہوا کہ مساوات $\bar{\text{ن}}$ درجہ کیواسطے ہمیشہ لوکس $\bar{\text{ن}}$ مرتبہ کا ہوتا ہی — اگر ایک مساوات ایسی مختصر ہوجاوے کہ اوسکے اجزای قوای کم درجہ کی رہین تو موافق ان اجزا کی لوکس اوس مساوات کا سلسلہ خطوط کا ہوگا مثلاً اگر ایک مساوات چوتھی درجہ کی ہین ایک جزدوسری درجہ کا اور دو جز پہلی درجہ کی تو لوکس اس مساوات کا ایک تراش مخروطی اور دو خطوط مستقیم ہونگی یہانسی معلوم ہوا کہ ہر ایک مساوات عام سی جسکے کئی درجہ ہون خطوط کم مرتبہ کی نکل سکتے ہین اگر ایک جز اسکا ناممکن ہو تو لوکس اس مساوات کا نقاط یا ناممکن ہوگا —

اگر مجموعہ قوای $\bar{\text{لا}}$ اور $\bar{\text{ی}}$ کا ہر ایک جز مین مساوی ہو تو لوکس خطوط مستقیم یا نقاط ہونگی کیونکہ صورت اس قسم کی مساوات کی یہہ ہوگی $\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ا}\,\text{ی}^{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ی}^{\text{ن}-۲}\,\text{لا}^{۲}$

$$\ldots\ldots + \text{ل}\,\text{لا}^{\text{ن}} = ۰ \quad \text{یا} \quad \left(\frac{\text{ی}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} + \text{ا}\left(\frac{\text{ی}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-۱} + \text{ب}\left(\frac{\text{ی}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}-۲} \ldots + \text{ل} = ۰$$

فرض کرو کہ قیمتین اس مساوات کی $\bar{\text{ط}}$ اور $\bar{\text{ق}}$ اور $\bar{\text{ک}}$ وغیرہ ہین تو اب ظاہر ہی کہ صورت مساوات کی یہہ ہوگی $\left(\frac{\text{ی}}{\text{لا}} - \text{ط}\right)\left(\frac{\text{ی}}{\text{لا}} - \text{ق}\right)\left(\frac{\text{ی}}{\text{لا}} - \text{ک}\right) \ldots\ldots\ldots = ۰$

چونکہ ہر ایک جز اسکا = ۰ تو ظاہر ہی کہ لوکس اسکا خط مستقیم ہوگا اگر قیمتین

مساوات کی نا ممکن ہون تو لوکس اسکا نقاط ہونگے۔ مثال۔

ی۲ - ۲ لا ی سٹ ط + لا۲ = ۰ لوکس اسکا دو خط مستقیم ہین جنکی مساواتین یہہ ہین

ی = لا (ا ± جس ط) / جم ط = لا سں (۴۵ ± ط/۲) تو اب یہان سی ثابت ہوتا ہی کہ

خطوط مستقیم نقطہ شروع پر سے گذرتی ہین اور محور لا سے زاویہ (۴۵ ± ط/۲)

بناتی ہین۔ (۳۴۷) چونکہ مساوات عام مین تمام

وہ مساواتین جو کہ کم مرتبہ کی اوس سے ہین ہوتی ہین اسیواسطے خاصیتین ن

مرتبہ کی خط منحنی کی اور اس سے کم مرتبہ کی خط منحنی کی ایک سی ہونگی اور وہ خواص

پائی جاوینگی چند خطوط مین جو کئی قسم کے ہون اور کم درجہ کی عام مساوات سی ہون

پس خاصیتین مرتبہ کے خط منحنی اور ایک تراش مخروطی یا ایک شکل کی جو ایک

تراش مخروطی اور ایک خط مستقیم سے مشتمل ہی ایک سی ہوگی علاوہ اسکی کم مرتبہ کی

خطوط منحنی اور زیادہ مرتبہ کے خطوط منحنی آپسمین ایک طرح کی نسبت رکھتی ہین

اسیواسطے بوسیلہ خاصیت کم مرتبہ کی خطوط کی زیادہ مرتبہ کے خطوط منحنی دریافت

ہوجاتی ہین +

(۳۴۸) بوسیلہ استعمال کرنے خواص مساواتون کے خطوط منحنی مین بہت سی

شکلین نکلتی ہین یہہ دارنگ صاحب اور پیکلارن صاحب کی کتابون سے دریافت

ہونگی ہم یہان دو باتین خط بیان کرینگی۔ اگر دو خط مستقیم قطع کرین

ایک خط منحنی ن مرتبہ کو نقاط ف ق ر وغیرہ اور س ط و وغیرہ مین

اسطرح پر کہ و ف اور ق و ر وغیرہ = ی۱ اور ی۲ اور ی۳ وغیرہ اور

اور ا س اور ا ط اور ا د وغیرہ = لا۱ اور لا۲ اور لا۳ وغیرہ تو اگر ا لا

اور ا ی اسطرح پر حرکت کرین کہ ہمیشہ متوازی اپنی رہین تو نسبت درمیان

ی۱ × ی۲ × ی۳ وغیرہ اور لا۱ × لا۲ × لا۳ وغیرہ کی مقادیر مقررہ سمی

تعبیر ہوگی فرض کرو کہ نقطہ شروع خط منحنی کا ا اور محور ا لا اور ا ی بعد تبدیل

کرنے نقطہ شروع ہوگئی ہین اور فرض کرو کہ صورت مساوات کی یہہ ہی

$$ی^ن + (ط لا + ص) ی^{ن-۱} + \ldots\ldots س لا^ن + د لا^{ن-۱} + \ldots\ldots ک لا + ل =$$

اب فرض کرو کہ ی = ۰ ∴ $س لا^ن + د لا^{ن-۱} \ldots\ldots ک لا + ل = ۰$ (۱)

لا = ۰ ∴ $ی^ن + ص ی^{ن-۱} + \ldots\ldots ک ی + ل = ۰$ (۲)

قیمتین (۱) کی ا س اور ا ط اور ا د وغیرہ ہین ∴ لا۱ ۰ لا۲ ۰ لا۳ وغیرہ

$= \frac{ل}{س}$ اور قیمتین (۲) کی ا ف اور ا ق اور ا ر وغیرہ ہین ∴

ی۱ ۰ ی۲ ۰ ی۳ وغیرہ = ل ∴ ی۱ ۰ ی۲ وغیرہ : لا۱ ۰ لا۲ ۰ لا۳ وغیرہ

:: س : ۱ اب ظاہر ہی کہ جب محور متوازی اپنی بدلینگی تو امثال $ی^ن$ اور

$لا^ن$ مین کسیطرح فرق نہین آویگا اسیواسطے نسبت مرقومہ بالا کی ہمیشہ یہی صورت

رہی گی واسطی ہر ایک متوازی

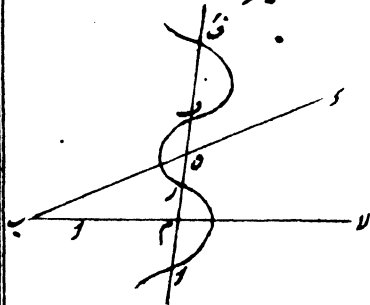
مقام ا لا اور ا ی کے

نقرہ (۲۹۲) شکل اس

شکل کی ہی — (۳۲۹) تعریف ایک قطر کی فقرہ (۷۶) مین یہہ بیان

کیا گیا کہ وہ ایک ایسا خط ہی کہ تنصیف کرتا ہی ایک سلسلہ متوازی وترونکو

اس سی بہی زیادہ عام تعریف جو کہ ہر ایک صورت مین صادق آسکتی ہی یہہ ہی
قطر ایک ایسا خط ہی جسکا اگر ایک دنتراوتار متوازیہ مین سی ملتی ہوئی خط منحنی کو
مختلف نقاط مین کہیچا جاوی تو مجموعہ اوتار ایک طرف کا مساوی دوسری طرف
کی مجموعہ کی ہوگا اور یہہ شکل مین اسطرحسی تعبیر ہوسکتا ہی ف ق + ف ن
+ وغیرہ = رن + رَن + وغیرہ اور اگر یہہ تعریف صادق آوی تمام اون خطون
پر جو کہ متوازی ف ر کی ہین تو خط ب ن کا قطر ہوگا —

دریافت کرو مساوات قطر ب ن کی فرض کرو کہ مساوات خط منحنی نسبت محدد ا لا
اور متوازی وترف ق وغیرہ کی یہہ ہی ی^ن + (ط لا + ص) ی^(ن−۱) +
+ (س لا^۲ + د لا + ی) ی^(ن−۲) + وغیرہ = ۰ فرض کرو کہ م ق = ع
اور ن ق = یَ ∴ ی = یَ + ع جبکہ لکھین یہہ قیمت مساوات گذشتہ مین تو
حاصل ہوگا یہہ یَ^ن + (ط لا + ص + ن ع) یَ^(ن−۱) + {س لا^۲ + د لا + ی + ن − ۱ ع
× ط لا + ص + ن (ن−۱)/۲ ع^۲} یَ^(ن−۲) + وغیرہ = ۰

موافق تعریف کی مجموعہ قیمتون
یَ کا مساوی صفر کی ہونا چاہئے
اور یہہ مجموعہ سر دوسری جز
مساوات گذشتہ کا ہی لیکن
اسمین اسکی علامت بدلی ہوئی ہی
∴ ط لا + ص + ن ع = ۰ یا ع = − (ط لا + ص)/ن یہی مساوات قطر ب ن

ہی ہی اور سوافق اسی دلیل کے یہہ مساوات س لا^۲ + د لا + ی + ن — ا ع × ط لا + ص + ن ن—ا/۲ ع^۲ = ۰ تراش مخروطی کی ہی جو کہ اسطرح پر کھینچی گئی ہی کہ حاصل ضرب دو دو قیمتون ی کا مساوی صفر کی ہی — اسیطرح سے بیان چوتھی جز کا ہو سکتا ہی یہہ خطوط منحنی بعض اوقات اقطار خطوط منحنی کہلاتی ہین — (۳۳۰) طریقہ دریافت کرنے مرکز ایک خط منحنی کا فقرہ (۸۱) مین بیان کیا گیا ہی لیکن عمل اوسکا مساوات عام زیادہ مرتبہ کی میں بہت بڑا ہوگا اسیواسطے ہم اب ایک مثال تیسری مرتبہ کی لکھینگی جسکے وسیلہ سے یہہ مطلب بخوبی صاف ہو جاویگا — فرض کرو کہ یہہ مساوات ہی لا ی^۲ + ی د = ی لا^۳ + ب لا^۲ + س لا + د اس مساوات سی اکثر خطوط منحنی تیسرے مرتبہ کی تعبیر ہو سکتی ہین فرض کرو کہ لا = لا + م اور ی = ی + ن اسیواسطی صورت مساوات گذشتہ کی بعد لکھنی ان قیمتون کی یہہ ہو جاویگی لا ی^۲ + ۲ ن لا ی + م ی^۲ + (۲ ن م + ی) ی — و لا^۳ — (۳ و م + ب) لا^۲ + (ن^۲ — ۳ و م^۲ — ۲ ب م — س) لا + م ن^۲ + ی ن — و م^۳ — ب م^۲ — س م — د = ۰ ظاہر ہی کہ دوسرا اور تیسرا اور چوتھا اور اخیر یا مقدار مقررہ = ۰ کی ہونا چاہئی نہین تو خط منحنی کا مرکز نہین ہوگا پس ن = ۰ اور م = ۰ اور ب = ۰ اور د = ۰ پس یہان سی معلوم ہوا کہ خط منحنی اس صورت مین مرکز رکھتا ہی اور جبکہ امثال ب اور د نہ ہونگی تو یہہ مرکز نقطہ شروع ہوگا —

باب سیزدہم

بیان تقاطع خطوط منحنی جبریه مین —

(۲۳۱) نقطه تقاطع ایک خط مستقیم اور ایک خط نؔ مرتبه کا بوسیله دور کرنے یؔ کی دو مساواتون سے دریافت هوسکتا هی یهان سی معلوم هوتا هی که وه مساوات جو اب حاصل هوگی اُسمین اجزای لاؔ کے هونگی اور یهه مساوات نؔ درجه کی هوگی اسیواسطے اُسکی قیمتین بتعداد نؔ کے هوسکتی هین اب نؔ نقاط تقاطع هونگی اور اسکی قیمتین نؔ سے کمتی بهی هوسکتی هین کیونکه بعض اسکی قیمتین آپسمین مساوی هونگی اور بعض ناممکن — واضح هو که ایک خط مستقیم ایک خط منحنی نؔ مرتبه کو نؔ نقاط مین تقاطع کرسکتا هی لیکن اسصورتین خط منحنی کو صورت عام مین فرض کرنا چاهیی نهین تو بعض نقاط متجانس اور ضعف کے نامعلوم بیضوی کی صورتین بابت جهای نامعلوم خط منحنی کے خیال کرنا چاهیی اور پس ایک خط جو که ایسی نقاط مین سی گذرنگا مساوی دو یا زیاده نقاط تقاطع کی هی —

(۲۳۲) نقاط تقاطع دو خط مؔ اور نؔ مرتبه کی بوسیله دور کرنی یؔ کی دونو مساواتون سی معلوم هوسکتی هین اب جو مساوات که حاصل هوگی وه مؔ نؔ مرتبه کی هوگی یا اسکی مؔ نؔ نقاط تقاطع هونگی یهه نقاط اکثر کم هوتی هین کیونکه تمام صحیح قیمتین اس مساوات سی لا = ۰ نقاط تقاطع حاصل نهین هونگی مثلاً اگر هم دور کرین یؔ کو ان مساواتون مین سے ی² = ۲ط لا − لا² اور ی² = ۲ط (لا − ص)

تو لا = √۲طص یهان سے ظاهر هوتا هی که همیشه ایک نقطه تقاطع حاصل هوگا موافق اس وتر العرض کے √۲طص لیکن یهه همیشه نهین هوسکتا هی کیونکه

اس صورت مین ی۲ = ۴ط (۲/۴ ط ص - ص) اسیواسطی ی نا ممکن ہی اگر ص > ۴ ط اور یہہ کبہی دو خطوط منحنی کی سی ظاہر ہوگا یہان سی ثابت ہوا کہ بعد معلوم ہونی وتر العرض کے ہمین اوتار ہر ایک خط منحنی کے موافق اسکے وتر العرض معلوم کرنے چاہئین اگر وہ صحیح نہین ہوگی تو معلوم ہوگا کہ موافق ایسی وتر العرض کی کوئی نقطہ تقاطع خط منحنی کا نہین ہو سکتا ہی - اگر یہہ دو مساواتین ہون ی۲ + ۲ لا = ۰ اور ی۲ + ۴ لا۲ - ۱۰ لا - ۱۶ = ۰ تو بعد دور کرنی ی کے وتر العرض نقطہ تقاطع کی یہہ ہونگی لا = ۴ اور لا = - ۱ یہان صرف قیمت اخیر سی نقطہ تقاطع معلوم ہو سکتا ہی -

(۳۴۳) واضح ہو کہ دریافت کرنےمین نقاط تقاطع خطوط کے ہمین آخر کو ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہی جو دو درجہ سی زیادہ کی ہوتی ہی یا ایک ایسی مساوات پیدا ہوتی ہی جسکی قیمتون سی بکلی آسانی سی معلوم نہین ہوسکتا ہی واسطی دور کرنی اس اشکال کے ایک ایسا طریقہ اکثر استعمال کیا جاتا ہی جسکے وسیلہ سی ایک خط تمام نقاط مفروضہ مین سی گذریگا اور بوسیلہ اس ترکیب کے مقام انکا دریافت ہو جاویگا - فرض کرو کہ ی = م(لا)* (۱)

* علامتون ح (لا) اور ک (لا) اور ل (لا) سی مراد جملہ لا کا ہی یعنی یہہ ایسی صورتین ہین جسمین صرف لا ہی پایا جاتا ہی لیکن یہہ اور مقدار مفروضہ کی ساتھہ ملا ہوا ہی اور ح(لا) اور م (ی) مشابہ صورتین ہین مثلاً اگر ح (لا) = ۲ط لا - لا۲ تو ح (ی) = ۲ط ی - ی۲ یا ۲ص ی - ی۲

اور ی = ک (لا) (۲) مساواتین دو خطوں کی ہین تو اب ظاہر ہی کہ نقطہ
تقاطع پر دونر اور وتر العرض ان مساواتون کی ایک ہی ہوگی یا فرض کرو
کہ ع اور ح اوتار نقطہ تقاطع کی ہین تو ح = ح (ع) اور ح = ک (ع)
اسیواسطی ح (ع) = ک (ع) اور اسکی وسیلہ سی ع اور ح معلوم ہو سکتی
ہین اور انکی قیمتین بہ آسانی تمام دریافت ہو سکتی ہین اور اگر ح = ح (ع) (۳)
اور ح = ک (ع) (۴) اب جو جمع کرنے دو مساواتون کے

۲ ح = ح (ع) + ک (ع) (۵)

اور ضرب دینے سے ح^2 = ح (ع) ک (ع) (۶)

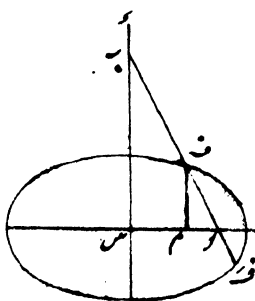
یا مساوات عام یہ ہوگی ح = ل (ح (ع) ک (ع)) (۷)

ل سی مراد ہر ایک جملہ ہی جو کہ جمع سی یا تفریق سی یا ضرب دینی وغیرہ سی
(۳) اور (۴) سی پیدا ہو سکتا ہی — اب ظاہر ہی کہ ہر ایک مساوات گذشتہ
سی نسبت درمیان ع اور ح جو کہ اوتار نقطہ (۱) اور (۲) کی ہین دریافت
ہو سکتا ہی اور جبکہ ع اور ح کو مقادیر غیر منقطع فرض کرین تو بوسیلہ اسکے
نسبت درمیان سلسلہ نقاط کی معلوم ہوگی اور ان نقاط مین سے نقطہ تقاطع مطلوب
بھی ایک نقطہ ہوگا یعنی جبکہ کھینچینگے ہم لوکس (۵) یا (۶) یا (۷) کا وہ ضرور
نقطہ تقاطع مطلوب (۱) اور (۲) مین سی گذریگا — اور ظاہر ہی کہ اگر ایک
مساواتون (۵) اور (۶) یا (۷) مین سی دایرہ یا خط مستقیم ہو تو کھینچنا
اس دایرہ یا خط مستقیم کا آسان ہوگا یہ نسبت دریافت کرنے نقطہ تقاطع کی

بوسیلہ دو دیری کسی ایک مقدار کے - واضح ہو کہ ہم اکثر نقطہ تقاطع (۱) اور (۲) کا دریافت کرتی ہین جبکہ ایک اُنین سے خط منحنی معلوم ہو بوسیلہ کھینچنے کو کس دو نشر مساوات کی اور یہہ طریقہ بہت آسان ہوگا جبکہ دوسرا خط مستقیم ہوا ب ہم چند مثالین واسطی تفصیل مرقومہ بالا کی لکھینگے —

(۳۳۴) کھینچو مماس بیضوی کا ایک نقطہ مفروضہ ق سی جو کہ اُس پر نہین ہی فرض کرو کہ اوتار ق کی م اور ن ہین اور ع اور ح اوتار نقطہ ف کی ہین جہانکہ مماس مطلوب خط منحنی سے ملتا ہی تو اب موافق فقرہ (۱۱۱) کے مساوات اوس مماس کی جو کہ نقطہ ف مین سی گذرتا ہی یہہ ہوگی ط٢ ح ی + ص٢ لا ع = ط٢ ص٢

اور چونکہ یہہ نقطہ ق مین سی بہی گذرتا ہے تو ط٢ ن ح + ص٢ م ع = ط٢ ص٢ (۱)

اور ط٢ ع٢ + ص٢ ح٢ = ط٢ ص٢ (۲) بوسیلہ (۱) اور (۲) کے مقادیر ح اور ع دریافت ہوجاوینگی قیمتین اُنکی اوتار س م اور م ف نقطہ مطلوب کی ہین

اب ظاہر ہی کہ (۱) مساوات کسی خط مستقیم کی نہین ہی لیکن اوسی طرف نسبت درمیان س م اور م ف کی معلوم ہوجاویگی لیکن اگر ہم ع اور ح کو مقادیر غیر منقطع فرض کرین تو اس مساوات سی نسبت درمیان مختلف نقاط کی جسمین سے ایک ف ہی معلوم ہوگی

معلوم ہو جاویگا اور اب مماس درمیان نقطہ (م اور ن) کی کھینچ سکتی ہین

(۴۳۵) اب فرض کرو کہ خط سیکنٹ (۴) کا ایک نقطہ مفروضہ (م اور ن) مین سی گذرتا ہی تو اس صورت مین مساوات (۴) کی یہہ صورت ہو جاویگی

(۲ط ن + د) نَ + (۲ س م + ی) مَ + د ن + ی م = ۰ (۵) اب

ظاہر ہی کہ نقطہ (م اور ن) جہاں ہی مماس کھینچی گئی تہے ایک خاص مقام پر ہون گے موافق ہر ایک خط سیکنٹ کے جو کہ نقطہ (مَ اور نَ) مین سے گذرتا ہی اگر (۵) مین مقادیر مَ اور نَ کو غیر منقطع فرض کرین تو ہمین حاصل ہوگا مساوات آیندہ نقطہ (م اور ن) کی لوکس کی

(۲ط نَ + د) ن + (۲ س مَ + ی) م + د نَ + ی مَ = ۰ اور

اس مین مَ اور نَ اوتار غیر منقطع ہین یہان سی ثابت ہوتا ہی کہ اگر ایک نقطہ سی مختلف سیکنٹ ایک دوسری درجہ کی خط کی کھینچی جاوین اور دو نقطون مین سے جہانکہ ہر ایک سیکنٹ خط منحنی کو قطع کرتا ہی ایسی مماس کھینچی جاوین جو کہ ملتی ہین ایک دوسری کو تو لوکس ان نقاط کا خط مستقیم ہوگا -

(۴۳۶) کھینچو عمود مماس ایک قریب البیضوی کا نقطہ ق (ط اور ص) مین سی جو کہ خط منحنی پر واقع نہین ہی فرض کرو کہ ی۲ = ۴ م لا مساوات خط منحنی کی ہی اور مان لو کہ ع اور ح اوتار نقطہ مطلوب کے ہین تو اب ظاہر ہی

میں کھینچا ہوا ہی) بن سکتا ہی منحنی شکل مرقومہ بالا کو اسطرح پر کھینچا ہی کہ صرف
ایک نقطہ تقاطع خط منحنی کا پیدا ہوگا تو اب یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ صرف ایک
عمود مماس نقطہ ق سی کھینچ سکتا ہی اگر خطوط منحنی نقطہ ق پر مس کریں تو دو
عمود مماس ہونگی اگر بعید البیضوی مس کری قریب البیضوی کو نیچی کی شاخ میں
تو تین عمود مماس نقطہ ق سے کھینچ سکتے ہیں یہہ صورتین مطابق مساوات (۳)
کی ہیں اور اسکی ایک صحیح قیمت حاصل ہوگی اور تین صحیح قیمتوں میں سے دو ساوی
ایک دوسری کی حاصل ہونگی اور اخیر کو تین صحیح قیمتین ایسی پیدا ہونگی جو کہ
صحیح اور غیر مساوی ہیں —

(۳۳۷) واضح ہو کہ اکثر ایسی لوگ کہ کھینچتی ہیں جو بہت آسان ہوں اسواسطے
تمام خطوط منحنی میں سے دایرہ کو اکثر ترجیح دیتی ہیں اب ہمیں صورت حال میں دیکھنا
چاہئی کہ آیا کسی ترکیب سی بوسیلہ (۱) اور (۲) کے مساوات دایرہ کی حاصل
ہوسکتی ہی یا نہیں کیونکہ موافق (۳۳۳) کی یہہ دایرہ نقاط مفروضہ عمود
مماس میں سے گذر سکتا ہی اب اگر ضرب کرینگی ہم (۱) کو ح میں تو حاصل ہوگا

ع ح٢ − (ط − ۲م) ح٢ − ۲م ص ح = ۰ یا ع × ۴م ع − (ط − ۲م)
۴م ع − ۲م ص ح = ۰ ∴ ع٢ − (ط − ۲م) ع − ص/۲ ح = ۰

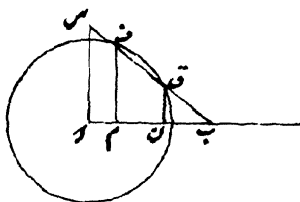
اور (۲) سی حاصل ہوگا یہہ ح٢ − ۴م ع = ۰ جمع کرنیسی یہہ ثابت ہوگا

ح٢ + ع٢ − (ط + ۲م) ع − ص/۲ ح = ۰ اور یہہ مساوات دایرہ کی ہی

جسکے وتر مرکز کے یہہ ہیں ط/۲ + م اور ص/۴ اور جسکا نصف قطر یہہ ہی

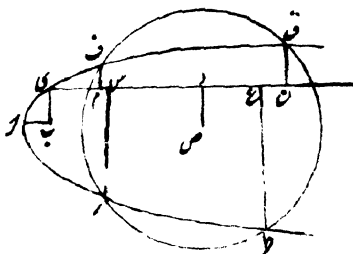
$\sqrt{(\frac{ط}{۲}+م)^۲+\frac{ص^۲}{۱۶}}$ اگرچہ یہہ دایرہ راس قریب البضوی مین سی گذرتا ہی
لیکن وہ نقطہ نقاط تقاطع مطلوب مین سے نہین ہی اور یہہ صرف پیدا ہوتا ہی بوسیلہ
ضرب دینی (۱) کے ج مین اگر ایک قریب البضوی اور مختلف دایرہ موافق مقام
ن کی کہیچی جاوین تو ہین بخوبی معلوم ہوجاویگا جیسا کہ بیشتر دریافت ہوا کہ اس
صورتمین ایک یا دو یا تین نقطہ تقاطع ہونگی یہہ طور بہت مفید ہی اسیطرح سی
عمود مماس بیضوی کا کہیچ سکتا ہی اسمین اور شکل مرقومہ مین کسی نوع کا فرق نہین
مگر اس صورت مین چار نقطہ تقاطع ہونگی —

(۳۳۸) واسطے رفع اوس اشکال کی جو کہ حل کرنی مین مساواتون فقرات گذشتہ
کی جو کہ دور کرلنے آ سی حاصل ہوئے ہین نقاط تقاطع کا استعمال کیا گیا تہا لیکن
اب ہم ایک عام قاعدہ لکہین گے اور اوسکے وسیلہ سی خطوط منحنی حل کرنے مساوات
پر موقوف رہینگی اور چونکہ دو مساواتون کے ملانی سی ایک ایسی مساوات حاصل
ہوتی ہی کہ اوسکی قیمتون سی نقطہ تقاطع اونکی لوکس کا دریافت ہوجاتا ہی
اسیطرحسی ایک مساوات کو دو مساواتون مین حل کرکے اونکی لوکس معلوم ہوسکتی
ہین اور اونکی تقاطع سی قیمتین ایک مساوات کی معلوم ہوجاوینگی —
اسی طریقہ کو بنانا مساواتون کا کہتی ہین اور اسیطریقہ کو متقدمین بیشتر
ایجاد کرنی قواعد تقریبی کے استعمال کرتی تہی اور یہہ اب بہی اکثر اوقات بہت فایدہ
مند ہوتا ہی اسواسطے اب ہم اسکو بیان کرینگی فرض کرو کہ یہہ دو مساواتین ہین
$ک + لا = ط$ (۱) اور $ک^۲ + لا^۲ = ص^۲$ (۲) اب بوسیلہ ان دونون کے

یہہ حاصل ہوگا $لا^{2} - ط\,لا + \frac{ط^{2} - ص^{2}}{2} = 0$ (۳) ظاہر ہی کہ قیمتین (۳) کی وتر العرض نقاط تقاطع (۱) اور (۲) کے لوکس کی ہین لیکن برعکس اسکے بوسیلہ کہینچنی لوکس (۱) اور (۲) کی اور باہمی وتر العرض نقطہ تقاطع کے قیمتین (۳) کی معلوم ہوسکتی ہین — اب اگر بطریق ہندسہ کی معلوم کرنا قیمتون (۳) کا مطلوب ہو تو اب حل کرو اس مساوات کو دو مساواتون (۱) اور (۲) مین اور فرض کرو کہ س ف ی ب لوکس (۱) کا ہی اور دایرہ ی ف ق (۲) کا اور ان دونون کا نقطہ شروع اور محور ایک ہی ہین کہینچو اوتار م ف اور ن ق کو تو اب ظاہر ہی کہ ا م اور ا ن قیمتین (۳) کی ہونگی — اس طریقہ کی تفصیل یہہ ہی حل کرو ایک مساوات کو دو مساواتون مین اور اب کہینچو لوکس ان دونون مساواتونکا

اور چونکہ یہہ ظاہر ہی کہ بہت سی ایسی مساواتین ہین جو اگر ملائی جاوین تو ان سے مساوات مطلوب پیدا ہوجاویگی اسیطرح بہت سی لوکس ایسی ہوسکتے ہین جنکی نقاط تقاطع سے قیمتین مطلوب حاصل ہونگی مثلاً مساوات (۳) دو مساواتون آیندہ مین حل ہوسکتی ہی $لا^{2} = ط\,ی$ اور $ط\,ی - ط\,لا + \frac{ط^{2} - ص^{2}}{2} = 0$

اب جس وقت کہ کہینچین گے ہم انکی لوکسون کو جو کہ قریب المبضوی اور خط مستقیم ہین تو انکی نقاط تقاطع سے قیمتین (۳) کی دریافت ہوجاوینگی — واضح ہو کہ قیمتین ایک مساوات کی دریافت ہوسکتی ہین بوسیلہ تقاطع ایسی دو قسم کی خطوط منحنی کے

جبکہ حاصل ضرب اونکی تونون کا مساوی قوت مساوات کی ہو تو اب ظاہر ہی کہ ایک خط مستقیم اور ایک تیسرے مرتبہ کی خط منحنی سے ایک مساوات تیسری مرتبہ کے حاصل ہوگی اور کوئی سی دو تراشون مخروطی سے سوای دو دایرون کے قیمتین چوتھے درجہ کی مساواتکی حاصل ہوسکتی ہین ۔

(۳۴۹) چونکہ مساواتین تیسرے اور چوتھی درجہ کی اکثر کتب ریاضی مین مستعمل ہوتی ہین اسیواسطے اب ہم پوری چوتھی مساوات کو حل کرینگے اور اسمین کوئی جزو محذوف نہین ہوگا $ر^۴ + ف ر^۳ + ق ر^۲ + ر ر + س = ۰$ یہان دایرہ اور قریب البیضوی کو جنکا بیان بہت آسان ہی پسند کرنا چاہیے بعد فرض کرنے مساوات قریب البیضوی کی ہم ایک خاص ترکیب سے مساوات دایرہ کی حاصل کرین سگے

فرض کرو کہ $ر + \frac{ف}{۲} ر = لا$ (۱) $\therefore ر^۲ + ف ر^۳ + \frac{ف^۲}{۴} ر^۲ = لا^۲$

لیکن $ر^۴ + ف ر^۳ + ق ر^۲ + ر ر + س = ۰$ $\therefore$ تفریق کرنیسے حاصل ہوگا

یہہ $(ق - \frac{ف^۲}{۴}) ر^۲ + لا^۲ + ر ر + س = ۰$ یا (۱) سے حاصل ہوگا یہہ

$(ق - \frac{ف^۲}{۴}) (لا - \frac{ف}{۲} ر) + لا^۲ + ر ر + س = ۰$ یا

$لا^۲ + (ق - \frac{ف^۲}{۴}) لا + (ر - \frac{ف ق}{۲} + \frac{ف^۳}{۸}) ر + س = ۰$ اور (۱) سے

$ی^۲ + \frac{ف}{۲} ی - لا = ۰$ ∴ $ی^۲ + لا^۲ + (ر + \frac{ف^۲}{۴} + \frac{ف}{۲} - \frac{ف ق}{۲}) ی$

$+ (ن - ۱ - \frac{ف^۲}{۴}) لا + س = ۰$ (۲) لوکس (۱) کا قریب البیضوی ای ن

ہی جسکے نقطہ شروع ی ہی ($ب ی = \frac{ف}{۴}$) اور اوتار متقاطع علی القوایم

ہین اور لوکس (۲) کا دایرہ ق ف ر ہی اور اوتار اسکی مرکز کی ی د اور

د ص ہین اور نصف قطر اس دایرہ کا (۲) سی دریافت ہو سکتا ہی قیمتین مساوات

کی اسطرح پرکھینچینگے ہین کہ ف م اور ق ن مثبت اور ر س اور ط ع منفی ہین

اگر ایک دایرہ ایک قریب البیضوی سسی مس کری تو دو قیمتین آپسمین مساوی

ہونگی اور صورتین تین یا چار مساوی قیمتون کی بوسیلہ قواعد تماس کے معلوم ہو سکتی

ہین اور چونکہ دو قیمتین واسطے اختصار کرنے مساوات کی طرف درجہ دویم کی کافی ہین

اسیواسطی ہمین یہان ان صور تونکا ذکر کرنا کچھہ ضرور نہین ہے اگر صرف دو نقاط

تقاطع ہون تو دو قیمتین ناممکن ہونگی اور اگر کوئی نقطہ تقاطع کا نہو تو چارون

قیمتین ناممکن ہونگی —

(۳۴۰) بوسیلہ دور کرنے جز دویم مساوات کے عمل مین بہت آسانی ہو جاتی ہے

مثلاً واسطے حاصل کرنی قیمتون مساوات کی فرض کرو کہ یہہ ایک مساوات ہی

$لا^۴ + ۸ لا^۳ + ۲۴ لا^۲ + ۳۲ لا + ۱۶ = ۰$ (۱) فرض کرو کہ $لا = ی - ۲$

تو صورت مساوات مرقومہ بالا کی یہہ ہوگی $ی^۴ - ی^۲ + ۴ ی - ۴ = ۰$ (۲)

اب فرض کرو کہ $ی^۲ = لا$ (۳) اسیواسطے $لا^۲ - لا + ۴ ی - ۴ = ۰$

∴ جمع کرنے سی $ی^۲ + لا^۲ + ۴ ی - ۲ لا - ۴ = ۰$

یا (ی + ۲)^۲ + (لا − ۱)^۲ = ۹ (۴) فرض کرو کہ ق ا ر ی قریب

البیضوی (۳) ہی جسکا وتر آتشی

ایک ہی اور اوتار مرکز ص دایرہ

(۴) کی ہیہ ہین ا ب = ۱ اور

ب ص = −۲ اور نصف قطر = ۳

جبکہ کہینچینگے ہم دایرہ کو تو اوتار ب ف اور ق ن قیمتین (۲) کی ہونگی جبکہ پیمایش

کرینگی ہم ان قیمتون کو تو حاصل ہوگا یہہ ب ف = ۱ اور ق ن = −۲

یہانسی ثابت ہوا کہ ممکن قیمتین (۲) کی ۱ اور −۲ ہین اسیواسطے (۱) کی

−۱ اور −۲ ہونگی ۔

(۱۴۳) بنانا تیسرے مساوات کا چوتہی مساوات پر موقوف ہی پہلے دور کرلو

دوسری جزر مساوات کو اگر ضرورت پڑی اور ضرب کرو اوس مساوات کو جوکہ اب

حاصل ہوئی ہے ح = ۰ ی مین اور اب عمل کرو موافق مرقومہ بالا کے ۔ واضح ہو

کہ دایرہ ہمیشہ راس قریب البیضوی مین سے گذریگا اور ان دونون کے تقاطع سے

حاصل ہوگی قیمت ی = ۰ جوکہ بوسیلہ ضرب کرنیکی داخل کیا گیا تہا اور اسی

طرح کی تبدیلی مساوات مفروض مین نہین ہوگی بوسیلہ گذرنے دایرہ کی راس

قریب البیضوی مین بہت فایدہ ہوتا ہی کیونکہ اس صورت مین وہ اشکال واقع نہوگا جو

مثالون گذشتہ مین ہوا تہا یعنی اس صورت مین حساب نصف قطر مین کسور اعشاریہ

کا کام نہین پڑتا ہی ۔ مثال (۱) لا^۳ − ۶ لا^۲ − لا + ۶ = ۰ فرض کرو کہ

لا = ی + ۲ ∴ ی³ – ۱۳ ی² – ۱۲ ی = ۰ اب فرض کرو کہ

ی² – لا = ۰ (۱) ∴ لا² – ۱۳ لا – ۱۲ ی = ۰

∴ ی² – ۱۲ ی + لا² – ۱۲ لا = ۰

یا (ی – ۶)² + (لا – ۶)² = ۷۲ (۲)

تین قیمتین ی کی شکل سے یہہ حاصل ہوتی ہین ۴ اور –۱ اور –۳

اسیواسطے قیمتین لا کی یہہ ہونگی ۹ اور ۱ اور ۱ مثال (۲) ۲ ی³ + ۶ ی – ۵ = ۰ اسکی ایک قیمت ممکن ہی جو کہ تقریباً = ۱ ۱/۲ مثال (۳) ۲ ی³ – ۳ ی + ۱ = ۰ واضح ہو کہ دریافت کرنین لوکس ان مساواتونکی اسیطرح مشکل نہین ہو سکتی ہی جبکہ ہم ایک ایسی قریب البیضوی جسکے وتر آلتی ایک ہی بہت صحیح طور سی کہینچین اور یہہ ترکیب فایدہ مند اکثر مساواتونمین ہوگی –

(۳۴۲) دریافت کرو دو وسط فی النسبت درمیان دو خط معلوم ط اور ص کے فرض کرو کہ ی اور لا دو خط مطلوب ہین اسیواسطی

ط : ی :: ی : لا ∴ ی² = ط لا (۱)

∴ ی : لا :: لا : ص ∴ لا² = ص ی (۲)

∴ ی⁴ = ط² لا² = ط² ص ی یا ی³ – ط² ص = ۰ لیکن جمع کرنے (۱) اور (۲) سے یہہ حاصل ہوگا ی² – ص ی + لا² – ط لا = ۰

یا (ی – ص/۲)² + (لا – ط/۲)² = (ط² + ص²)/۴ (۳)

(۲) (۱)

فرض کرو کہ ف ا ق قریب البیضوی (۱) ہی تو اب تقاطع کرنے دایرہ (۳) سے
م ف اور ا م دو وسط فی النسبت مطلوب دریافت ہو جاوینگے اور قیمتین مساوات
ط ۔ ط ص = ۰ ناممکن ہین ۔ یہہ شکل متقدمین ریاضی دانون مین بہت مشہور
تہی ۔ منیخمی نے جسنے افلاطون کے مدرسہ مین تعلیم پائی تہی اس شکل کو حل کیا تہا
اسکی ترکیب واسطے حل کرنے اس شکل کے بہت آسان ہی اسواسطے اسکو ہم یہان بیان
کرینگے ۔ سمجہو ایک ایسا قریب البیضوی ف ا ق شکل (۲) مین جسکا وتر آتشی ط
ہی اور کہینچو قریب البیضوی ف ا ر ۔ ا ر پر جو کہ ا لا پر عمود ہی اور جسکا وتر آتشی ص ہے
تو اب سطح ط اور ا م یا ا ط اور ن م مساوی مربع م ف کی ہی تو اب ظاہر ہی
کہ ط اور م ف اور ن ف مقادیر متناسب ہین اور سطح ص اور ا ن یا ص
اور م ف مساوی مربع ن ف کی ہی ∴ م ف اور ن ف اور ص مقادیر
متناسب ہونگی یہان سے حاصل ہوگی یہہ نسبتین ط : م ف :: م ف : ن ف
اور م ف : ن ف :: ن ف : ص ∴ ط اور م ف اور ن ف اور ص
متناسب ہین ۔ منیخمی نے ایک اور طریقہ جو کہ قریب البیضوی اور بعید البیضوی
پر موقوف ہے واسطے حل کرنے اس شکل کے لکہا ہی ۔
ش ش ش

(۳۴۳) دریافت کرو ایک مکعب جو کہ دو چند ایک مکعب مفروض کا ہو ـ فرض کرو کہ ط ایک ضلع ایک مکعب مفروض کا ہی اسیواسطے وہ مساوات جسکا حل کرنا ہے یہہ ہوگی

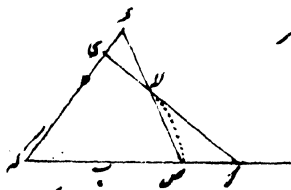
$د^۳ = ۲ط^۳$ یا $د^۳ - ۲ط^۳ = ۰$ فرض کرو کہ $د^۲ = ط لا$ (۱)

∴ $ط^۲ لا^۲ - ۲ط^۳ د = ۰$ یا $لا^۲ - ۲ط د = ۰$ اسیواسطے جمع کرنیسے یہہ حاصل ہوگا

$د^۲ - ۲ط د + لا^۲ - ط لا = ۰$ (۲) جبکہ کھینچینگے ہم لوکس (۱) اور (۲) کا تو وتر م ف جو کہ انکی تقاطع سے پیدا ہوگا ایک ضلع مکعب مطلوب کا ہوگا ـ اس شکل کی ثابت کرنے مین مثل شکل مرقومہ بالا کی مہندسان متقدمین نے بڑی کوشش کی تہی اونکو معلوم ہوا کہ یہہ شکل پہلی شکل پر موقوف ہی کیونکہ اگر ص = ۲ط تواب وہ مساواتین جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہونگی ایکسی ہونگی اسیطرح سے ایک ایسا مکعب دریافت ہوسکتا ہی جو کہ ایک مکعب مفروض سے م گنا بڑا ہوگا ـ

(۳۴۴) واضح ہو کہ ہم اسیطرح سے بہت سی وسط فی النسبت دو مقداروں مفروض کی فرض کرسکتے ہین کیونکہ اگر د مقدار اول وسط فی النسبت مین سے ہو تو اوسکی سلسلہ آیندہ پیدا ہوگا ط اور د اور $\frac{د^۲}{ط}$ اور $\frac{د^۳}{ط^۲}$ و $\frac{د^۴}{ط^۳}$ وغیرہ فرض کرو کہ چار وسط فی النسبت ہین اور اگر چھٹا جز سلسلہ کا ص ہو تو $\frac{د^۵}{ط^۴} = ص$ یا $د^۵ - ط^۴ ص = ۰$

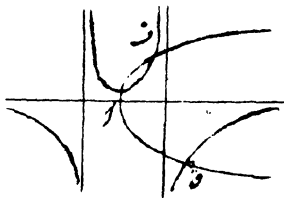
اب بناؤ ایک قریب البیضوی جسکی مساوات یہہ ہی $د^۲ = ط لا$ اور کھینچو لوکس اس مساوات کا $د لا^۲ - ط^۲ ص = ۰$ ظاہر ہی کہ لوکس اسکا شاخین بعید البیضوی کی ہر ایک زاویہ د ط لا اور د ط لا مین ہونگی تواب اوتار موافق صحیح قیمتون کے دریافت ہوسکتے ہین ـ

(۳۴۵) واضح ہو کہ نیوٹن صاحب نے مساواتون کو بوسیلہ کن کواڈ ملومیدیز
کی بنایا تہا اور اوسنے یہہ بہی بیان کیا تہا کہ مساواتون کے بنانی مین اور خطوط
منحنی کو استعمال کرنا چاہئی جو بہت آسان ہون اسیواسطی اسنی کن کواڈ کا استعمال
کیا کیونکہ صرف یہی خط بعد دایرہ کی بہت آسان ہی اور اسکی واسطی اسکی کہینچنی فقرہ
(۳۱۲) مین لکہا گیا ہی مثال آیندہ ایک مثال اون مثالون مین سی ہی جو کہ
نیوٹن صاحب کی کتاب یونی ورسل ارتہمٹک* مین لکہی ہین — فرض کرو کہ یہہ مساوات ہی
لا³ + ف لا + ر = ۰ کہینچو ایک خط مستقیم کر ا جسکا طول = ن ہو کہ مین سی
قطع کرو کر ب = ق/ن² اور تنصیف کرو ب ا کو نقطہ ص پر کہ کو مرکز کر کر اور
کہینچو ایک دایرہ جسکا نصف قطر کر ص ہو اور
کہینچو اندر اس دایرہ کی خط ص لا = ن/۲
اب ملاو خط ی لا کا اور کہینچو ص لا اور
ی لا کو امداد بناو خط ی د کا مساوی ص ا کے اسطرح پر کہ اگر خط ی د کو
کہینچین تو وہ نقطہ کہ مین سے گذری تو اب بوسیلہ ہندسہ کی ثابت ہو سکتا ہی کہ
مساوات واسطی طول لا د کی یہہ ہی لا³ + ف لا + ر = ۰ یعنی لا د قیمت اس
مساوات کی ہی واضح ہو کہ خط د ی درمیان ص لا اور ی لا کے بوسیلہ کن کواڈ
کی کہینچ سکتا ہی فرض کرو کہ نقطہ کہ کا قطب ہے اور ی لا ی قاعدہ ہی اور ص ا
خط متحرک ہی تو اب بوسیلہ اس کن کواڈ کے نقطہ د کا اسطرح سی معلوم ہو سکتا ہی
کہ ی د = ا ص —

* یہہ کتاب اصول عامہ حساب مین ہی

(٢٤٦) واضح ہو کہ زیادہ مرتبہ کی مساوات مین ترکیب گذشتہ فایدہ مند نہین ہوگی کیونکہ ان صورتون مین خطوط منحنی درستی سے نہین کہیچ سکتے ہین اس ترکیب سے اسقدر فایدہ ہوتا ہی کہ اوس سے چند ناممکن قیمتین ایک مساوات کی معلوم ہو سکتی ہین اور اسکے وسیلہ سے ہم تقریباً مقام نقاط تقاطع خط منحنی کا دریافت کر سکتی ہین لیکن مقام نقاط تقاطع درستی سے معلوم نہین ہوگا —

مثال $ی^٥ - ٣ی + ١ = ٠$ فرض کرو کہ $ی^٢ = لا$ (١) ∴ $ی لا^٢ - ٣ی + ١ = ٠$ (٢)

یا $ی = \frac{١}{٣ - لا^٢}$ لوکس (١) کا قرب البیضوی فرق ہی

اور لوکس (٢) کا خط منحنی تیسرے مرتبہ کا ہوگا اور ظاہر ہی کہ تین نقاط تقاطع ہونگی اسیواسطے تین ممکن قیمتین ہونگی دو مثبت اور ایک منفی —

(٢٤٧) واضح ہو کہ استعمال کرنا خطوط منحنی کا واسطے معلوم کرنے قیمتون کی بالکل صحیح نہین ہوتا ہی ہمنی فقرہ (٢٣٢) مین بیان کیا ہی کہ بعض اوقات صحیح قیمتین مطابق ناممکن نقاط تقاطع کی ہوتی ہین اسیطرح پر ناممکن نقاط تقاطع اپنے نقاط تقاطع سے یہہ ثابت نہین ہوتا ہی کہ صحیح قیمتین نہین ہین واسطے ثبوت اس مطلب کے فرض کرو کہ یہہ ایک مساوات ہی $لا^٢ + ١٥لا + ١٤ = ٠$ فرض کرو $ی^٢ = لا^٣$ (١) اسیواسطے $لا ی^٢ + ١٥لا + ١٤ = ٠$ (٢) یہانسے ظاہر ہوتا ہی کہ اگرچہ لوکس (١) اور (٢) کی آپس مین تقاطع نہین کرتا ہی

لیکن پھر بھی دو ممکن قیمتین ہین تو اب ظاہر ہی کہ غلطی خط منحنی (۱) کی فرض کرنے مین تھی جو کہ صرف مقام مثبت مین واقع ہی حال آنکہ صورت مساوات سی معلوم ہوتا ہی کہ اسکی منفی قیمتین ہین اور جبکہ لوکس قریب البعینوی اور دایرہ کو فرض کرین تو قیمتین مساوات کی یہہ حاصل ہونگی ‎-۱‎ اور ‎-۲‎ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ واسطی دریافت کرنے قیمتون کے دو سی زیادہ خطوط منحنی کا امتحان کرنا چاہئے

باب چہاردہم

خطوط منحنی غیر جبریہ کے بیان مین

(۲۴۸) فقرہ (۲۴) مین بیان کیا گیا ہی کہ اون مساواتون کو جنکی صورت محدود اور صحیح صورت جبریہ نہو تو انکو غیر جبریہ کہتی ہین اس قسم کی یہہ مساواتین ہین $y=$ جیب x اور $y=$ ظل x باب دوازدہم مین ہمنی مساواتین خطوط منحنی کی بوسیلہ بعض خواص ہندسہ کی دریافت کئی ہین لیکن بعضے خطوط منحنی ایسی ہین جو کہ بوسیلہ جبر مقابلہ کے تعبیر نہین ہوسکتی ہین یعنے وہ مساواتین مفادیہ علم مثلث اور لوگارثم پر موقوف ہین اسیواسطی انکو مساواتین غیر جبریہ کہتی ہین ۔ ہم یہان دریافت کرینگی مساواتین اس قسم کی اور ان خطوط منحنی کی جو کہ بہت مشہور ہین اور بعض مشہور خاصیتین انکی بھی یہان لکھینگے لیکن وہ بخوبی حساب جزئیات وکلیات سی دریافت ہوسکتی ہین ۔

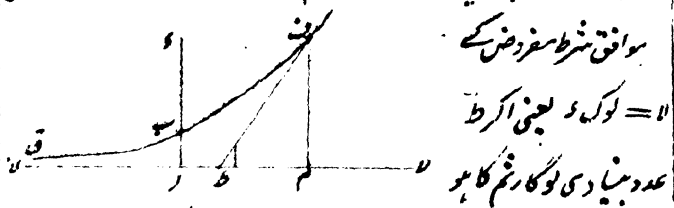
(۲۴۹) اس قسم کی خطوط منحنی مین بعضی ایسی خطوط منحنی ہین جیسیکہ کارڈی آڈ جنکے مساواتونکو اجزای محدود جبریہ مین لکھ سکتے ہین لیکن یہہ خطوط منحنی

بعض صورتیں خاص غیر جبریہ کی ہیں جو کہ باقی تمام خطوط منحنی سُت بغیر لوگارتمی
کے جیسا نہیں ہوسکتے ہیں بعضی خطوط یعنی غیر جبریہ کو خطوط منحنی آداتی کہتی
ہیں کیونکہ وہ حرکت متواتر سے بن سکتے ہیں لیکن یہہ تمیز غلط معلوم ہوتی ہی
کیونکہ تمام خطوط اسیطور سی کہے سکتے ہیں ۔

بیان خطوط منحنی لوگارتمی کا

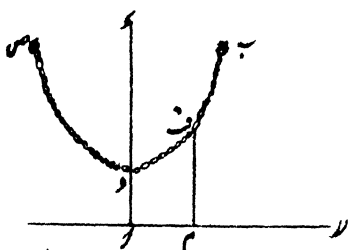
(۳۵۱) خط منحنی ق ب ف کو جسکا وتر العرض ن م لوگارتم وتر م ف کا ہی خط منحنی لوگارتمی کہتے ہیں ۔ فرض کرو ام = لا اور م ف = ی اسیواسطی موافق شرط مفروض کے

لا = لوگ ی یعنی اگر ط

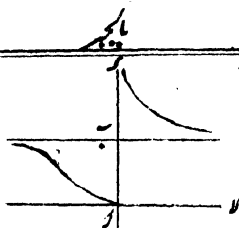
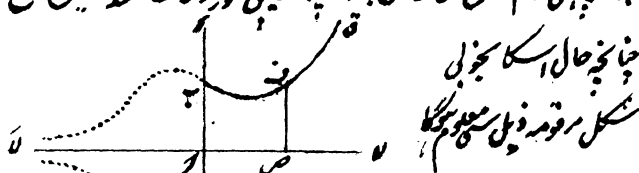
عدد بنیادی لوگارتم کا ہو

تو ی = ط^لا واسطی دریافت کرنے مقام خط یعنی کے فرض کرو کہ لا = ۰

∴ ی = ط^۰ = ۱ اب جبکہ لا زیادہ ہوتا جاویگا ۰ سی ∞ تو ی زیادہ ہونا شروع کریگا ۱ سی ∞ اور جبکہ -لا زیادہ ہوتا جاویگا ∞ تو ی گھٹتا جاویگا ۱ سے صفر تک ا ر مین سے قطع کرو ا ب = ۱ واحد خطی کے تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی داہنی طرف ا ب کی پہیلتا ہی اور اسطرف محور لا سی دور ہوتا جاتا ہی اور بائیں طرف سی اوسکی پاس آتا جاتا ہی اور یہہ اسیواسطے خط متسفر الملاقی ہی ۔ اس خط منحنی کو جیمس گریگری صاحب نی ایجاد کیا تہا اور ہائگنز صاحب نے دریافت کیا کہ اگر مماس ف ط نوک سے نقطہ ط پر ملے تو م ط مساوی ایک مقدار

مقررہ $\left(\frac{۱}{لوک\ ط}\right)$ کی ہی اور اوسنی یہہ بہی معلوم کیا کہ سطح م ف ں لا جو کہ لانہایت
پہیلتا ہی طرف لا کے محدود ہی اور یہہ مساوی دوچند مثلث ف م ط کی ہی اور وہ جسم
جو کہ گردش اس سطح سی گرد لالا کے پیدا ہوگا مساوی $۱\frac{۱}{۲}$ گنی اوس مخروط کی
ہی جو کہ پہرنی مثلث ف ط م کی سی گرد لالا کے پیدا ہوگا اگرچہ محدود ہونا اس جسم
اور سطح کا عجیب معلوم ہوتا ہی مگر وہ اشخاص کہ جو جمع کر سکتے ہین ایسی سلسلون کو
جسکے اجزاء لانہایت تک گہٹتی جاتی ہین اسمین متعجب ہونگی اگر صورت مساوات کی
یہہ ہو $ی = ط^{لا}$ تو اسصورتین بہی خط لوگارثمی حاصل ہوگا لیکن طرف مقابل مین
نسبت ی کی واقع ہوگا یعنی محور ی کی منفی سمت کی طرف واقع ہوگا —

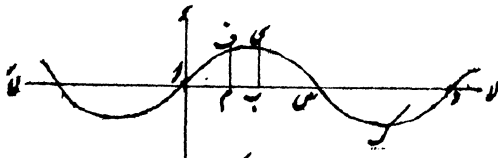
(۲۵۱) مساوات خط قطیری کی جو کہ لٹکانی ایک زنجیر یا رستی کی سی درمیان
دو نقاط ب اور ص کے پیدا ہوتا ہی یہہ ہی $ی = \frac{۱}{۲}\left(ی^{لا} + ی^{-لا}\right)$ اسمین

او م = لا اور م ف = ی
اور ا د = ۱ یہہ مساوات
بوسیلہ آسان قواعد ہندسہ
بالجبر کے حاصل نہین ہو سکتی ہے

لیکن بوسیلہ اس مساوات کی مقام خط منحنی کا دریافت ہوسکتا ہی جمع کرنی اوتار
اون دو لوگارثمی خطوط کی سی جنکی مساواتین یہہ ہین $ی = ی^{لا}$ اور $ی = ی^{-لا}$

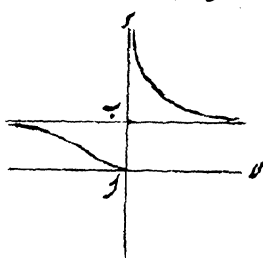
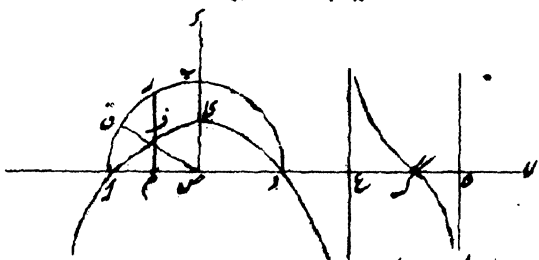
(۲۵۲) دریافت کرو لوکس اس مساوات کا $ی = ط^{\frac{۱}{لا}}$

(۳۵۳) دریافت کرو اوس خط منحنی کو جسکی مساوات یہہ ہی ی = لالا فرض کرو لا = ۰ تو ی = ۱ اور فرض کرو کہ لا = ۱ تو ی = ۱ درمیان لا = ۰ اور لا = ۱ کی ہمین قیمت ی کی عدد ۱ سے کم حاصل ہوگی اور اگر لا ۱ سے زیادہ ہوتا جاوی تو ی بہی لانہایت بڑہیگا یہان سے معلوم ہوا کہ اگر اب = ۱ اور رص = ۱ تو حاصل ہوگی ہمین شاخ ب ف ق کی مطابق مثبت قیمتون لا کی فرض کرو کہ لا منفی ہی تو ی = (-لا)^-لا = (-لا)^لا اب اگر فرض کرین متواتر تین قیمتین ۲ اور ۲ ۱/۲ اور ۳ لا کی تو ظاہر ہی کہ ی مثبت یا ناممکن یا منفی ہوگا یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی مشتمل ہونا چاہیی تمام اون نقاط سے جو کہ اوپر اور نیچی محور لا کے علحدہ علحدہ واقع ہونگی چنانچہ حال اسکا بخوبی شکل مرقومہ ذیل سے معلوم ہوگا

بیان خط منحنی جیب مستویونکا

(۳۵۴) خط منحنی ا ف ی س کو جسکی اوتار م ف اور ب ی جیب مستوی وتر العرض ا م اور ا ب کی ہین خط منحنی جیب مستویونکا کہتی ہین — فرض کرو کہ ا م = لا اور م ف = ی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات اس خط منحنی کی یہہ ہی ی = جس لا

یا ی = ر جیب $\frac{لا}{ر}$ قطع کرو ی ب = $\frac{کہ ر}{۲}$ اور ی س = کہ ر اعد

	۱	۲	۳	۴	۵
قیمتیں لا کی	۰	$\frac{کہ ر}{۲}$	کہ ر	$\frac{۳ کہ ر}{۲}$	۲ کہ ر
قیمتیں ی کی	۰	ر	۰	− ر	۰

و د = ۲ کہ ر تو (۱) سے معلوم ہوگا کہ خط منحنی کاٹتا ہے محور کو نقطہ ا پر اور (۲) سے اگر ب ی = ر تو خط منحنی نقطہ ی میں سے گذریگا اور یہہ نقطہ سب نقاط خط منحنی سے بلند ہے کیونکہ درمیان (۱) اور (۲) کی ی زیادہ ہوتا ہے لیکن وہ درمیان (۲) اور (۳) کی گھٹتا ہے اور خط منحنی محور کو پہر س پر کاٹتا ہے اور س سے ی منفی ہوتا جاتا ہے جب تک وہ مساوی − ر کی ہوجاتا ہے اور اس جابے گھٹنا شروع کرتا ہے جب تک وہ صفر ہوجاتا ہے تو اب موافق اسکی ایک دوسری شاخ س ک د کی مساوی اور مشابہ پہلی شاخ کے حاصل ہوگی پہر ی د کی ی اسیطور بڑہتا ہے اور خط منحنی اسیطرحسے لانہایت پہیلتا ہے اور چونکہ جس (− لا) = − جس لا تو یہانسے معلوم ہوتا ہے کہ بائیں طرف ا کی بہی خط منحنی پہیلتا ہے موافق پہلے کی — اسیطرحسے خطوط منحنی جیب التمام اور جیب معکوس اور مماس وغیرہ کی معلوم ہوسکتی ہیں اگر

اوتار خط منحنی جیب ستو یونکو زیادہ یا کم کرین موافق ایک خاص نسبت کی تو وہ مساوات
جو کہ موافق اس غرض کے حاصل ہوگی یہہ ہی (ی = م جیب لا) اور یہہ خط منحنی بوسیلہ
حرکت تارون موسیقی کے پیدا ہوگا اسواسطی اس خط منحنی کو خط منحنی ہارمونک یا
یکسان کہتے ہین —

(۳۵۵) شکل آئندہ متعلق ہی اوس خط منحنی سے جسکی مساوات یہہ ہی ی = لا مس لا
ایسی خطوط منحنی فایدہ مند ہوتی ہین واسطے معلوم کرنے قیمتون مساوات کی مثلا
لا مس لا = ط اگر کہینچین ہم خط منحنی کو اور قطع کرین آر مین سے ر ب = ط اور
نقطہ ب سی کہینچو ایک خط متوازی
ور لا کے تو اب ظاہر ہی کہ اوتار نقاط
تقاطع اس خط مستقیم اور خط منحنی کے
قیمتین ء یعنی لا مس لا کی ہونگی —

کواڈریٹرکس کی بیان مین

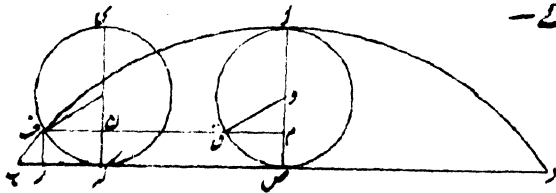
(۳۵۶) فرض کرو کہ ص مرکز دایرہ ر ق ب د کا ہی اور فرض کرو کہ وتر م ر سرکتا ہی
نقطہ ر سی ب ص تک حرکت ایکسان سے جبکہ نصف قطر ص ق حرکت کرتا ہی گرد نقطہ

ص سکے تو اب نقطہ تقاطع ف خط م ر اور ص ف کا خط منحنی کہ اوپر لس بتا رہیگا فرض
کرو کہ ا نقطہ شروع اور ا م = لا اور م ف = ی اور ا ص = نق اور زاویہ
و ص ق = ر تو اب ظاہر ہی کہ ا م : ا ص :: ا ق : ا ب یعنی لا : ل :: نق ر
:: کہ ر ل ∴ ر = کہ لا / ۲ نق لیکن م ف = م ص مس ر ∴ ی = (ل - لا) مس کہ لا / ۲ نق
اور یہی مساوات خط منحنی کی ہی جبکہ لا = ۰ تو ی = ۰ خط منحنی نقطہ ا سے گذرتا
اور جبکہ لا ا سے نق تک زیادہ ہوتا جاتا تو ی بہی بڑہتا ہی کیونکہ مماس جلدی زیادہ
ہوتا ہی بہ نسبت زاویہ کے اور جب لا = نق = ا ص تو ی = ∞ اور قیمت اسکی
بوسیلہ حساب جزئیات کی ۲ نق / کہ دریافت ہوگی یہاں سے معلوم ہوا کہ اگر ص ی = ۲ نق / کہ
تو خط منحنی نقطہ ی سے گذرتا ہی اور جبکہ لا زیادہ ہوتا ہی نق سے تو مقدار مماس کی
کم ہوتی ہی اور علامت اوسکی منفی اور اسیطرح سے علامت (ل - لا) منفی ہوتی ہی
∴ ی مثبت ہوگا اور یہہ گہٹتا جاتا ہی اور جبکہ لا = ۲ نق = ا د تو ی مساوی ۰ کی
ہو جاتا ہی اور جبکہ لا زیادہ ۲ نق سے ہوتا ہی تو مقدار مماس کی مثبت ہوتی ہی اسیواسطے
ی منفی ہی اور یہہ زیادہ بہی ہوتا ہی اور جبکہ لا = ۳ نق تو مماس = ∞ ∴
ی = - ∞ اسکی وسیلے سے حاصل ہوتا ہی ایک خط متنفر الملاقات جو کہ نقطہ شروع
سے گذرتا ہی اور جبکہ لا ۳ نق سے زیادہ ہوتا ہی تو مماس کم ہوتا جاتا ہی اور علامت اسکی
منفی اسیواسطے ی مثبت ہی اور جب لا = ۴ نق تو ی = ۰ اور جب لا = ۵ نق
تو ی = - ∞ اور درمیان لا = ۴ نق اور ۵ نق سکے ی منفی ہی اسیواسطے ہمیں
حاصل ہوگی ایک شاخ خط منحنی کی درمیان خطوط متنفر الملاقات کی جو کہ تقاطع اور

ہ میں کہیچی جاوین گی اسیطرح سے حاصل ہونگی اور شاخین خط منحنی کی جیکہ آگی اس سے بڑہنگی
اور شاخین خط منحنی کی بائین طرف ا کی ویسی ہین جیسیکہ داہنی طرف د کی ہین
غالب ہی کہ اس خط منحنی کو ایک یونانی ریاضی دان نے جسکا نام ہینپیوس تہا ایجاد
کیا ہو یہہ ریاضی دان سقراط کی زمانہ مین موجود تہا یہہ شخص تثلیث زاویہ کی کیا چاہتا تہا
بلکہ یہہ شخص ایک زاویہ کو کئی مساوی حصون مین تقسیم کرنا چاہتا تہا اسیواسطے اسنی
اس خط منحنی کو ایجاد کیا اور یہہ فی الحقیقت ہوسکتا ہی اگر خط منحنی درستی سے کہیچا جاوے
مثلاً اگر تثلیث کرنی زاویہ اص ق کی منظور ہو تو کہیچو کواڈرٹرکس اور وتر م ق
کو اور تثلیث کرو خط ام کی نقاط ن اور و پر اور کہیچو اوتارن س اور وط
کواڈرٹرکس کے تو اس مساوات سی ر = کہ لا / ۲ ل کی دریافت ہو گا کہ خطوط ص س
اور ص ط تثلیث زاویہ اص ق کے کرتی ہین اس خط منحنی کی وسیلہ سے ڈینوسٹریس
سطح دایرہ کی معلوم کی تہی اسطرح پر کہ فرض کرو کہ نقطہ ی کا معلوم ہوسکتا ہی تو ہمین
قیمت کر کی بوسیلہ اس مساوات کی ص ی = ۲ ل / کہ دریافت ہو جاوگی تو اب
ظاہر ہی کہ نسبت درمیان محیط اور قطر دایرہ کی معلوم ہو جاویگی — اسلیے اسکا تشبیح ہوا
ایک اور قسم کا کواڈرٹرکس ہے جسکو چرہاسن صاحب نے ایجاد کیا تہا اور یہہ
اسطرحسی ہوسکتا ہی کہیچو دو خط نقاط ن اور م مین سے متوازی اص اور ب ص
کی تو لوکس انکی نقطہ تقاطع کا خط منحنی مذکور ہو گا اور اسکی مساوات یہہ ہو گی

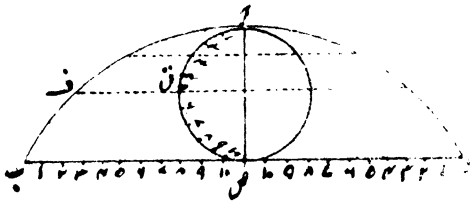
$$ی = لی جم \left(\frac{کہ}{۲} - ر\right) = لو جس ر = لو جس \frac{کہ لا}{۲ لی}$$

خطوط وضعی کی بیان مین

(۳۰۷) اگر ایک دایرہ ی ف کہ کا لڑکے ایک سطح مفروض مین خط مفروض ب ص د پر تو وہ نقطہ محیط کا جو کہ ابتدای حرکت مین نقطہ ب پر تھا گردش دایرہ سے ایک خط منحنی ب ف ا د کا بناویگا جسکو خط وضعی کہتے ہین یہہ خط منحنی ایک کیل گاڑی کے پہیہ کی جبکہ گاڑی کسی سڑک پر حرکت کرتی ہو اوسی بناتی ہی اسیواسطی دایرہ ی ف کہ کو جو کہ اس خط منحنی کو بناتا ہی پہیہ کہتی ہین خط د ب کو جسپر سے دایرہ ایک گردش مین گذرتا ہی قاعدہ خط وضعی کا کہتی ہین اگر ا ی ص وہ مقام بنانی والی دایرہ کا ہو جو کہ بیچ مین اوسکی رستہ سے کی ہی تو ا کو راس اور ا ص کو محور خط منحنی کا کہتی ہین اور بنانی اس خط منحنی سے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ خط ب د مساوی محیط دایرہ کی ہی اور ب ص مساوی نصف محیط دایرہ کی ہی اور اگر ی ف کہ مقام اس دایرہ کا فرض کیا جاوے اور نقطہ ف وہ نقطہ جسپی خط منحنی بنتا ہی اور جو نکہ ہر ایک نقطہ قوس ف کہ کا ب ف پر منطبق ہوا ہی تو خط ب ف = قوس ف کہ اور کہ ص = قوس ی ف یا یعنی ا ق کے —

کھینچو ف ن ق م متوازی قاعدہ ب د کے اور فرض کرو کہ ا نقطہ شروع محور ہی متقاطع علی القوایم کا ہی اور ا ص محور لا کا ہی بعد و مرکز دایرہ ا ق ص کا ہی اور فرض کرو کہ ا م = لا اور ا و = ط اور م ف = ی اور زاویہ ا و ق = س

تو اب ظاہر ہی کہ بسبب مناسبت مقام دو دایرونکی ف ن = ق م اور
ن ف = ن م ∴ م ف = ق ف + م ق = ن م + ق م = کس +
ق م = قوس ا ق + ق م یعنے ی = ط ر + ط جیب ر = ط (ر + جیب ر) (۱)
اور لا = ط − ط جم ر = ط جیب معکوس ر = ط جع ر (۲) تو اب ظاہر
کہ وہ مساوات جسمین صرف لا اور ی پایا جاوے بوسیلہ دور کرنے ر مساواتون
(۱) اور (۲) مین سے حاصل ہوگی جم ر = (ط − لا)/ط ∴ جیب ر =
√(۲ط لا − لا^۲)/ط اور ی = ط ر + ط جیب ر = ط جم^-۱ ((ط − لا)/ط) + √(۲ط لا − لا^۲)
لیکن ہم مساوات خط منحنی کی جسمین لا اور ی پایا جاوے صرف بوسیلہ (۱) کے
دریافت کرسکتے ہین یعنی اس مساوات سے م ف = قوس ا ق + ق م کیونکہ
قوس ا ق = اوس قوس دایرہ کی ہی جسکا نصف قطر ط اور جیب معکوس لا ہی
= ط {قوس دایرہ کے جسکا نصف قطر ایک اور جیب معکوس لا/ط} =
ط جع^-۱ لا/ط ∴ ی = ط جع^-۱ لا/ط + √(۲ط لا − لا^۲) اگر نقطہ شروع ب
پر ہو اور ب ر = لا اور ر ف = ی تو مساواتین یہہ ہونگی لا = ط ر − جیب ر
اور ی = ط − ط جیب ر واضح ہو کہ ہم اس جا بحث اس خط منحنی کی نہین کرینگے
کیونکہ صرف کبھی خط منحنی سے صورت اسکی دریافت ہو جاویگی اگرچہ بعض اشخاص
کہتی ہین کہ پہلی گیلیلیو کو اسکا خیال نہین آیا تھا لیکن خط و ضعی کا پہلی اسی نے
امتحان کیا چونکہ ثابت کرنا اسکا تمام بڑی ریاضی دان سترھوین صدی کے
چاہتی تھی اسیواسطی یہہ خط منحنی بہت مشہور ہوا تمام مشہور خاصیتون اس

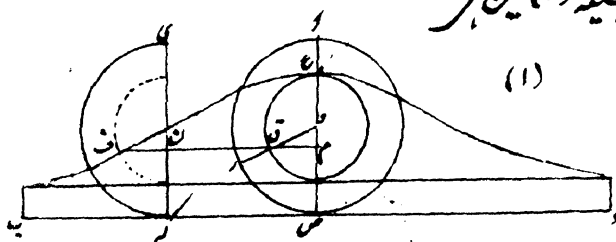
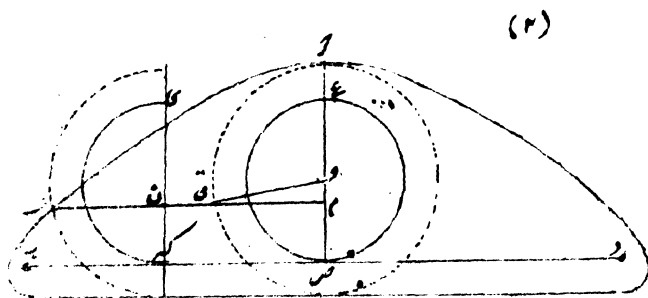
خط منحنی مین سے خواص آیندہ بہت مشہور ہین اول تمام سطح اس خط منحنی کا
ہمساوی تگنی سطح اوس دایرہ کی ہی جسکے گردش سی یہہ خط منحنی پیدا ہوا ہی
دوم قوس ا ف مساوی دوچند وتر ا ق کی ہی — سوم مماس جو کہ کہنچا
جاوے نقطہ ف سی متوازی وتر ا ق کی ہوتا ہی چہارم اور اگر شکل الٹی جاوے
تو ایک جسم کسی ایک نقطہ ف خط منحنی سے گریگا طرف سب سے نیچی کے نقطہ ا کے
ایک ہی وقت مین اور اگر ایک جسم ایک نقطہ سی دوسرے نقطہ کی طرف گری جو
کہ ایک عمود مین ہون تو دستہ اسکی جلدی گریگا قوس خط وضعی کی ہوگی یعنی جسم مذکور
اس قوس پر جلدی سی مسافت طی کریگا بہ نسبت اوس خط مستقیم کی جو کہ درمیان
ان دو نقاط کی ہی واضح ہو کہ اس صورت مین واسطے گرنی اجسام کی قوس مجوف خط
وضعی کے اوپر کو رکہنی چاہیے تا کہ جسم اس پر سے جلدی سے گری —

(۳۵۸) معلوم ہی ہین قاعدہ خط وضعی کا دریافت کرو خط منحنی کو —

وضع کرو کہ قاعدہ ب د بائیس مساوی حصون مین تقسیم کیا گیا ہی اور مان لو کہ یہہ نقاط
د اور ب سے طرف ص کے گنی جاتے ہین نقطہ ص سے کہینچو عمود ص ا مساوی
ساتہہ حصون مذکورکے اور ا ص پر بناؤ دایرہ ا ق ص کا اور اسیطرح سی تقسیم
کرو ا ص کو اوسیقدر حصون مین بوسیلہ پیمایش یا بوسیلہ خط ب ص کے شکل

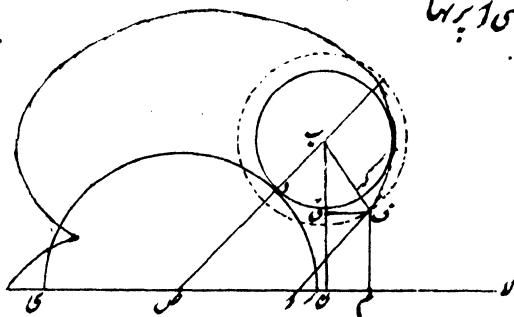
بالا مین نقطہ ق پانچوین حصہ کی انجام پر فرض کیا گیا ہی اور چونکہ قوس ق ص ا
مساوی ص ہ کی ہی اور اب اگر ف ق متوازی قاعدہ کی اسطرح پر کھینچا جاوے
کہ وہ مساوی باقی قاعدہ یعنی ب ہ یا ن ی سکے ہو تو ظاہر ہی کہ ف ایک نقطہ خط
منحنی مطلوب کا ہوگا اسیطرحسی اور نقطی دریافت ہو سکتے ہین جنکی ملانی سی خط
وضعی مطلوب پیدا ہوگا نسبت محیط اور قطر کی اس صورت مین وہ ہی جو کہ ۲۲ و ۷ کی

(۳۵۹) اب فرض کرو کہ نقطہ ق بجای ہولی کے محیط دایرہ پر اندر یا باہر
محیط دایرہ کی ہی صورت اولین خط وضعی کو خط وضعی کشادہ کہتی ہین جیسیکہ
شکل (۱) مین ہی اور صورت اخیر مین خط وضعی کو خط وضعی مختصر کہتی ہین
جیسیکہ (۲) مین ہی

(۱)

(۲)

ب ق قاعدہ خط وضعی کا ہی جس پر دایرہ اکرص بنانی والا اس خط منحنی کا لڑکتا ہی
اور ق مرکز اس دایرہ کا ہی اور ف وہ نقطہ ہی جس سے خط وضعی بنتا ہی جبکہ دایرہ
کہ پرہی اور کہینچو خط ف ن ق م متوازی قاعدہ کے فرض کرو کہ آ نقطہ شروع
محوروں متقاطع علی القوایم کا ہی اور ا م = لا اور م ف = ی اور ا د = ط
اور ع ق = م ط اور زاویہ ا ق ر = ر تو اب ظاہر ہی م ف = م ن + ف ن
= م ن + ق م = کرص + ق م = قوس ا ر + ق م اور ا م = ا ق + ق م
∴ ی = ط ر + م ط جس ر اور لا = ط جع ر یہہ مساواتین کشادہ یا مختصر خط
وضعی یا خود خط وضعی کی ہونگی جبکہ م کم یا زیادہ یا مساوی ایک کی ہوگا اگر
راس ع نقطہ شروع شکل (۱) اور (۲) کا فرض کیا جاوی تو ع ق = ط
اور ا د = م ط اور م ف = کرص + ق م = قوس ا ر + ق م
∴ ی = م ط ر + ط جس ر = م جع $^{-1}$ لا/ط + م √(۲ط لا − لا^{2}) وہ خط منحنی جسکی
مساواتین یہہ ہین ی = ط ر اور لا = ط جع ر تشریک خط وضعی کہلاتا ہی —

(۳۶۰) بحث خط وضعی کی زیادہ ہوسکتی ہی جبکہ قاعدہ خط وضعی کا خط منحنی
فرض کیا جاوی مثلاً فرض کرو کہ قاعدہ ایک دایرہ ہی اور فرض کرو کہ ایک اور دایرہ
اس دایرہ کی محیط پر لڑکتا ہی تو ایک نقطہ جو کہ اندر یا باہر محیط لڑکنی والی دایرہ
کی ہی بناویگا ایک خط منحنی جسکو اپی ٹراکوائڈ کہتے ہین اور اگر یہہ نقطہ محیط دایرہ پر
ہو تو اوس خط منحنی کو جو کہ اس نقطہ کی گردش سی پیدا ہوگا نصف خط وضعی
کہتے ہین اگر دایرہ متحرک مجوف طرف دایرہ پر لڑکی تو وہ خط جو پیدا ہوگا ایک نقطہ

ہی جو باہر یا اندر دایرہ متحرک کے ہمیں لوڑی کواڈ کہلاتا ہی اور جبکہ نقطہ مذکور محیط دایرہ مذکور پر نہو تو وہ خط جو اس نقطہ سی پیدا ہوگا ہائی پوسائیکلواڈ کہلاتا ہی — دریافت کرو مساوات نصف تری کواڈ کے فرض کرو کہ ص مرکز قاعدہ ی د کا ہی اور ب مرکز دایرہ متحرک د کہ کا جبکہ وہ ایک خاص مقام پر ہو اور ص ح م ایک ایسا خط مستقیم ہی جو کہ مرکز دو دایروں سے گذرتا ہی جبکہ یہہ دونو دایرے اوس مقام پر تہی جہاں کہ انکی حرکت شروع ہوئی ہی یعنی جبکہ نقطہ بنانی والا اس خط منحنی کا قریب ص کے یعنی آ پر تہا

فرض کرو کہ ص آ محور لا کا ہی اور ص م = لا اور م ف = ی اور ص د = ط اور ب د = ص اور ب ف = م ص اور زاویہ ا ص ب = ر کہینچو خط ب ن کا متوازی م ف کے اور ف ق متوازی ی م کے اور چونکہ ہر ایک نقطہ د ف کا قاعدہ آ د پر منطبق ہوا ہی اسیواسطے د ف = ط ر اور زاویہ د ب ف = $\frac{ط ر}{ص}$ اور زاویہ کہ ب ق = زاویہ کہ ب د — زاویہ ق ب د = $\frac{ط ر}{ص} - \left(\frac{\pi}{2} - ر\right)$

$= \frac{ط + ص}{ص} ر - \frac{\pi}{2}$ اور اب ظاہر ہی کہ ص م = ص ن + ن م =

ص ب جم ب ص ن + ب ف جب ف ب ق = (ط + ص) جم ر +

جبر یہ حاصل ہو نگی جو کہ محدود ہونگی اور یہہ اوسوقت ہو سکتا ہی جبکہ نسبت درمیان
ط اور ص کی ایسی ہو جیسی صحیح اعداد مین ہوتی ہی کیونکہ اس صورت مین
جم ر اور جم (ط+ص)/ص ر اور جیب ر وغیرہ تعبیر ہو سکتی ہین ایسی صورتون
شکلون سے جسمین اجزای جم ھ اور جیب ھ پائی جاوینگی اور ھ ضعف مشترک
ر اور (ط+ص)/ص ر کا ہی اور اب اجزای جم ھ اور جیب ھ اجزای لا اور ی
مین دریافت ہو سکتی ہین اور چونکہ وہ مساوات جو کہ موافق اس فرض کی اجزای
لا اور ی مین حاصل ہو گی محدود ہی اور خط منحنی لانہایت سلسلہ گردشون
کا بناتا ہی لیکن دایرہ متحرک مین بعد چند گردشون کے وہ نقطہ جس سے خط منحنی
بنتا ہی اوسی مقام پر دریافت ہوگا جس مقام پر وہ ابتدای گردش مین تھا
اسیواسطی یہہ نقطہ وہی خط منحنی پہر بناویگا مثلا فرض کرو کہ ط = ص تو مساوات
نصف خط وضعی کی یہہ ہو نگی لا = ط (۲ جم ر − جم ۲ ر) اور ی = ط (۲ جس ر − جس ۲ ر)
∴ لا = ط (۲ جم ر − ۲ (جم ر)^۲ + ۱) اور ی = ۲ جیب ر (۱ − جم ر) بوسیلہ
پہلی مساوات کی قیمت جم ر کے دریافت ہوگی اور دوسری مساوات سی قیمت جیب ر
کے معلوم ہوگی اور جبکہ جمع کرینگی ہم قیمتون (جم ر)^۲ اور (جیب ر)^۲ کو تو بعد
اختصار کی یہہ حاصل ہوگا (ی^۲ + لا^۲ − ۳ ط)^۲ = ۴ ط^۴ (۳ − ۲ لا/ط) یا
(لا^۲ + ی^۲ − ط^۲)^۲ − ۴ ط^۲ ((لا − ط)^۲ + ی^۲) = ۰ چونکہ اس خط کی شکل
مثل صورت دل کی ہی اسیواسطی اسکو کارڈی اوائڈ کہتی ہین فرض کرو کہ آ نقطہ
شروع یعنی بجای لا کے لکھو (لا + ط) مساوات گذشتہ مین تو اب جسوقت بدلین

ہم اس مساوات کی محور وں کو قطبی محور دلسی تو اس صورت مین مساوات کار ڈی اُوادُ

کی یہہ ہو جاویگی نق = ۲ ط (ا - جم ھ) -

(۳۰۶۲) اگر جص = ط/۲ تو مساوات (۴) ہائپو سیکلائیڈ کی یہہ ہو جاویگی

لا = ط جم ر اور ی = ۰ اور اس صورت مین ہائپو سیکلائیڈ قطر دایرہ اصلی

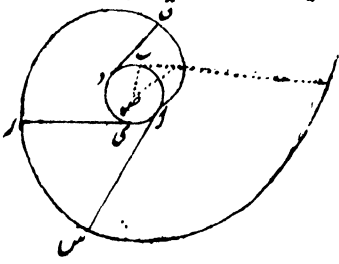
کا ہو جاویگا اور اسی صورت مین مساوات ہائپو ٹرو کوائیڈ کی یہہ ہوگی

لا = ط/۲ (ا + م) جم ر اور ی = ط/۲ (ا - م) جس ر اور جبکہ دور کرین ہم

ر کو اس مساوات مین سے تو حاصل ہوگی ہمین مساوات بیضوی کی جسکے محور یہہ ہونگی

ط (ا + م) اور ط (ا - م)

(۳۰۶۳) اگر ایک ڈورا جو کہ دایرہ پر لپٹا ہوا ہی کہولا جاوے تو انجام اس ڈورہ

کا بناویگا ایک خط منحنی جسکو انوولیوٹ دایرہ کا کہتے ہین -

مثلاً فرض کرو کہ ایک ڈورا

گرد دایرہ آ ب د کی لپٹا ہوا

ہی اور اب اگر کہولا جاوے

یہہ ڈورا نقطہ آ سے تو وہ

انجام جو کہ ہاتھہ مین ہی انوولیوٹ ا ف ق س دایرہ کا بناویگا خطوط ا ب ف

اور د ق ا د ی ر اور اس جو کہ خاص مقام ڈوری کی ہین مماس دایرہ کی ہین اور

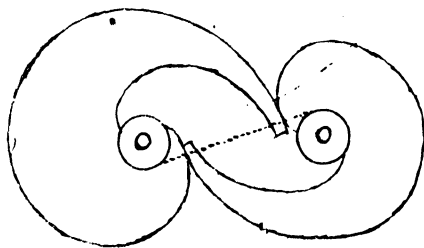
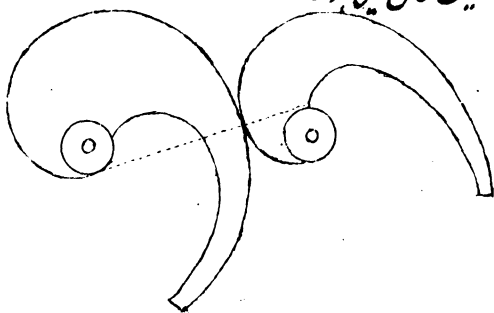
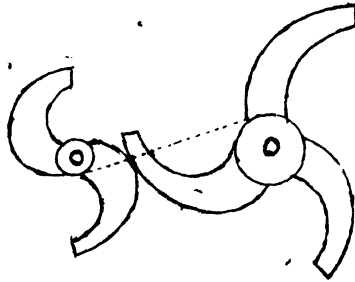
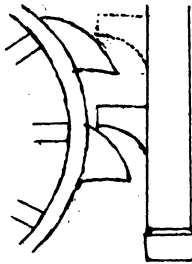
ہر ایک اُنمین سے مساوی اُس قوس کے ہی جو کہ درمیان آ اور اوس انجام ڈورہ کے

واقع ہی جو کہ دایرہ پر ہی یہہ خط منحنی لانہایت گرد شین کرتا ہی اور شاخین اسکی

ایک دوسری سی اوس فاصلہ پر واقع ہین جو مساوی محیط دایرہ کی ہی — دریافت کرو مساوات انوولیوٹ کی فرض کرو کہ ص ا = ط اور ص ف = لق اور زاویہ ا ص ف = ر تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ مثلث ب ص ف کی ہمین یہہ حاصل ہوتا ہی

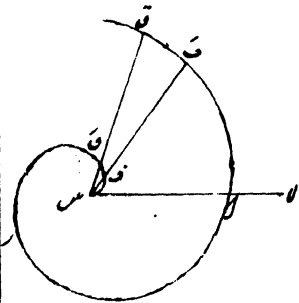
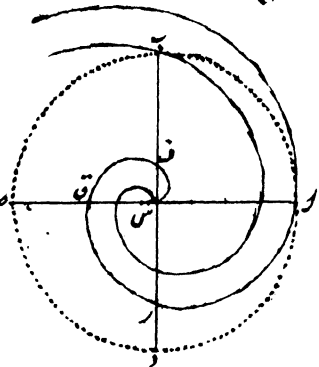
ب ص = ف ص جم ف ص ب یا زاویہ ف ص ب = جم⁻¹ ط/لق ∴ ب ف = ب ا

= ط (جم⁻¹ ط/لق + ر) یا √(لق² − ط²) = ط (جم⁻¹ ط/لق + ر) ∴

ر = √(لق² − ط²)/ط − جم⁻¹ ط/لق انوولیوٹ دایرہ کا بہت فایدہ سی دانتہ ایسون مین استعمال مین لایا گیا ہی کیونکہ طاقت بہت کم ضایع ہوگی ایک دانت سی دوسری دانت تک گذرنی مین جبکہ وہ اس صورت کی ہونگی اور جب یہہ مختلف صورتون کی ہونگی تو یہہ فایدہ حاصل نہین ہوگا

اشکال (۲) اور (۳) مین دو مساوی پہیہ ہین ہر ایک انمین سے دو دانت رکھتا ہی
اور ایک پہیہ کو حرکت دینی سی دوسرا پہیہ جسکی دانت پہلی سے ملی ہوئی ہین حرکت
کریگا خط نقشدار جو کہ اشکال

مرقومہ بالا مین ہین مماس انولیوٹ
کی موافق خاصیت اس خط منحنی کے
ہوگی اور یہی خط ہمیشہ مماس خط
منحنی کا ہوگا اور ایک ہی قوت ہر ایک
حصہ اوس خط مین ہوگی جسمین پہیہ گردش کرتی ہین شکل (۳) ایک اور مثال
اس قسم کی ہی اور جبکہ متعدد اور چھوٹی چھوٹی دانت پہیہ کے بنائی جاوین تو دانت
دانت دار سیی ہمیشہ ملی ہوئی رہینگی اور اسیواسطے کل کے متحرک کرنےمین بہت آسانی
ہوگی اگر دانت یا ہتوڑی کے اوٹھانے مین انولیوٹ دایرہ کا مستعمل کیا جاوی
تو ظاہر ہی کہ پہیہ واسطی دانت ہی کے بہت مفید ہی کیونکہ قوت اس صورت
مین دانت پر سمت عمود مین اثر کرتے ہے —

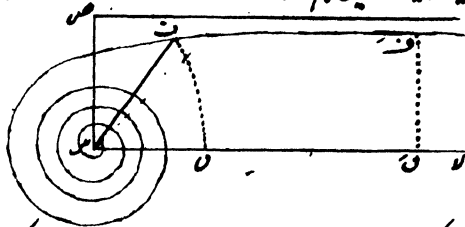
(خطوط پیچیدہ کے بیان مین)

(۳۶۴) واضح ہو کہ چند خطوط غیر جبریہ جنکا اب تک بیان نہین ہوا ہی بسبب ہونکی صورت پیچیدہ کی خطوط منحنی پیچیدہ کہلاتی ہین انکو مہندسان متقدمین نے ایجاد کیا تہا اور انہون نے نقوش اس صورت کی مکانون پر کروائی تہے ان خطوط منحنی مین سے بہت آسان اور نامی مندوہ خط منحنی پیچیدہ ہے جسکو آرکمیدیز نے ایجاد کیا تھا اور یہہ خط اسطرح بنتا ہی فرض کرو کہ جب ایک خط مستقیم غیر محدود س ف گرد خط س لا اور نقطہ س کے پہرتا ہی اوسیوقت مین ایک نقطہ ف خط س ف پر حرکت کرتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ یہہ نقطہ خط منحنی س ف ق را کا بناویگا اور جبکہ خط س ف ایک گردش تمام کریگا تو نقطہ ف مقام آ پر اویگا اور اسیطرح سے جبکہ خط س ف پہرتا جاویگا تو ایک سلسلہ پیچیدہ خطوط کا بنیگا

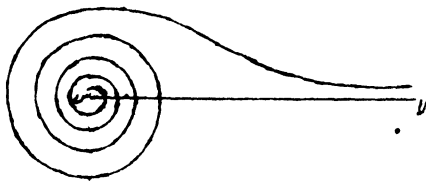
(۱) (۲)

واسطے دریافت کرنے صورت اور خواص اس خط منحنی کے نسبت مساوات اس خط منحنی کی نسبت

اوتار قطبی کی دریافت کرنے چاہیے - فرض کرو کہ س ف = ق اور س ا = ص
اور ا س ف = ر اور چونکہ زیادتی ق اور ر کی ایک سی ہی تو
س ف : س ا :: زاویہ ا س ف : چار قائموں سے :: ر : ۲ ک یہاں کہ ک = ۱۱۰
∴ ق = ص ر / ۲ ک اس مساوات یہ معلوم ہوتا ہی جبکہ س ف دو گردشین کرتا ہی
یعنی ر = ۴ ک تو ق = ۲ ص یا خط منحنی پھر محور س ا کا فاصلہ ۲ س ا پر قطع کریگا
اسپیرل حسی بعد ۳ اور ۴ اور ن گردشوں کے وہ ملتاہی محور س ا سے اسی فاصلہ
۳ یا ۴ یا ن گنے س ا پر اور ارکمیدیز نے دریافت کیا کہ سطح س ف ق ر ا
مساوی ایک ثلث سطح اس دایرہ کے ہی جسکا مرکز س اور نصف قطر س ا ہی -

(۳۶۵) خط پیچیدہ ارکمیدیز صاحب کا بعض اوقات مینار کے ایک خاص حصہ کے
بنانی مین کام آتا ہی اور اس صورت مین طریقہ آیندہ واسطے بنانی اس خط کی بوسیلہ
نقاط کی بہت اچھا ہی فرض کرو کہ دایرہ ا ب ص د قطر ص س ا پر شکل (۲) مین
کھچا ہوا ہے اور کھیچو قطر ب د عمود ص س ا پر اور تقسیم کرو نصف قطر س ا کو چار
مساوی حصوں مین اور س ب مین سے قطع کرو س ف = ۱/۴ س ا اور س ص مین
سے س ق = ۱/۲ س ا اور س د مین سے س ر = ۳/۴ س ا تو اب بمساوات
خط منحنی سے ظاہر ہوگا کہ یہ نقاط خط منحنی کی ہینگی اور اگر اسپیرل حسی نصف قطر س ا
کو اور حصص مین اور ہر ایک زاویہ کو جو ربع دایرہ مین واقع ہی تقسیم کرین تو ہمکو
اور بھی نقاط خط منحنی کے دریافت ہو جاوینگے اور واسطے تمام کرنی اوبہری ہوئی گری
حصہ مکور مینار کے ایک اور خط پیچیدہ شروع ہوتا ہی خط س ب سے -

(۳۶۶) خط پیچیدہ آرکمیڈیز کا ایک خط اون خطوط پیچیدہ مین سے ہی جو اس سادہ اور عام خط پیچیدہ کی قسمی پیدا ہوتے ہین نق = ظا رن اس قسم کی خط پیچیدہ کی ہم دو صورتین بیان کرینگی جہان ن = -۱ اور ن = $-\frac{1}{2}$ کی ہوجاتا ہی۔

فرض کرو کہ ن = -۱ ∴ نق = ظا ر$^{-1}$ اور مان لو کہ س قطب ہی اور س لا وہ محور ہے جس سے ر کا شمار کیا جاتا ہی اور س ف = ی اب ظاہر ہی کہ جب ر = ۰ تو ی = ∞ اور جبکہ ر زیادہ ہوتا ہی تو نق پہلے بہت جلد کم ہوتا جاتا ہی مگر بعد اسکی قریب یکسان رفتار سے کم ہوتا ہی اور جبکہ ر لانہایت زیادہ ہوتا جاوے گا تو اوسیطرح ی لانہایت کم ہوتا جاویگا اور قریب صفر کے آجاویگا مگر کبھی صفر نہین ہوگا یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ لانہایت پیچ گرد نقطہ س کی ہونگی کھینچو ف ی قوس دایرہ کی س کو مرکز اور س ف کو قطر کر دانکی تو اب ظاہر ہی کہ ق ف = ی ر = ظ اور چونکہ یہہ قیمت ظ واسطی ہر ایک مقام ف کی ایک ہی ہے تو ق ف = ق ف = خط ص س کی جبکہ ف لانہایت فاصلہ پر ہوگا اسیواسطے اس صورتمین خط منحنی نزدیک اوس خط متنفر الملاقات کی ہونچیگا جو نقطہ ص سے متوازی س لا کے کھینچا جاویگا۔ اس خط منحنی کو خط پیچیدہ معکوس کہتی ہین موافق صورت اسکی سادہ رت کی کیونکہ مقادیر غیر منقطع نسبت معکوس ایک دوسرے

رکھتی ہین اور بعض اوقات بعید البیضوی کا خط پیچیدہ کہتی ہین کیونکہ مساوات
اسکی مشابہ مساوات اوس بعید البیضوی کے ہی جسکی مساوات نسبت خطوط
متنفر الملاقات کی حاصل ہوتی ہی اور جو یہہ ہی (لا ء = کہ^۲)

(۳۶۷) فرض کرو کہ ن = − ۱/۲ ∴ ل = ط ر^{۱/۲} یا ل^۲ ر = ط^۲
یہہ خط منحنی مثل شکل طنبور کے ہی اور صورت اسکی شکل مرقومہ ذیل سی ظاہر ہوگی یہہ خط
منحنی خط متنفر الملاقات س لا سے شروع ہوکی لانہایت پیچ گرد نقطہ س کی کہاتا ہے

(۳۶۸) اگر اس مساوات ل ر = ط مین سے ہم ایک مقدار مقررہ ص تفریق کرین تو
ہمکو یہہ مساوات حاصل ہوگی (ل − ص) ر = ط یہہ خط شروع کرتا ہی اپنی دورہ
کو مثل خط پیچیدہ مکتانی کی مگر جبکہ ر زیادہ ہوتا ہی تو (ل − ص) قریب صفر کی ہوتا
جاتا ہی یعنی قیمت ل کے قریب ص کی ہوتی جاتی ہی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ خط پیچیدہ بعد
لانہایت گردشون کے قریب اوس دایرہ کی آتا ہی جو خط متنفر الملاقات ہی اور جسکا نصف
قطر ص اور مرکز س ہی

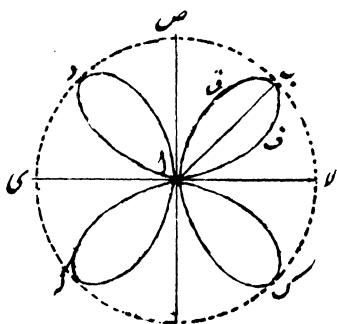
(۳۶۹) دریافت کرو اوس خط پیچ کو جسکی مساوات یہہ ہی ر = ط ⁄ √(ل − ل^۲)
= ص یہہ خط منحنی لانہایت گردشین گرد قطب کے کرتا ہی اور آہستگی پہیلتا ہی طرف

اوس دایرہ سکے جو خط متنفذ الملاقات ہی اور جسکا نصف قطر ط ہی ۔ غ

(۳۷۰) وہ خط پیچیدہ جسکی مساوات یہہ ہی (لو - ط)^۲ = ص^۲ ر شروع کرتا ہی
اپنی دورہ کو ایک نقطہ محیط دایرہ سے جسکا نصف قطر ط ہی اور پہیلتا ہی باہر کیطرف
بعد لانہایت گردشون کے گرد نقطہ س کے یہہ خط منحنی پیدا ہوگا بوسیلہ لپٹنی محور
قریب البیضوی کے گرد محیط ایک دایرہ کے اسطرح پر کہ خط منحنی قریب البیضوی کا خط پیچیدہ
بناوے ۔ غ (۳۷۱) وہ خط منحنی جسکی مساوات یہہ ہی لو = ط ر خط پیچیدہ
لوکارثمی کہلاتا ہی کیونکہ لوکارثم نصف قطر متحرک کا متناسب زاویہ ر کی ہی
بعد آزمائی تمام قیمتون ر کی ∞ سی لانہایت تک معلوم ہوتا ہی ہمین کہ یہہ خط
منحنی لانہایت گردشین گرد قطب س کے کرتا ہی اور اس خط منحنی کو خط پیچیدہ
مساویہ الزاویہ بہی کہتے ہین کیونکہ بوسیلہ بعض بڑی اصول ہندسہ بالجبر کی دریافت
ہوتا ہی کہ یہہ خط منحنی نصف قطر متحرک کو ایک زاویہ مقررہ پر قطع کرتا ہی یعنے جو زاویہ
انکی تقاطع سی حاصل ہوگا وہ مساوی مقدار مقررہ کی ہی ۔ ڈس کارٹیز صاحب نے
(جسکو پہلی خیال اس خط منحنی کا آیا تہا) معلوم کیا کہ تمام طول اس خط کا کسی ایک نقطہ
ف سی قطب تک متناسب اوس قطر متحرک کی ہی جو ف پر ہی ۔

(۳۷۲) یہہ اکثر واقع ہوتا ہی کہ مساوات جبریہ ایک خط منحنی کی زیادہ مشکل ہوتی ہی
بہ نسبت اوسکی قطبی مساوات کی جبکہ مساوات کن کو اڈسی جسکا بیان فقرہ ۳۱۲
مین کیا گیا ہی حال اس بات کا بخوبی واضح ہی اسیواسطی ان صورتون مین یہہ بہتر
معلوم ہوتا ہی کہ مساوات جبریہ مساوات قطبی سے بدل جاوے تاکہ آسانی خط منحنی

کی معلوم کرنے مین ہوو ی مثلاً اگر مساوات یہہ ہو (لا٢ + ی٢)٢ = ٢ ط لا ی تو ظاہر ہی کہ بہت مشکل سی صورت خط منحنی کی بوسیلہ اس مساوات کی دریافت ہوگی لیکن اگر فرض کرین لا = لو جم ر اور ی = لو جس ر موافق فقرہ (٦١) کی

∴ لو٤ = ٢ ط لو٢ جم ر جس ر یا لو = ٢ط جم ر جس ر = ط جس ٢ر فرض کرو

کہ ا نقطہ شروع ہے اور ا لا وہ محور ہی جس سے ر شمار کیا جاتا ا کو مرکز اور ط کو نصف قطر گردانکی کہینچو دایرہ ب ص د کا تو اب ظاہر ہی کہ جب ر = ۰

تو لو = ۰ اور جبکہ ر زیادہ ہوتا ہی ۰ سی ٤٥° تک تو لو زیادہ ہوتا ہے ۰ سے ط تک موافق اسکے شاخ ا ف ب کی حاصل ہوگی اور جب کہ ر زیادہ ہوتا ہے ٤٥° سے ٩٠° تک تو ظاہر ہی کہ قیمت جس ٢ر کی کم ہوگی ا سے ۰ تک ∴ لو کم ہوگا اور اسی ہمکو شاخ ب ق ا کی معلوم ہوگی اسیطرحسی ایک دوسری بیضی صورت دوسرے ربع دایرہ مین حاصل ہوگی اور جبکہ ر زیادہ ہونا شروع کریگا ١٨٠° سے ٣٦٠° تک تو ظاہر ہے کہ دو بیضی تیسری اور چوتھی ربع دایرہ مین معلوم ہونگی اور چونکہ جیب مستوی ایک قوس کی زیادہ ایک ہی طور سی ہوتی ہی ہر ایک ربع دایرہ مین اسیواسطے چارون بیضی مشابہ اور مساوی ایک دوسری کی حاصل ہونگی اس صورت مین ہمنی لحاظ علامت جبریہ لو کا نہین کیا ہی ہمنی صرف قیمت ر زیادہ ہوتی ہوئی فرض کی ہی

۰ سی ۹۰۰ تک اور اس طریقہ کو ہمنی ترجیح دی ہی اوس طریقہ پر جسکی وسیلہ سے ر کو زیادہ ہوتا ہوا ۰ سی ۱۸۰ تک فرض کرتے ہین اور بعد اسکی فرض کرتی ہین کہ علامت اسکی بدلتی ہی اگر یہہ مساوات ہوتی (لا۲ + ی۲)۲ = ۲ ط۲ لا ی تو اس صورتین بہی ہمکو ویسی ہی بیضئی پہلی اور چوتہی ربع دایرہ مین حاصل ہوتی واضح ہو کہ لوکس مساوات آیندہ کا ن = ط (جم ر ـ جس ر) ویسی ہی صورت کا ہی مگر یہہ مقیم مختلف طور سی نسبت ا لا اور ا ص کے ہی ـ لوکس مساوات لمنسکیٹا کا جو یہہ ہی ن۲ = ط۲ جم ۲ ر سوائی فقرہ (۳۱۴) کے بطور مرقومہ بالا کی حاصل ہو سکتا ہی ـ

(۳۲۴) واضح ہو کہ اکثر اشکال غیر منقطع مین ہمکو معلوم ہوتا ہی کہ اوتار قطبی بہت مفید ہوتے ہین مثلاً فرض کرو کہ ایک کنارہ ایک صفحہ کاغذ کا پھیر اگیا ہی صورت ب ص ف مین اور اسطرح پر کہ مثلث ب ص ف مساوی ایک مقدار مقررہ کے ہی اب چاہتے ہین ہم دریافت کرنا لوکس ف کا ـ فرض کرو کہ ا ف = ن اور زاویہ ف ا ص = ر اور سطح ا ب ص = ط۲ اور چونکہ مثلث ا ب ی اور ف ب ی مساوی ہین تو ظاہر ہی کہ ا ی = ن/۲ اور زادیہ ا ی ب قایمہ ہوگا ∴ ا ی = ا ص جم ر اور ا ی = ا ب جم (π/۲ ـ ر) = ا ب جس ر ∴ ن۲/۴ = ط۲/۲ جس ر جم ر یا ن۲ = ط۲ جس ۲ ر یہاں سی ثابت

ہوتا ہی کہ لوکس اسکا بیضی ا ف ب ق مثل شکل گذشتہ کی ہی۔ اگر ایک نقطہ
س ف پر جو نصف قطر متحرک قریب البیضوی کا ہی اسطرح پر فرض کیا جاوے کہ فاصلہ
اوسکا نقطہ آتشی سے مساوی اوس عمود کی ہو جو کھینچا جاوے نقطہ آتشی سے مماس
پر تو لوکس نقطہ مذکور کا وہ خط منحنی ہوگا جسکی مساوات یہہ ہی ل = ط ست ر/۲

حصہ دویم

مشتمل اوپر اوس فرع اس علم کے ہی جسمین تین بُعد کی مقداروںسی بحث ہی

باب اول

آغاز

(۳۷۴) پہلی حصہ مین اس کتاب کی نقاط اور خطوط کو ایک سطح مین فرض کیا ہی اور مساوات اونکی بلحاظ دو دو نیزون سے دریافت کی گئی ہی اور یہہ اوتار ایک سطح مین خیال کی گئی ہین اب ظاہر ہی کہ ہم ایک ایسا خط منحنی فرض کرسکتے ہین جو ایک سطح مین نہو اور اِسیطرحسی ایک سطح کو فرض کرسکتی ہین مثلاً سطح کرہ کی ایک ایسی سطح ہی کہ تمام نقطے اوسکی ایک سطح مین نہین ہین اسیواسطی وہ طریقہ جو کہ پہلے حصہ مین واسطے دریافت کرنے شکلون کے استعمال مین لایا گیا ہی اسجاے مستعمل نہین ہوسکتا ہی تو اب واسطے دریافت کرنے ایسی اشکال کے جو تین بُعد سے تعلق رکہتی ہین ایک عام طریقہ لکہا جاویگا۔

(۳۷۵) واضح ہو کہ اول ہم مقام ایک نقطہ کا بلحاظ تین بُعد وثیقی کی دریافت کرینگی فرض کرو کہ ع ا لا اور ر ع ا ا اور لا ا ا تین ایسی سطح ہین جو کہ عمود ایک

دوسری پر ہین اور ا لا اور ا ی اور ا ع فصل مشترک انکی ہین اور ا وہ نقطہ ہی جہانکہ یہہ تینون سطحین ملتی ہین - فرض کرو کہ نقطہ ف سطح جو

ع
ر
س
ف
لا
ی
م
ن
ق
ی

واقع ہی اور کہینچو اس نقطہ سی خط ف ق اور ف ر اور ف س اسطرح پر کہ وہ عمود سطح لا ا ی اور ع ا لا اور ع ا ی پر ہون تو اب ظاہر ہی کہ مقام نقطہ ف کا معلوم ہوگا جبکہ یہہ تینون عمود دریافت ہونگی اب اگر تمام کرین ہم مجسم ا ف کو تو ف ق اور ف ر اور ف س مساوی ا د اور ا ن اور ا م کی ہونگی یہہ تینون خط ا م اور ا ن اور ا د یا ا م اور م ن اور ق ف اوتار نقطہ ف کی کہلاتی ہین اور انکو حروف لا اور ی اور ع سے تعبیر کرتے ہین اور ا کو نقطہ شروع کہتی ہین خط ا لا کو محور لا اور ا ی کو محور ی اور ا ع کو محور ع کہتے ہین سطح لا ا ی کو سطح لا ی اور سطح ع ا لا کو سطح ع لا اور ع ا ی کو سطح ع ی کہتی ہین - تصور تین بُعد کے اوتار کا بخوبی بوسیلہ سطح ایک کمرے اور اوسکی دو دیوارونکی ہوسکتا ہی اسصورتین نقطہ شروع ایک کونہ کمرہ کا ہوگا اور سطح کمرہ کی سطح لا ی کو تعبیر کریگی اور باقی دو متصل کی دیوارین اوس کونہ کی سطح ع لا اور ع ی کو تعبیر کرینگی نقطہ ف سے تین عمود ف ق اور ف ر اور ف س تین سطح متقاطع علی القوایم پر کہینچی ہین اور نقطے ق اور ر اور س

نشان نقطہ ف کے بوسیلہ کہینچی ان عمودون کے سطح ل ا د اور ل ع ر ع د پر ہوی ہین — واضح ہو کہ طریقہ نشانون کا واسطی دریافت کرنے سطوح کے بہت فایدہ مند ہے اسیواسطی ہم اسجای چند ایسی شکلون کو لکھین گے جو کہ اس کتاب مین مفید ہونگی اور جنکا جاننا واسطی سمجھنی بیان سطوح کے ضرور ہے — ٭ ٭ ٭

بیان نشانون کا

(۳۷۶) اگر چند نقاط ایک خط مستقیم مین فرض کئی جاوین تو نشان انکی بہی کسی ایک سطح پر سطوح متقاطع علی القوایم مین سے ایک خط مستقیم مین ہونگی یعنی اگر اون نقاط مفروض سے عمود ایک سطح پر ڈالے جاوین تو وہ نشان جو کہ ان عمودون کے ڈالنی سے سطح پر پیدا ہونگی وہ ایک خط مستقیم مین ہونگی کیونکہ یہہ تمام نقاط اوس سطح مین ہونگی جو کہ کہیچی جاوے خط مفروض سے عمود ایک سطح متقاطع علی القوایم پر اور چونکہ دو سطحون کے تقاطع سے ایک خط مستقیم پیدا ہوتا ہی تو اب ثابت ہوا کہ نشان نقاط مفروض کے ایک خط مستقیم مین ہین — واضح ہو کہ اوس سطح کو جسمین تمام وہ عمود ہین جو کہ کہینچی گئے ہین نقاط مفروض سے سطح نشانی کہتے ہین اور وہ خط جو کہ تقاطع کرنے اس سطح اور سطح متقاطع علی القوایم کے سی پیدا ہوتا ہی خط نشانی کہلاتا ہی —

(۳۷۷) دریافت کرو طول خط نشانی ایک خط مستقیم کا جبکہ وہ ایک سطح پر کہینچا جاوے فرض کرو کہ ا ب وہ خط ہی جسکا خط نشانی سطح ف ن پر معلوم کرنا منظور ہی کہینچو خط ا ب جب تک کہ وہ ملی اس سطح سی نقطہ ف پر کہینچو ا ر

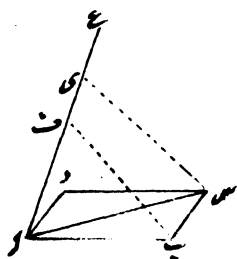
اور ب کے عمود اس سطح پر اور مان لو کہ وہ
ملتی ہیں اس سطح سے نقاط اَ اور بَ
پر اب ملاؤ نقاط اَ اور بَ کو تو خط اَبَ
خط نشانی مطلوب اب کا ہوگا

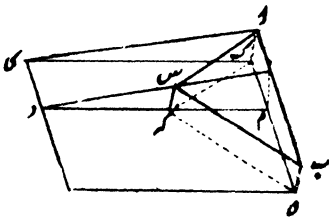
چونکہ اب اور اَبَ ایک ہی سطح میں ہیں تو ظاہر ہے کہ وہ نقطہ ف پر ملیں گے
فرض کرو کہ زاویہ ب ف بَ یا وہ زاویہ جو کہ خط اب بناتا ہے سطح ف ق ر سے
= ر اور کھینچو سطح نشانی اب میں ای متوازی اَبَ کے تو اَبَ = ای
اَبَ = ای = اب جم ب ای = اب جم ر اس طور سے معلوم ہو سکتا ہے
وہ خط نشانی جو کہ کھینچا جاوے ایک خط سے دوسرے خط پر جبکہ یہ
دونوں خط ایک ہی سطح میں ہوں —

(۳۷۸) دریافت کرو خط نشانی ایک خط مستقیم کا اوپر دوسرے خط کی جبکہ یہ دونوں خط
ایک سطح میں نہوں فرض کرو کہ خط نشانی اب اوپر خط س د کے کھینچا منظور ہے
نقطہ اَ اور ب سے کھینچو خط
ااَ اور ب بَ عمود خط س د
پر تو اَبَ خط نشانی مطلوب
ہے اَ اور بَ میں سے گذرتی ہوئی

کہیو دو سطح ا ب ا د اور ف ق عمود خط س د پر تو ظاہر ہی کہ ا ز ز ا ور ب ب ان سطحون مین ہونگی اب نقطہ ا سے کہینچو ا ی عمود سطح ف ق پر اسیواسطے یہہ خط متوازی مساوی ا ب کی ہوگا چونکہ مثلث ب ا ی مین زاویہ ی قایمہ ہی تو ا ب = ا ی = ا ب جم ب ا ی اور زاویہ ب ا ی مساوی اوس زاویہ کی ہی جوکہ خط ا ب خط س د سی بناتا ہی اور فرض کرو کہ یہہ = ر ∴ ا ب = ا ب جم ب ا ر = ا ب جم ر واضح ہو کہ خط نشانی اوس خط کا ہی جوکہ مساوی اور متوازی خط ا ب کے ہی ا ب خط س د پر ہوگا اور خط نشانی ا ب کا اوس خط پر جو متوازی س د کی ہی مساوی ہوگا

(۳۷۹) خط نشانی ایک متوازی الاضلاع کے قطر کا اوپر ایک خط کی مساوی ہی مجموعہ خطوط نشانی دو ضلعون اوس متوازی الاضلاع کی خط مذکور پر

فرض کرو ا ب س د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ا ع وہ خط ہی جس پر خط نشانی کہینچنا منظور ہی اور جو متوازی الاضلاع سی نقطہ ا پر ملتا ہی نقاط س اور ب سی کہینچو س ی اور ب ف عمود خط ا ع پر تو ظاہر ہی کہ ا ی خط نشانی اوس کا خط ا ع پر ہی یا ا ی = ا س جم س ا ع اور ا ف خط نشانی ا ب ا ع پر ہی یا ا ف = ا ب جم ب ا ع اور ی ف خط نشانی س ب یا ا د کا ا ع پر ہی یعنی ف ی = ب س جم د ا ع اور ا ی = ا ف +

+ ف ی یہانسی ثابت ہوا کہ خط ثنائی ا س = خط ثنائی ا ب + خط ثنائی س ب کے

(۳۸۰) دریافت کرو سطح ثنائی کسی خاص سطح کے ایک سطح مفروض ی د ک ہ پر فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث جو کہ سطح ی د ک ہ سے زاویہ ر کا بناتا ہی کھینچو ا ی اور س د عمود خط ی د پر جو کہ فصل مشترک درمیان سطح مثلث اور سطح مفروض کی ہی

اب ظاہر ہی کہ ا ب قاعدہ مثلث ا ب س کا مساوی ک ہ کی ہی جو کہ قاعدہ اسکی سطح ثنائی ک ہ کہ کا ہی لیکن ارتفاع س ف اور کہ م ان دونون کے غیر مساوی ہین

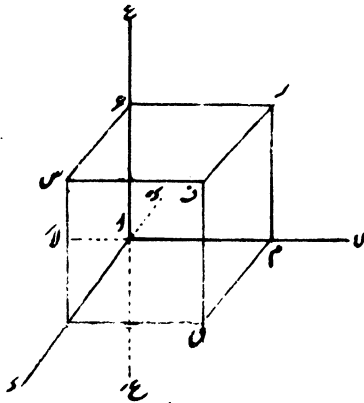
∴ سطح ا ب س : ک ہ کہ :: س ف : کہ م :: و ف : دم :: ۱ : جم ر

∴ سطح ک ہ کہ = ا ب س جم ر جبکہ یہ دعوے صورت مثلث مین ثابت ہوا تو وہ سطح متوازی الاضلاع مین بھی ثابت ہوگا اور اسیطور ہر ایک سطح مین ثابت ہوسکتا ہے

باب دوم

بیان نقطہ اور خط مستقیم مین

(۳۸۱) ہمنی ابھی طریقہ دریافت کرنے مقام ایک نقطہ کا سطح مین بیان کیا ہی اور اوس سے یہ ثابت ہوا ہی کہ مقام ایک نقطہ کا اوسوقت معلوم ہوگا جبکہ تین عمود جو کہ کھینچی جاوین نقطہ مفروض سے تین سطحون عمودی پر معلوم ہونگی اب اگر طول ان عمودون کا یعنی طول او تا نقطہ مفروض ف کا بعد پیمائش کے

یہہ ثابت ہو ام = ط اور ان = ص اور او = س تو ظاہر ہی کہ مقام
نقطہ ف کا ان مساواتون سی معلوم ہوجاویگا لا = ط اور ی = ص اور
ع = س اور چونکہ یہہ مساواتین کافی ہین واسطے دریافت کرنے مقام ایک نقطہ
کے اسیواسطی انکو مساواتین نقطہ ف کی کہتے ہین — واضح ہو کہ مقام اس
نقطہ کا مساوات آیندہ سی بہی دریافت ہو سکتا ہی جیسا کہ فقرہ (۲۵) مین جہان
صرف دو بعد کا لحاظ رکہا گیا تہا دریافت ہوا ہی (لا − ط)^۲ + (ی − ص)^۲ +
(ع − س)^۲ = ۰ وہ قیمتین اس مساوات کی جن سے کہ شرط اس مساوات کی
پوری ہو یہہ ہین لا = ط اور ی = ص اور ع = س

(۲۸۲) علامات جبریہ اوتار لا اور ی اور ع کی اوسیطرح سے دریافت ہو سکتی ہین
جیسا کہ حصہ اول اس کتاب مین دریافت ہوئی ہین مثلاً او مثبت ہوگا جبکہ یہہ شمار
کیا جاویگا لا ع پر اور منفی ہوگا جبکہ وہ شمار کیا جاویگا لا ع پر یعنی وہ مثبت ہوگا
جبکہ اوپر سطح لا ی کی ہی اور منفی ہوگا جبکہ نیچی اوسکی ہی اسیطرح سی علامات باقی

خطوط کی دریافت ہو سکتی ہین بموجب علامات اوتار کے تینتین ق کی جدول آینده سی معلوم ہوگی جبکہ مقام اوسکا فرض کیا جاوے مختلف حصص سطح جو مین جو آٹھ حصونمین تقسیم کی گئی ہی بوسیلہ اوتار کے اور جبکہ مقام نقطہ ق کا علیحدہ علیحدہ ہر ایک حصہ مین مان لیوین تو علامتین اوسکی اوتار کی یہہ ہوگی

+ لا + ی + ع جبکہ مقام نقطہ ق کا زاویہ لا ی ع مین فرض کیا جاوے

+ لا − ی + ع .... لا ی ع

− لا − ی + ع .... لا ی ع

− لا + ی + ع .... لا ی ع

+ لا + ی − ع .... لا ی ع

+ لا − ی − ع .... لا ی ع

− لا − ی − ع .... لا ی ع

− لا + ی − ع .... لا ی ع

(۳۸۲) واضح ہو کہ مقام ایک نقطہ کا ایک سطح مین تین سطحون عمودی مین سے فرض کر سکتی ہین اور اس صورتمین وہ عمود جو کہ کھچا جاوے نقطہ مفروض سی اس سطح مین = ۰ ۔ مثلاً اگر نقطہ مفروض سطح لا ی مین فرض کیا جاوے تو فاصلہ ع = ۰ اسیواسطے مساواتین نقطہ ق کی یہہ ہوگی لا = ط اور ی = ص اور ع = ۰ یا (لا − ط)² + (ی − ص)² = ۰ اور اگر نقطہ مفروض سطح لا ع مین فرض کیا جاوے تو اس صورتمین مساواتین نقطہ مفروض کی یہہ ہونگی لا = ط اور ی =

اور ع = س اور اگر نقطہ مفروض سطح ے ع مین فرض کیا جاوے تو مساواتین
یہہ ہونگی لا = ۰ اور ی = ص اور ع = س اور اگر نقطہ مفروض محور لا پر واقع
ہو تو فاصلہ اوسکا سطح لا ی اور ے ع سے = ۰ کی ہوگا اسیواسطے مساواتین
یہہ ہونگی لا = ط اور ی = ۰ اور ع = ۰ اسیطور سے دریافت ہو سکتی ہین
مساواتین نقطہ مفروض کی جبکہ مقام اوسکا باقی محورون پر فرض کیا جاوے
(۳۸۴) نقاط ق اور ر اور س شکل گذشتہ کے نقاط نشانی نقطہ ف
کی سطوح عمودی پر ہین جبکہ محور ان نقطون سے صرف وہ فرض کئے جاوین جنکے
سطح مین وہ مقیم ہین تو ظاہر ہی کہ مساواتین ق کی سطح لا ی مین یہہ ہونگی
لا = ط اور ی = ص اور مساواتین ر کی سطح لا ع مین یہہ ہونگی لا = ط
اور ع = س اور مساواتین س کی سطح ی ع مین یہہ ہونگی ی = ص اور
ع = س یہانسی یہہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر نشان ایک نقطہ کے دو سطحون عمودی
پر معلوم ہون تو نشان اوسکا تیسری سطح پر بہی دریافت ہو سکتا ہی مثلاً اگر س
اور ر معلوم ہو تو کہیچو خط س ن اور ر م متوازی ا ع کے اور ن ق اور
م ق متوازی ا لا اور ا ی کے تو اب ظاہر ہی کہ مقام ق کا آسانی سے معلوم ہو جاویگا
(۳۸۵) دریافت کرو فاصلہ ا ف نقطہ ف کا نقطہ شروع آ سے فرض
کرو کہ ا لا اور ا ی اور ا ع محور متقاطع علی القوایم ہین اور ا م = لا اور
م ق = ی اور ف ق = ع اور نار نقطہ ف کے ہین اب ظاہر ہی کہ مربع
ا ف = مربع ا ن + مربع ف ن = مربع ا م + مربع م ق + مربع ف ق

پس ا ف۲ = لا۲ + ی۲ + ع۲

(۳۸۶) فرض کرو کہ ا

اور م اور ح وہ زاوئے

ہین جو کہ ا ف بناتا ہی محور

لا اور ی اور ع سی تو لا = ا م = ا ف جم ف ا م = ف جم ا اور ی = م ق = ا ن = ا ف جم ف ا ن = ف جم م اور ع = ف ق = ا ف جسب ف ا ق = ف جم ح ∴ ف۲ = لا۲ + ی۲ + ع۲ = ف۲ (جم ا)۲ + ف۲ (جم م)۲ + ف۲ (جم ح)۲ ∴ (جم ا)۲ + (جم م)۲ + (جم ح)۲ = ۱

(۳۸۸) دریافت کرو فاصلہ درمیان دو نقطہ کے فرض کرو کہ اونار نقطہ ف کی لا اور ی اور ع اور اونار نقطہ ق کے لا۱ اور ی۱ اور ع۱ ہین تو اب ظاہر ہی کہ فاصلہ درمیان ان نقاط کے مساوی قطر اوس مکعب کا ہی جسکی متصل طرفین مساوی حاصل تفریق متوازی اونار نقاط کی ہی یعنی موافق شکل گذشتہ کے ف۲ = (لا - لا۱)۲ + (ی - ی۱)۲ + (ع - ع۱)۲ اگر فاصلہ نقطہ لا۱ اور ی۱ اور ع۱ اور نقطہ لا۲ اور ی۲ اور ع۲ نقطہ شروع سے مساوی ف۱ اور ف۲ کے فرض کیا جاوے تو صورت گذشتہ اسطرح پر لکھی جاویگی ف۲ = ف۱۲ + ف۲۲ - ۲ (لا۱ لا۲ + ی۱ ی۲ + ع۱ ع۲)

بیان خط مستقیم کا

(۳۸۹) ظاہر ہی کہ ایک خط مستقیم بیدا ہوتا ہی تقاطع کرنے دو سطحون کی سے

اور مقام اس خط کا دریافت ہوگا جبکہ مقام اون سطحون کا معلوم ہو جنکی تقاطع
سی خط مذکور پیدا ہوا ہی یہان سی معلوم ہوتا ہی کہ خط مفروض معلوم ہوسکتا ہی
بوسیلہ کھینچنی سطحون نشانی کے جنکا مقام مقرر ہوجاویگا بوسیلہ تقاطع کرنی
ان سطحون اور سطحون عمودی کے یعنی بوسیلہ کھینچنی خط نشانی مفروض کے اور
سطحون متقاطع علی القوایم کی تو اب مقام خط کا موافق قواعد ہندسہ کی دریافت
ہوجاویگا اور مقام اسکا بوسیلہ جبر مقابلہ کے معلوم ہوسکتا ہی جبکہ مساواتین
اوسکی خطوط نشانی کی سطحون متقاطع علی القوایم پر معلوم ہوجاوینگی فرض کرو کہ
محور ع وتر العرض ہی تو ظاہر ہی کہ مساوات خط نشانی کی سطح لا ی مین یہہ
ہوگی لا = ط ع + د موافق (۴) کے اور مساوات خط نشانی کی سطح ی ع
مین یہہ ہوگی ی = م ع + ص چونکہ ان دونو مساواتون سی مقام خط کا معلوم
ہوجاتا ہی اسیواسطے اونکو مساواتین خط مستقیم کی کہتے ہین —

(۳۹۰) واسطے توضیح دعوی گذشتہ کے فرض کرو کہ ف ق ایک خط ہی جسکی
مساواتین دریافت کرنی چاہتی ہین اور مان لو کہ ر س خط نشانی خط مفروض
کا سطح لا ع مین اور ط و سطح ی ع مین اور ن ل سطح لا ی مین ہی اور
فرض کرو کہ لا = ط ع + د مساوات خط ر س کی اور ی = م ع + ص
مساوات ط و کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ کسی ایک نقطہ ق کی سطح نشانی
ف ق ر س مین وہی قیمتین لا اور ع کی ہین جو اوسکا نقطہ نشانی س سا
رکھتا ہی یعنی اوتار ا م اور م س مساوی ن ل اور ل ق کی ہین یہان سی

صاف معلوم ہوتا ہی کہ
انمین ہمیشہ ایسی ہی نسبت
رہیگی - تواب معلوم
ہوا کہ مساوات
لا = طع + د
سی صرف نسبت

لا اور ع خط رس کی ہی تعبیر ہنین ہوتی ہی وہ سوا اُسکی اوس نسبت کو تعبیر کرتی ہے جو کہ درمیان تمام نقاط ط و ف رس کی ہی - اسیطرحسی مساوات ی = م ع + ص صرف ط و سی ہی تعلق نہین رکہتی وہ سطح ط د ق ف سی بہی تعلق رکہتی ہین تواب ثابت ہوا کہ دونو مساوات گذشتہ خط ف و سی تعلق رکہتی ہین جو کہ فصل مشترک درمیان سطوح نشانی کی ہی اور یہہ بہی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ دونو مساواتین صرف اسی خط کی ہو سکتی ہین - اب یہانسی معلوم ہوا کہ مساواتین خط مستقیم ف و کی یہہ ہین لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص جبکہ دور کرین ہم مقدار ع کو بوسیلہ ان مساواتونکی تو حاصل ہوگا یہہ

$\frac{1}{ط}$ (لا - د) = $\frac{1}{م}$ (ی - ص) یا ی - ص = $\frac{م}{ط}$ (لا - د) اور اس مساوات سی وہ نسبت معلوم ہوتی ہے جو کہ درمیان ا م اور م ل کے ہی اور یہہ اوتار نقطہ ل کے ہین جو کہ نقطہ تقاطع یعنی نقطہ ق خط و ف کا ہی تواب معلوم ہوا کہ یہہ مساوات خط نشانی ل ح کی سطح لا ی مین ھی -

(۳۹۱) مساواتون آینده مین لا = ط ع + د اور د = م ع + ص مقدار د تعبیر کرتی ہی اوس فاصلہ کو جو کہ درمیان نقطہ شروع اور اوس نقطہ کی ہی جہانکہ رس تقاطع کرتا ہی خط ا ل سے یعنی ط = ا ک اسیطرح سی ص = ا ص فرض کرو لا = ۰ تو ع = − د/ط = ا ہ ∴ ا ک = − ط ا ہ لیکن ا ک = ا ہ مس ا ہ ک = − ا ہ مس ع در تو اب ثابت ہوا کہ ط مماس اوس زاویہ کا ہی جو کہ رس بناتا ہی ا ع سی اور اسیطور سے معلوم ہو سکتا ہی کہ م مماس اوس زاویہ کی ہی جو رط بناتا ہی ا ع سی — نئ ثر ثر

(۳۹۲) واضح ہو کہ مقام خط مستقیم کا مختلف ہوگا موافق علامات جبریہ د اور ص اور ط اور م کے اور جونکہ اون صورتون مساوات مستقیم سے جو کہ تبدیلی علامات جبریہ مقادیر مذکور سے پیدا ہونگی کسی نوع کا تصور نہین ہوتا ہے اور حل کرنیمین انکی کسیطرح کی دقت واقع نہین ہوتی ہی اسیواسطے ہم اونکو امتحانا بیان نہین کرینگے اور اس جای صرف اون صورتون کو لکھینگے جو کہ مطلق قیمتون ط اور م اور ص اور د کی تبدیلی سی پیدا ہونگی اور علامت جبریہ کا لحاظ نہین کرینگی اب فرض کرو د = ۰ اور ص = ۰ تو لا = ط ع اور د = م ع تو اب موافق ان مساواتون کے خطوط نشانی نقطہ شروع مین سے گذرتی ہین اور اسسے معلوم ہوتا ہی کہ خط مطلوب بھی نقطہ شروع مین سے گذرتا ہی اور مساوات اتنیہ سے خط نشانی کی یہہ ہوگی د = م/ط لا فرض کرو د = ۰ تو لا = ط ع اور د = م ع + ص یہانسی ظاہر ہوتا ہی کہ خط نشانی سطح لا د مین گذرتا ہے

نقطہ شروع سی اس سے معلوم ہوتا ہی کہ خط مستقیم گذرتا ہی محور ز ع مین سے جو کہ عمود ہی سطح لا ی پر اور اگر ص = ۰ تو موافق مرقومہ بالا کی ثابت ہو سکتا ہی کہ مساواتین لا = ط ع + د اور ی = م ع تعلق رکھتی ہین اوس خط سی جو کہ گذرتا ہی محور لا مین سے اور اگر یہہ مساواتین فرض کیجاوین ی = ط لا اور ی = م ع + ص تو خط مستقیم محور ع مین سے گذریگا صورت اخیر تعبیر ہو سکتی ہی جبکہ فرض کرین شکل گذشتہ مین کہ خط ل ح گذرتا ہی نقطہ شروع ز مین سی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات خط ل ح کی یہہ ہوگی ی = ط لا اور مساوات ہ ط د کی یہہ ہوگی ی = م ع + ص اب اگر دو سطحین اسطرح کھیچی جاوین کہ ایک اُنمین سے ط د مین سی گذری اور سطح ی ع پر عمود ہو اور دوسرا ل ح مین سی گذری اور سطح لا ی پر عمود ہو تو ابظاہر ہی کہ دونو سطح نقطہ ہ مین سے گذرینگی اسیواسطی خط مطلوب بہی اس نقطہ پر گذریگا —

(۳۴۲) فرض کرو کہ م = ۰ ∴ لا = ط ع + د اور ی = ص اس سی معلوم ہوتا ہی کہ خط مطلوب اوس سطح مین ہے جو متوازی سطح لا ع کی اور اوس سے ص کی فاصلہ پر واقع ہی اگر شکل گذشتہ کو مطابق اس خاص صورت کی فرض کرین تو ظاہر ہی کہ د ط ا ی پر عمود فرض کرنا چاہئے اب صاف ظاہر ہی کہ ف ق مساوی اور متوازی خط ز ص کے ہی اور سطح ل ن و ق مین جو عمود ہی سطح لا ع پر ہی واقع ہوگا فرض کرو کہ ط = ۰ ∴ لا = د اور ی = م ع + ص اسی ثابت ہوتا ہی کہ خط مطلوب متوازی سطح ی ع کی ہی اسیطرح مساوات ع = س اور ی = ط لا + د

اوس خط سی تعلق رکھتی ہی جو واقع ہی ایک ایسی سطح مین جو متوازی ی ع کی ہی

(۳۹۴) ظاہر ہی کہ ہم ایک خط مستقیم کو ایک سطح مین سطوح متقاطع علی القوایم مین سی فرض کر سکتے ہین مثلاً فرض کرو کہ وہ واقع ہی سطح ی ع مین تو ظاہر ہی کہ مساواتین اس خط کی یہہ ہونگی ی = م ع + ص اور لا = ۰ اور اگر خط مطلوب سطح لا ع مین فرض کیا جاوے تو مساواتین یہہ ہونگی لا = ط ع + د اور ی = ۰ اور اگر سطح لا ی مین ہو تو یہہ مساواتین حاصل ہونگی ی = ط' لا + د' اور ع = ۰

(۳۹۵) اگر خط مستقیم عمود ہو ایک سطح پر سطحون متقاطع علی القوایم سی مثلاً فرض کرو کہ وہ عمود ہی سطح ی ع پر تو ظاہر ہی کہ ط اور م مساوی صفر کے ہو جاوینگی اسیواسطے مساواتین اس خط کی یہہ ہو جاوینگی لا = د اور ی = ص اور ع = ÷ اور ظاہر ہی کہ جب خط مستقیم عمود ہو سطح ی ع پر تو لا = د اور ی = ÷ اور ع = س اور مساواتین اس خط کی جبکہ یہہ فرض کیا جاوے عمود سطح ی ع پر یہہ ہونگی لا = ÷ اور ی = ص اور ع = س

(۳۹۶) دریافت کرو وہ نقاط جہانکہ خط مستقیم قطع کرتا ہی سطوح متقاطع علی القوایم کو فرض کرو لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص مساواتین خط مستقیم کی ہین تو اب ظاہر ہی کہ جب یہہ خط سطح لا ی سے ملی تو ع = ۰ ∴ لا = د اور ی = ص مساواتین نقطہ مطلوب کی ہونگی اسیطرحسی

ع = − ص/م اور لا = − ط/م ص + د مساواتین اوس نقطه کی هونگی
جهانکه خط مستقیم ملتا هی سطح لا ع سی اور ع = − د/ط اور ی = − م/ط د
+ ص مساواتین اوس نقطه کی هونگی جهانکه وه قطع کرتا هی سطح ع ی کو ۔

(۳۹۷) ظاهر هی که چار مقدارین ایک خط مستقیم کی مساواتون مین هوتی هین
اب اگر یهه چارون مقادیر معلوم هون تو مقام خط مستقیم کا معلوم هو جاویگا
کیونکه اگر فرض کرین عَ ایک خاص قیمت ع کی تو مساواتین خط مستقیم کی یهه
هونگی لا = ط ع + د = ط عَ + د = لاَ اور ی = م ع + ص = م عَ
+ ص = یَ اسی قیمتین لاَ اور عَ کی دریافت هوجاویگی قطع کرو
ا م = لاَ شکل گذشته مین اور کهینچو م ل = یَ متوازی ا ی کی اور کهینچو
ل سی عمود ل ق = عَ تو اب ظاهر هی که نقطه ق ایک نقطه خط مطلوب کا هوگا
اور اسیطور سے مختلف نقطه خط مطلوب کی معلوم کرکے مقام خط مطلوب کا معلوم
هوجاویگا واضح هو که خط مستقیم کو متوازی ایک خط کی یا گذرتا هوا ایک
نقطه مفروض مین سے فرض کر سکتے هین یعنے هم ایسی شرط فرض کر سکتی هین
جنکے وسیله سی مقادیر طَ اور مَ اور دَ اور صَ کے معلوم هوجاوینگی اسیطور سے
بهت سی شکلین پیدا هونگی جیسا که فقره (۴۰ اور ۵۰) مین بیان کی گئی
هین جهان مساوات خط مستقیم کی بلحاظ دو بعد کی دریافت کی گئی هی ۔

بیان اشکال خطوط مستقیم کا

(۳۹۸) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کی جبکه وه گذری ایک

ایک نقطه مفروض مین سے — فرض کرو که او نار نقطه مفروض کی یهه هین لا،
اور ی، اور ع، اور مساواتین اوسکی یهه هین لا = ط ع + د اور
ی = م ع + ص چونکه خط مستقیم نقطه مفروض مین سی گذرتا هی تو ظاهر هے
که خط نشانی اسکا بهی نقطه نشانی نقطه مفروض مین سے گذریگا چونکه خط نشانی
اس کا لا = ط ع + د نقطه لا، اور ع، مین سی گذرتا هی تو ظاهر هی مساوات
اس خط نشانی کی یهه هوگی لا، = ط ع، + د ∴ لا − لا، = ط (ع − ع،)
اور اسیطرحسی ی − ی، = م (ع − ع،) تو اب معلوم هوا که یهه مساواتین مطلوب
هین چونکه مقادیر ط اور م مجهول هین تو اس سی معلوم هوتا هی که لا نهایت خطوط
ایک نقطه مین سے گذرسکتی هین اگر نقطه مفروض سطح لا ی مین فرض کیا جاوے تو
ع، = ۰ ∴ لا − لا، = ط ع اور ی − ی، = م ع اگر نقطه مفروض محور
لا پر فرض کیا جاوے تو ع، = ۰ اور ی، = ۰ اور لا − لا، = ط ع اور
ی = م ع اور اسیطور سے مساواتون گذشته کی مختلف صورتین هوسکتی هین
موافق مختلف مقامون نقطه مفروض کے —

(۳۶۹) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کی جبکه وه گذری دو نقطه
(لا، اور ی، اور ع،) اور (لا۲ اور ی۲ اور ع۲) مین سے چونکه خط مستقیم
اس نقطه (لا، اور ی، اور ع،) مین سی گذرتا هی تو مساوات اس خط کی یهه
هوگی لا − لا، = ط (ع − ع،) اور ی − ی، = م (ع − ع،) اور چونکه
وه اسی نقطه (لا۲ اور ی۲ اور ع۲) مین سی بهی گذرتا هی تو مساوات خط

مطلوب کی اس صورتین یہہ ہوگی $لا_۲ - لا_۱ = ط (ع_۲ - ع_۱)$ اور
$ک_۲ - ک_۱ = (ع_۲ - ع_۱)$ ∴ $ط = \frac{لا_۲ - لا_۱}{ع_۲ - ع_۱}$ اور $\frac{ک_۲ - ک_۱}{ع_۲ - ع_۱}$ اسیواسطے
مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہوگنی $لا - لا_۱ = \frac{لا_۲ - لا_۱}{ع_۲ - ع_۱} (ع - ع_۱)$
اور $ک - ک_۱ = \frac{ک_۲ - ک_۱}{ع_۲ - ع_۱} (ع - ع_۱)$ اب ظاہر ہی کہ ان مساواتون کے
مختلف صورتین ہوسکتے ہین موافق مختلف مقامون نقاط مفروض کی مثلاً اگر
نقطہ اول سطح $\overline{ک ع}$ مین فرض کیا جاوے اور نقطہ دوسرا محور $\overline{لا}$ پر تو $لا_۱ = ۰$
اور $ک_۲ = ۰$ اور $ع_۲ = ۰$ ∴ $لا = \frac{لا_۲}{-ع_۱} (ع - ع_۱)$ اور $ک - ک_۱ =$
$\frac{ک_۱}{ع_۱} (ع - ع_۱)$ اگر نقطہ دویم نقطہ شروع پر فرض کیا جاوے تو $\overline{لا_۲}$ اور $ک_۲$
اور $ع_۲ = ۰$ اسیواسطے $لا - لا_۱ = \frac{لا_۱}{ع_۱} (ع - ع_۱) = \frac{لا_۱}{ع_۱} ع - لا_۱$
اور $ک - ک_۱ = \frac{ک_۱}{ع_۱} (ع - ع_۱) = \frac{ک_۱}{ع_۱} ع - ک_۱$ یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ
مساواتین اوس خط کی جوکہ گذرتی نقطہ شروع مین سے یہہ ہوگنی $لا = \frac{لا_۱}{ع_۱} ع$ اور
$ک = \frac{ک_۱}{ع_۱} ع$ اور یہہ مساواتین بطور آیندہ کی بہی حاصل ہوسکتی ہین فرض کرو
کہ خطوط نشانی نقطہ شروع مین سی گذرتی ہین اسیواسطے مساواتین اونکی
یہہ ہوگنی $لا = ط ع$ اور $ک = م ع$ اور جونکہ پہلا خط نقطہ $\overline{لا_۱}$ اور $ک_۱$
مین سے گذرتا ہی تو $ط = \frac{لا_۱}{ع_۱}$ اور اسیطرحسی ثابت ہوگا کہ $م = \frac{ک_۱}{ع_۱}$

(۴۰۰) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کے جوکہ متوازی ایک خط
مفروض کی ہی جونکہ خطوط متوازی ہین تو ظاہر ہی کہ سطح نشانی اونکی بہی کسی
ایک سطح پر سطح ع متقاطع علی القوایم سے متوازی ہوگنی اسیواسطے خطوط نشانی

بھی متوازی ہوگی یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساواتین خط معلوم کی یہہ فرض
کیجاوین $لا = ط ع + د$ اور $ی = م ع + ص$ تو مساواتین خط مطلوب کی
یہہ ہوگی $لا = ط ع + دَ$ اور $ی = م ع + صَ$ اگر یہہ خط نقطہ مفروض
($لا_1$ اور $ی_1$ اور $ع_1$) مین سی گذری تو اوسکی مساواتین یہہ ہوگی

$$لا - لا_1 = ط (ع - ع_1) \quad اور \quad ی - ی_1 = م (ع - ع_1)$$ ثر

(۱۰۴) دریافت کرو نقطہ تقاطع دو خط مفروض کا ظاہر ہی کہ دو خط جو کہ
واقع ہون ایک سطح مین آپس مین مل سکتے ہین لیکن جبکہ وہ سطح جو مین فرض
کیجاوین تو یہہ بات واقع نہین ہوگی تو اب ظاہر ہی کہ ایک ایسی خاص نسبت درمیان
مقادیر مقررہ خطوط معلوم کے فرض کرنے چاہئی تاکہ خطوط مفروض تقاطع کرین ایک
دوسرے کو ایک خاص نقطہ پر واسطی معلوم کرنے اس نسبت کی فرض کرو کہ $لا = ط ع + د$
اور $ی = م ع + ص$ مساواتین ایک خط کی ہین اور $لا = طَ ع + دَ$ اور $ی = مَ ع + صَ$
مساواتین دوسرے خط کی ہین ظاہر ہی کہ نقطہ تقاطع پر قیمتین لا اور ی اور ع کی مساواتون
گذشتہ مین ایک ہی ہوگی اسواسطے $ط ع + د = طَ ع + دَ \therefore ع = \frac{دَ - د}{ط - طَ}$ اور
$م ع + ص = مَ ع + صَ \therefore ع = \frac{صَ - ص}{م - مَ} \therefore \frac{دَ - د}{ط - طَ} = \frac{صَ - ص}{م - مَ}$
یا $(دَ - د)(م - مَ) = (صَ - ص)(ط - طَ)$ یہاں سی ثابت ہوا کہ
یہہ نسبت ضرور ہونی چاہئی درمیان مقادیر مقررہ کے تاکہ خطوط معلوم تقاطع ایک
دوسرے کو کرین تو اب ظاہر ہی کہ اوتار نقطہ تقاطع یہہ ہوگی $ع = \frac{دَ - د}{م - مَ}$
یا $= \frac{صَ - ص}{م - مَ}$ اور $ی = م ع + ص = م \times \frac{صَ - ص}{م - مَ} + ص =$

$= \frac{م ص' - م' ص}{م - م'}$ اور $ل = ط ع + د = ط \frac{د' - د}{ط - ط'} + د = \frac{ط د' - ط' د}{ط - ط'}$

(۲۰۴) دریافت کرو وه زاویه جو که خط (کہ) بناتا ہی محور متقاطع علی القوایم اور بوسیله اسکی دریافت کرو وه زاویه جو که خط مذکور بناتا ہی سطوح متقاطع علی القوایم سی فرض کرو که مساواتین خط معلوم کی یہه ہین $ل = ط ع + د$ اور $ی = م ع + ص$ اور ظاہر ہی که مساوات اوس خط کی جو که متوازی خط معلوم کی اور نقطه شروع مین سی گذرتا ہی یہه ہی $ل = ط ع$ اور $ی = م ع$ اور مان لو که ر مساوی اوس فاصله کی ہی جو که واقع ہی درمیان اس نقطه (ل اور ی اور ع) خط اخیر اور نقطه شروع کی $\therefore ر^۲ = ل^۲ + ی^۲ + ع^۲ = (ط^۲ + م^۲ + ۱) ع^۲$ یا $ع^۲ = \frac{ر^۲}{ط^۲ + م^۲ + ۱}$ فرض کرو که کہ ل اور کہ ی اور کہ ع تعبیر کرتے ہین مقادیر اون زاویون کے جو که خط معلوم یا وه خط جو که متوازی اسکی ہی بناتا ہی محور ل اور ی اور ع سے تو اب ظاہر ہی که بوسیله خط متوازی کے جم کہ $ل = \frac{ل}{ر} = \frac{ط ع}{ر} = \frac{ط}{\sqrt{۱ + ط^۲ + م^۲}}$ اور جم کہ $ی = \frac{ی}{ر} = \frac{م ع}{ر} = \frac{م}{\sqrt{۱ + ط^۲ + م^۲}}$ اور جم کہ $ع = \frac{ع}{ر} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + ط^۲ + م^۲}}$ اور ظاہر ہی که $(جم کہ ل)^۲ + (جم کہ ی)^۲ + (جم کہ ع)^۲ = ۱$ اور یہه مساوات تعبیر کرتی ہی نسبت اون تین زاویون کے جو که ایک خط بناتا ہی محور متقاطع علی القوایم سی — چونکه یہان محور متقاطع علی القوایم فرض کیے گئے ہین تو ظاہر ہی که وه زاویه جو ایک خط بناتا ہی ایک محور سی تامی اوس زاویه کی ہی جو که یہی خط بناتا ہی اوس سطح سی جو عمود اس محور پر ہے تو اب ظاہر ہی که اب ہمکو معلوم ہو جاوینگی وه زاویه جو که ایک خط بناتا ہی

سطوح متقاطع علی القائم سے

(۴۰۲) دریافت کرو جیب التمام اور جیب مستوی اور ماس اوس زاویہ کی جو کہ درمیان دو خط مفروض کے واقع ہی فرض کرو کہ مساواتین دو خط مستقیم کی یہہ ہین

لا = ط ع + د ، ی = م ع + ص } اور لا = طَ ع + دَ ، ی = مَ ع + صَ } یہہ دونو خط ملین یا نہ ملین

لیکن زاویہ جو درمیان انکی ہینگا مساوی ہے اوس زاویہ کی جو کہ درمیان اون دو خط کی ہینگا جو کہینچی جاوین موازی خطوط مفروض کے گذرتی ہوئی نقطہ شروع مین سے تو اب ظاہر ہی کہ صورت سوال کی یہہ ہو جاویگی دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ واقع ہی درمیان اون خطوط کی جنکی مساواتین یہہ ہین لا = ط ع ، ی = م ع } (۱) اور

لا = طَ ع ، ی = مَ ع } (۲) فرض کرو کہ ر = اوس فاصلہ کے ہی جو کہ درمیان ایک نقطہ (لا اور ی اور ع) خط (۱) اور نقطہ شروع کی واقع ہی اور ر، = اوس فاصلہ کی جو درمیان نقطہ (لا، اور ی، اور ع،) خط (۲) اور نقطہ شروع کی واقع ہی اور ف = اوس فاصلہ کی جو درمیان ان دو نقطہ کے ہی - اور ہ = اوس زاویہ کے جو درمیان خطوط معلوم کے واقع ہی — تو اب ظاہر ہی کہ ف۲ = ر۲ + ر،۲ - ۲ ر ر، جم ہ =

(لا - لا،)۲ + (ی - ی،)۲ + (ع - ع،)۲ موافق فقرہ (۳۸۸) کی = لا۲ + ی۲ + ع۲ + لا،۲ + ی،۲ + ع،۲ - ۲ (لا لا، + ی ی، + ع ع،) = ر۲ + ر،۲ -

۲ (لا لا، + ی ی، + ع ع،) ∴ ر ر، جم ہ = لا لا، + ی ی، + ع ع،

لیکن لالا۱ + ی ی۱ + ع ع۱ = ط ع ط َ ع۱ + م ع م َ ع۱ + ع ع۱ =

(ط ط َ + م م َ + ۱) ع ع۱ اور ر ر۱ = √(لا۲ + ی۲ + ع۲) √(لا۱۲ + ی۱۲ + ع۱۲)

= ع ع۱ √(ط َ۲ + م َ۲ + ۱) × √(ط۲ + م۲ + ۱) جبکہ لکھین ان قیمتون کو اِس مساوات

مین جم ہ = (لالا۱ + ی ی۱ + ع ع۱) / ر ر۱ = (ط ط َ + م م َ + ۱) / (√(ط۲ + م۲ + ۱) √(ط َ۲ + م َ۲ + ۱))

تو اب ظاہر ہی کہ جس ہ = √((ط م َ − ط َ م)۲ + (ط − ط َ)۲ + (م − م َ)۲) / (√(ط۲ + م۲ + ۱) √(ط َ۲ + م َ۲ + ۱))

اور ممس ہ = جس ہ / جم ہ = √((ط م َ − ط َ م)۲ + (ط − ط َ)۲ + (م − م َ)۲) / (ط ط َ + م م َ + ۱)

واضح ہو کہ جیب التمام اوس زاویہ کی جو درمیان دو خط معلوم کے ہی اجزائی اون زاویون سے بھی معلوم ہو سکتی ہی جو دو خط معلوم (کہ) اور (کہ۱) بنائی ہین محور متقاطع علی القوایم سی کیونکہ لا = ر جم کہ لا اور ی = ر جم کہ ی اور ع = ر جم کہ ع اور لا۱ = ر۱ جم کہ۱ لا اور ی۱ = ر۱ جم کہ۱ ی اور ع۱ = ر۱ جم کہ۱ ع۱ ∴ جم ہ = لالا۱ / ر ر۱ + ی ی۱ / ر ر۱ + ع ع۱ / ر ر۱ =

جم کہ لا جم کہ۱ لا + جم کہ ی جم کہ۱ ی + جم کہ ع جم کہ۱ ع شز

(۴۰۴) اگر خطوط مفروض متوازی ہون تو ظاہر ہے کہ جس ہ = ۰

∴ (ط م َ − ط َ م) + (ط − ط َ)۲ + (م − م َ)۲ = ۰ اور ظاہر ہی کہ شرط اس مساوات کی اوسوقت پوری ہوگی جبکہ ط = ط َ اور م = م َ اور ط م َ = ط َ م دو شرطین اول کی وہی ہین جو فقرہ (۴۰۰) مین بیان کی گئی ہین اور تیسری شرط دو اول شرطون سے نکلتی ہے یعنی اگر دو اول مساواتن کی شرط مساوات

کی برابری ہوگی تو ظاہر ہی کہ تیسری شرط بہی ان دونوں سی حاصل ہوگی

(۴۰۵) اگر خطوط مفروض ایک دوسرے پر عمود ہوں تو جم ہ = ۰

∴ ط طَ + م مَ + ۱ = ۰ یا جم کہ لا جم کہ لا + جم کہ ی جم کہ ی + جم کہ ع جم کہ ع

= ۰ واضح ہو کہ ایک خط دوسری خط پر سطح جو مین عمود اوسوقت ہوگا جبکہ

خط اول اوس سطح مین واقع ہو جو عمود خط دویم پر ہے یہانسی معلوم ہوتا ہے

کہ لانہایت خط ایک خط مفروض پر عمود ہو سکتے ہین چنانچہ مساوات گذشتہ

سے بہی جو مساوات خط عمود کی ہی معلوم ہوتا ہی کیونکہ اسمین چار مقادیر مجہول

ہین اور ایک مساوات ہی —

(۴۰۶) اگر خطوط مفروض ایک دوسری کو تقاطع بہی کرین تو موافق

فقرہ (۴۰۱) کی ایک مساوات آیندہ بہی حاصل ہوگی (دَ - د) (مَ - م)

= (صَ - ص) (طَ - ط) باوجود اس شرط کی بہی لانہایت عمود ایک دوسری خط

پر کہیچ سکتے ہین کیونکہ لانہایت سطح عمود دوسری خط پر کہیچ سکتی ہین اور ہر ایک سطح

مین لانہایت ایسی خط کہیچ سکتے ہین جو ایک خط مفروض سے ملین گے —

(۴۰۷) دریافت کرو مساوات ایک خط کی جو گذرکی نقطہ مفروضہ (لا، اور

ی، اور ع،) مین سی اور عمود ہو ایک خط پر جسکی مساوات (۱) ہی

فرض کرو کہ مساوات خط کی یہہ ہی

$$\left.\begin{array}{l} لا = ط ع + د \\ ی = م ع + ص \end{array}\right\} \quad (۱)$$

اور جبکہ یہہ نقطہ مفروض مین سے گذریگا تو صورت اسکی یہہ ہو جاویگی

$$\left.\begin{array}{l} لا - لا_۱ = طَ (ع - ع_۱) \\ اور\ ی - ی_۱ = مَ (ع - ع_۱) \end{array}\right\} (۲)$$

یہاں سے معلوم ہوتا ہی کہ دو مساواتین آیندہ حاصل ہونگی موافق شرط سوال کے $ططَ + م مَ + ۱ = ۰$ (۳)

اور $(دَ - د)(م - مَ) - (ص - صَ)(ط - طَ) = ۰$

چونکہ $دَ = لا_۱ - طَ ع_۱$ اور $صَ = ی_۱ - مَ ع_۱$ تو

$(لا_۱ - طَ ع_۱ - د)(م - مَ) - (ی_۱ - مَ ع_۱ - ص)(ط - طَ) = ۰$ (۴)

اب بوسیلہ مساواتوں (۳) اور (۴) کے قیمتین مَ اور طَ کی یہہ حاصل ہونگی

$$مَ = \frac{\{(لا_۱ - د)\ ط + ع_۱\}\ م - (ی_۱ - ص)(۱ + ط^۲)}{(ی_۱ - ص)\ م + (لا_۱ - د)\ ط - (ط^۲ + م^۲)\ ع_۱}$$

$$اور\ طَ = \frac{\{(ی_۱ - ص)\ م + ع_۱\}\ ط - (لا_۱ - د)(۱ + م^۲)}{(ی_۱ - ص)\ م + (لا_۱ - د)\ ط - (ط^۲ + م^۲)\ ع_۱}$$

اگر یہہ قیمتین مَ اور طَ کی مساوات (۲) مین لکھی جاوین توہمین حاصل ہوگی مساوات خط مطلوب کی جو ایک نقطہ مفروض سے گذر کی عمود ایک خط مفروض پر ہوگا اور خاص صورتوں میں اور طریقے استعمال مین آسکتی ہین مثلاً دریافت کرو مساوات ایک خط کی جو محور ز سی گذرتا ہی اور اسی پر عمود ہی تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین $لا_۱ = ۰$ اور $ع_۱ = ۰$ اسیواسطے مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہوگی $لا = ط ع$ اور $ی - ی_۱ = مَ ع$ لیکن خط مطلوب محور ز پر عمود بھی ہی اسیواسطے $م = ۰$ تواب ثابت ہوا کہ مساواتین خط مطلوب کی یہہ ہونگی $لا = ط ع$ اور $ی = ی_۱$ اگر محور متقاطع علی القوایم موافق اپنی مطلب فرض کیئے

جاوین تو یہہ سوال اور سوال اسکے اور سوالات بآسانی حل ہونگی اور اس طریقہ کا بیان آگی کیا جاویگا۔

باب سیوم

(۴۰۸) ظاہر ہی کہ ہر ایک سطح خیال کی جا سکتی ہی کہ وہ پیدا ہوئی ہی حرکت ایک خط سی گرد دوسرے خط کی اسطرح پر کہ پہلا خط عمود دوسرے خط پر ہو فرض کرو کہ ا نقطہ شروع محور ا لا اور ا ی اور ا ع کا ہی اور ب س د ایک حصہ سطح کا ہی اور ا کہ عمود اس سطح پر نقطہ شروع سے کہیچا گیا ہی اور ف ایک نقطہ سطح مفروض مین ہے تو اب ظاہر ہی کہ موافق تعریف مرقومہ بالا کے ہم فرض کر سکتے ہین کہ سطح مفروض پیدا ہوئی ہی حرکت کہ ف سی گرد ا کہ کے اسطرح پر کہ زاویہ ا کہ ف قایمہ ہی۔ دریافت کرو مساوات سطح مفروض کی فرض کرو کہ (لا اور ی اور ع) اوتار نقطہ ف کی ہین اور (لا، اور ی، اور ع،) اوتار نقطہ کہ کے ہین اور مان لو کہ فاصلہ ا کہ = ف

اب ظاہر ہی کہ مربع ا ف = مربع ا کہ + مربع کہ ف یعنی $لا^۲ + ی^۲ + ع^۲ =$

$ف^۲ + (لا - لا،)^۲ + (ی - ی،)^۲ + (ع - ع،)^۲ = ف^۲ + لا^۲ + ی^۲ + ع^۲$

$+ لا،^۲ + ی،^۲ + ع،^۲ - ۲ لا لا، - ۲ ی ی، - ۲ ع ع،$

∴ $۲ ($لالا$_۱ +$ ءء$_۱ +$ عع$_۱) =$ ف$^۲ +$ ف$^۲ = ۲$ف^۲ یا

لالا$_۱ +$ ءء$_۱ +$ عع$_۱ =$ ف^۲

(۴۰۹) فرض کرو $\frac{لا_۱}{ف^۲}$ = م اور $\frac{ء_۱}{ف^۲}$ = ن اور $\frac{ع_۱}{ف^۲}$ = س

اسواسطی صورت مساوات گذشتہ کی یہہ ہوگی م لا + ن ء + س ع = ۱

واضح ہو کہ یہہ مساوات سطح کی بہت آسان ہے اسیواسطے ہم اسکو سوالات آیندہ مین

استعمال کرینگی اور فرض کرو کہ $\frac{ف^۲}{لا_۱}$ = ط اور $\frac{ف^۲}{ء_۱}$ = ص اور $\frac{ف^۲}{ع_۱}$ = ہ

∴ $\frac{لا}{ط} + \frac{ء}{ص} + \frac{ع}{ہ} = ۱$ اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات بہت سہل ہی اور اسمین

مقادیر ط اور ص اور ہ تعبیر کرتی ہین اب اور اس اور اد کو جو فاصلہ

درمیان نقطہ شروع اور ادن نقاط کی ہی جہان سطح تقاطع کرتی ہی محور متقاطع

علی القوایم سی اور یہہ فاصلہ اسطرح دریافت ہو سکتا ہی فرض کرو کہ دونو ء

اور ع = ۰ ∴ $\frac{لا}{ط} = ۱$ یا اب = ط اور اسیطرحسی باقی خطوط معلوم ہو سکتے ہین

(۴۱۰) فرض کرو کہ نقطہ سطح کا تعبیر ہوتا ہی حرف ک سے اور فرض کرو وہ زاویہ

جو اک یا اف بناتا ہی محور متقاطع علی القوایم سے تعبیر ہوتی ہین ف لا اور

ف ء اور ف ع سے اور فرض کرو کہ ک لا اور ک ء اور ک ع تعبیر کرتی ہین

ادن زاویون کو جو سطح مفروض بناتی ہی محور متقاطع علی القوایم سے

اور چونکہ ا و ب زاویہ قایمہ ہی اور ا ب و وہ زاویہ ہی جو سطح محور ا لا سے

بناتی ہے ∴ ف = ط جم ف لا اور ف = ص جم ف ء اور

= ط جس ک لا = ص جم ک ء

اور ف = ہ جم ف ع
= ہ جم ک ع } اسیواسطی جبکہ لکھی جاوین قیمتین ط اور ص اور ہ
کی مساوات سطح مین تو لا جم ف لا + ی جم ف ی + ع جم ف ع = ف
یا لا جس ک لا + ی جس کہ ی + ع جس ک ع = ف

(۲۱۱) فرض کرو کہ ک ی ع تعبیر کرتا ہی اوس زاویہ کو جو سطح مفروض بناتی ہے سطح ی ع سے اور جونکہ کہ ا ب مساوی اوس زاویہ کے ہی جو سطح مفروض بناتی ہی سطح ی ع سے تو جم ف لا = جم ک ۰ ی ع اسیواسطی مساوات سطح کی یہہ ہو جاویگی لا جم ک ۰ ی ع + ی جم ک ۰ لا ع + ع جم ک ۰ لا ی = ف

(۲۱۲) جونکہ (۲۸۶) مین ثابت ہوا ہی کہ (جم ف لا)^{2} + (جم ف ی)^{2} + (جم ف ع)^{2} = ۱ تو ظاہر ہی کہ (جم ک لا ع)^{2} + (جم ک لا ع)^{2} + (جم ک لا ی)^{2} = ۱

اگر تو تعبیر کرے سطح ک کو تو سطح ث نی اس سطح کا سطوح متقاطع علی القوایم پر ا جم ک ۰ لا ی اور ا جم ک لا ع اور ا جم ک ۰ ی ع ہوگا اسیواسطے (ا جم ک لا ی)^{2} + (ا جم ک لا ع)^{2} + (ا جم ک ی ع)^{2} = ا^{2} {(جم ک ۰ لا ی)^{2} + (جم ک ۰ لا ع)^{2} + (جم ک ۰ ی ع)^{2}} = ا^{2} اب ظاہر ہے کہ موافق (۲۱۲) کی اس مساوات کی جو عدد دونین نکلین گی سعیہ واسطے دریافت کرنی اوس سطح کی ہونگی جو متعلق ہین محور متقاطع علی القوایم سی مثلاً اگر مساوات سطح کی یہہ ہو $\frac{لا}{ط}$ + $\frac{ی}{ص}$ + $\frac{ع}{ہ}$ = ۱ اور ظاہر ہی تو سطح یہ شکل گذشتہ کے سطح ا ب س = $\frac{ط ص}{۲}$ اور سطح ا د س = $\frac{ص ہ}{۲}$ اور سطح ا ب د = $\frac{ط ہ}{۲}$ تو ا بظاہر ہے کہ سطح ب س د = $\sqrt{\frac{۱}{۴}(ط^{2} ص^{2} + ط^{2} ہ^{2} + ص^{2} ہ^{2})}$ اور ظاہر ہی کہ

مخروط ا س ب د = $\frac{ہ}{۳} \cdot \frac{ط ص}{۲} = \frac{ہ ط ص}{۶}$

(۳۱۳) دریافت کرو وہ زاویے جو ایک سطح بناتی ہے سطوح متقاطع علی القوایم سے اور قیمت ان زاویون کی ایسی اجزاء مین دریافت کرنی منظور ہے جو امثال سطح مذکور کی مساوات کی ہین فرض کرو کہ مساوات سطح مفروض کی یہہ ہے

م لا + ن ی + س ع = ۱ اور مساوات ایک خاص سطح کی اجزای اون اونہین مین جو وہ سطح بناتی ہے سطوح متقاطع علی القوایم سے موافق فقرہ (۲۱۱) یہہ ہوگی

لا جم ک ی ع + ی جم ک . لا ع + جم ک . لا ی = ف تو اب بوسیلہ اس مساوات اور مساوات گذشتہ کی م = جم ک . ی ع / ف اور ن = جم ک لا ع / ف

س = جم ک . لا ی / ف

∴ م^۲ + ن^۲

+ س^۲ = ۱ / ف^۲ ∴ ف = ۱ / √(م^۲ + ن^۲ + س^۲) تو اب ظاہر ہے کہ

جم ک . ی ع = م ف = م / √(م^۲ + ن^۲ + س^۲) اور جم ک . لا ع = ن ف

= ن / √(م^۲ + ن^۲ + س^۲) اور جم ک . لا ی = س ف = س / √(م^۲ + ن^۲ + س^۲)

(۳۱۴) ایک سطح کی مساوات کی مختلف صورتین ہوسکتی ہین موافق مختلف مقام سطح کے فرض کرو کہ سطح نقطہ شروع مین سے گذرتی ہے تو اب ظاہر ہے کہ ف = ۰ تو اب جسوقت لکہین فقرہ (۳۰۸) مین ف = ۰ تو حاصل ہوگی یہی مساوات ایسی سطح کی جو گذرتی ہے نقطہ شروع مین سے اور جونکہ مساوات سطح کی دریافت ہوئی تہی جبکہ مقدار ف کی محدود فرض کی گئی تہی اسیواسطے ہم اس خاص صورت کو علیحدہ ثابت کرینگے اور اسکے ثبوت مین مساوات مذکور کی استعانت

نہین ہین گی — فرض کرو کہ او (= ف) طول ایک عمود کا ہی جو کہینچا ہوا ہی سطح مفروض سے نقطہ معلوم و تک اور فرض کرو کہ اوتار نقطہ و کی $لا_۱$ اور $ی_۱$ اور $ع_۱$ ہین اور فرض کرو کہ لا اور ی اور ع اوتار نقطہ ف کے ہین جو سطح مفروض ہین واقع ہی تو اب ظاہر ہی کہ $و ف^۲ = او^۲ + ا ف^۲$ یا $(لا - لا_۱)^۲ +$

$$(ی - ی_۱)^۲ + (ع - ع_۱)^۲ = ف^۲ + لا^۲ + ی^۲ + ع^۲ \therefore$$

$$-(لا لا_۱ + ی ی_۱ + ع ع_۱) + ف^۲ = ف^۲$$

یعنے $لا لا_۱ + ی ی_۱ + ع ع_۱ = ۰$

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ مساوات اسی خاص صورتین ویسی ہی ثابت ہوئی ہی جیسی مساوات عام ثابت ہوئی تہی سوای مقدار مقررہ کی یعنی دونون صورتونمین صرف فرق مقدار مقررہ کا ہی

(۴۱۵) فرض کرو کہ سطح مفروض متوازی ایک سطح کی سطوح متقاطع علیہ ہی مثلاً فرض کرو کہ وہ متوازی سطح لا ی کی ہی تو اب ظاہر ہی کہ $ط = \infty$ اور $ص = \infty$ اسیواسطی صورت مساوات $\frac{لا}{ط} + \frac{ی}{ص} + \frac{ع}{ہ} = ۱$ یہہ ہوجاویگی $۰ . لا + ۰ . ی + \frac{ع}{ہ} = ۱ \therefore ع = ہ$ اور $لا = \frac{۰}{۰}$ اور $ی = \frac{۰}{۰}$ مساوات اول سے معلوم ہوتا ہی کہ ہرایک نقطہ سطح کا مساوی فاصلہ پر سطح لا ی سے ہی اور باقی دو مساواتون سے معلوم ہوتا ہی کہ واسطی اس خاص قیمت ع کے ہرایک ممکن قیمت لا اور ی کی سے نقاط سطح کی حاصل ہوسکتے

دونو مساوات اخیر کو اکثر استعمال مین نہین لاتے ہین اسیواسطے مساوات اوس

سطح کی جو متوازی سطح لا ی کے ہو یہہ ہی ع = ہ اور اسیطرحسی مساوات اوس

سطح کی جو متوازی سطح لا ع کے ہو یہہ ہوگی لا = ط اور اوس سطح کی متوازی ی ع کے

ہو یہہ ہوگی ی = ص اور مساواتین سطح متقاطع علی القوایم کی مثلاً سطح لا ی کی

یہہ ہوگی ع = ۰ اور لا = ۰ اور ی = ۰ یا اختصاراً اسطرح تعبیر کیجاوینگی

ع = ۰

(۳۱۶) خطوط ب س اور ب د اور د س جس جای سطح مفروض تقاطع کرتی

ہی سطوح متقاطع علے القوایم سی نقوش سطح مفروض کے کہلاتی ہین مساواتین

ان نقوش کی دریافت ہوسکتی ہین بوسیلہ فرض کرنے خاص قیمت لا اور ی

اور ع کے جو وہ حاصل کرتی ہین جبکہ سطح مفروض قطع کرتی ہی سطوح متقاطع علے

القوایم کو۔ فرض کرو کہ مساوات سطح مفروض کی یہہ ہی م لا + ن لا + ہ ع = ۱

توظاہر ہی کہ مساواتین خط ب س کی یہہ ہونگی ع = ۰ اور م لا + ن ی = ۱

اسیطرحسی مساواتین نقوش ب د اور س د کی یہہ ہونگی

ی = ۰ اور م لا + ہ ع = ۱

لا = ۰ اور ن ی + ہ ع = ۱

بیان اشکال سطح کا

(۳۱۷) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو متوازی ایک سطح مفروض کی ہے

فرض کرو کہ مساوات سطح مفروض کی یہہ ہی م لا + ن ی + ہ ع = ۱ اور سطح

مطلوب کی یہہ م َ لا + ن َ ی + ہ َ ع = ا جونکہ سطوح متوازی ہین تو ظاہر ہے
کہ نقوش انکی بہی سطوح متقاطع علے القوایم پر متوازی ہونگی اب ظاہر ہی کہ
نقوش انکی سطح لاع پر م لا + ہ ع = ا اور م َ لا + ہ َ ع = ا : م/ہ = م َ/ہ َ
یا م َ = م/ہ ہ َ اسیطورسی ن َ = ن/ہ ہ َ یہانسی ثابت ہوا کہ مساوات
مطلوب یہہ ہی م/ہ ہ َ لا + ن/ہ ہ َ ی + ہ َ ع = ا یعنے م لا + ن ی
+ ہ ع = ہ/ہ َ ظاہر ہی کہ اس مساوات مین مقدار ہ َ مجہول ہی اور اس سے
معلوم ہوتا ہی کہ لانہایت سطوح متوازی ایک سطح مفروض کہیچ سکتے ہین
اور یہہ موافق تحریر اقلیدس کے بہی صحیح ہی اور ظاہر ہی کہ یہان تین شرطین
معلوم ہین کیونکہ تین نقش ایک سطح متوازی دوسری سطح کی تین نقش
کی ہین اور اگر نقوش دو سطح پر سطوح متقاطع علی القوایم سے متوازی ہون
تو تیسری سطح پر بہی متوازی ہونگی کو اسطیکہ م/ہ = م َ/ہ َ اور ن/ہ = ن َ/ہ َ
: م/ن = م َ/ن َ یا م لا + ن ی = ا موازی اسکی ہی م َ لا + ن َ ی = ا
بس یہانسی معلوم ہوا کہ دو شرطین دی گئی ہین واسطے معلوم کرنے تین مقادیر
مقررہ کے

(۱۸۴) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو متوازی ایک سطح مفروض کی ہو
اور نقطہ مفروض (لا ا اور ی ا اور ع ا) مین سے گذرے فرض کرو کہ مساوات
سطح مطلوب کی یہہ ہی م َ لا + ن َ ی + ہ َ ع = ا اور جونکہ سطح نقطہ
مفروض (لا ا اور ی ا اور ع ا) مین گذرتی ہی تو صورت مساوات گذشتہ کی

یہہ ہوجاویگی م َ (لا ـ لا۱) + ن َ (ی ـ ی۱) + ہ َ (ع ـ ع۱) = ۰

اور یہہ شرطین بہی حاصل ہونگی م َ/ہ َ = م/ہ اور ن َ/ہ َ = ن/ہ

∴ م/ہ ہ َ (لا ـ لا۱) + ن/ہ ہ َ (ی ـ ی۱) + ہ َ (ع ـ ع۱) = ۰

یا م (لا ـ لا۱) + ن (ی ـ ی۱) + ہ (ع ـ ع۱) = ۰

(۳۱۹) دریافت کرو نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم اور ایک سطح کا

فرض کرو کہ م لا + ن ی + ہ ع = ۱ مساوات ایک سطح مفروض کی ہے

اور لا = ط ع + د
اور ی = ح ع + ص } مساواتین ایک خط کی ہین

اور چونکہ اونکا نقطہ تقاطع کے مشترک ہوتی ہین یعنی جو اوناکہ اس نقطہ پر خط کی ہونگی وہی اس نقطہ پر سطح کی ہونگی ∴ م (ط ع + د) + ن (ح ع + ص)

+ ہ ع = ۱ ∴ ع = (۱ ـ م د ـ ن ص)/(م ط + ن ح + ہ) اور لا = ط ع + د =

(ط ـ ن ص د + ن ح د + ہ د)/(م ط + ن ح + ہ) اور ی = ح ع + ص =

(ح ـ م د ح + م ط ص + ہ ص)/(م ط + ن ح + ہ) اور ان مساواتون سے نقطہ تقاطع معلوم ہوجاویگا

(۳۲۰) دریافت کرو ایسی شرطین موافق جنکے ایک خط مستقیم اور ایک سطح متوازی منطبق ہوجاوین — اگر وہ متوازی ایک دوسری کی ہین تو ظاہر ہی کہ قیمتین لا اور ی اور ع کی لانہایت ہونگی ∴ م ط + ن ح + ہ = ۰

اور اگر وہ منطبق ہونگی تو قیمتین لا اور ی اور ع کی غیر منقطع ہونگی یا ہر واحد = ۰/۰ ∴ م ط + ن ح + ہ = ۰ اور ۱ ـ م د ـ ن ص = ۰

اور یہہ دو شرطین اوس صورت مین صادق آوینگی جبکہ سطح اور خط منطبق ایک
دوسری پر ہونگی اور شمار کنندہ لا اور ی کی بوسیلہ مساواتون گذشتہ سکے
ہر واحد = ۰ حاصل ہونگی یہانسی ثابت ہوا کہ واسطے دریافت کرنی ایک
سطح سکے جو ایک خط پر منطبق ہو یہہ شرطین پیدا ہونگی م د + ن ص = ۱ اور
م ط + ن ح + ہ = ۰ ان دونو مساواتونسی یہہ حاصل ہوگا

م = (ح + ہ ص) / (د ح − ص ط) اور ن = − (ط + ہ د) / (د ح − ص ط) تو اب ظاہر ہی کہ مساوات
سطح کی یہہ ہوگی (ح + ہ ص) لا − (ط + ہ د) ی + ہ (د ح − ص ط) ع =
د ح − ص د اور اس مساوات مین ہ غیر منقطع ہے ۔

(۴۲۱) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو منطبق ہو دو خط مفروض پر —
فرض کرو کہ مساوات سطح کی یہہ ہی م لا + ن ی + ہ ع = ۱ اور مساواتین
خطوط معلوم کے یہہ ہین لا = ط ع + د ، ی = ح ع + ص ۔ اور لا = ط' ع + د' ، ی = ح' ع + ص' اور شرطین
اوس سطح کی جو منطبق ہو خطوط مفروض پر یہہ ہونگی م د + ن ص = ۱ (۱)
اور م د' + ن ص' = ۱ (۲)
اور م ط + ن ح + ہ = ۰ (۳)
م ط' + ن ح' + ہ = ۰ (۴) مساوات (۱) اور (۲) سی قیمتین
م اور ن کی حاصل ہونگی اور جبکہ لکھین ان قیمتون م اور ن کو مساواتون
(۳) اور (۴) مین تو دو قیمتین ہ کی حاصل ہونگی اور اب مساوات آیندہ حاصل ہوگی

(حَ - ح) (د - دً) + (طَ - ط) (ص - صَ) = ٠ اور شرط اس مساوات

کی پوری ہوگی جبکہ خطوط متوازی ہونگی (اور اس صورتمین طً = ط اور حً = ح)

یا جبکہ وہ ملاقی ہونگی یہا ںسی معلوم ہوا کہ ایک سطح کہیچ سکتی ہی دو تصور نونمن اس

طرحپر کہ وہ منطبق ہو دو خط معلوم پر ۔ جبکہ لکہین قیمتون مَ اور نَ اور ہَ

کو تو مساوات سطح کی یہہ حاصل ہوگی (صَ - ص) لا - (دً - ط) ی +

{(دً - د) ح + (صَ - ص) ط} ع = د صَ - ی ص

(٤٢٢) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو منطبق ہو ایک خط پر اور متوازی

دوسری خط کی ہو اب ظاہر ہی کہ موافق شرط سوال کے تین مساواتین آیندہ حاصل

ہونگی م د + ن ص = ١ } جبکہ سطح ایک خط پر منطبق ہو
م ط + ن ح + ہ = ٠

اور م طَ + ن حً + ہ = ٠ جبکہ سطح مطلوب متوازی دوسری خط کی ہو

اور بوسیلہ ان تینون مساواتون کے مقادیر مَ اور نَ اور ہَ دریافت ہوسکتی ہیں

اور جبکہ لکہین ان قیمتون کو سطح کی مساوات عام مین تو ہمین مساوات مطلوب حاصل ہوگی

(٤٢٣) دریافت کرو تقاطع دو سطح معلوم کا فرض کرو کہ مساواتین دو سطح کی

یہہ ہین م لا + ن ی + ہ ع = ١ اور مَ لا + نَ ی + ہَ ع = ١ جبکہ

دور کرین ع کو بوسیلہ ان دو مساوات کی تو حاصل ہوگی ایک ایسی مساوات

جسمین مقادیر لاَ اور یَ کی باقی جاوینگے اور یہہ مساوات تعلق رکہی گی

اوس تقاطع دو سطح سی جسکا نشان سطح لا ی پر ہے اور مساوات اسکی یہہ ہوگی

(م ہَ — مَ ہ) لا + (ن ہَ — نَ ہ) ی = ہَ — ہ اور اسیطرحسی یہہ

(م نَ — مَ ن) لا + (ہ نَ — ہَ ن) ع = نَ — ن مساوات اوس خط

نثانی کی سطح لا ع پرجو تقاطع کرنے دو سطح کی سی پیدا ہوا ہی اور چونکہ مساواتین

ایک خط نثانی کی دو سطح متقاطع علی القوایم پر مساواتین خط مطلوب کی ہوتی ہین

تواب ثابت ہوا کہ مساواتین گذشتہ مساواتین اوس خط کی ہین جو تقاطع کرنی

دو سطح کی سی پیدا ہوتا ہی اور تیسرا خط نثانی بوسیلہ دو باقی خط نثانی کے

معلوم ہوسکتا ہی اور وہ علیحدہ بغیر انکی استعانت کی بہی دریافت ہوسکتا ہی اور

مساوات اوسکی یہہ ہوگی (ن مَ — نَ م) ی + (ہ مَ — م ہَ) ع = مَ — م

(۴۲۴) دریافت کرو تقاطع تین سطح کا یعنی وہ نقطہ جو تقاطع کرنی تین

سطح کی سی پیدا ہوگا فرض کرو کہ مساواتین اوس خط کی جو تقاطع کرنی سطح

اول اور دویم سی پیدا ہوگا موافق فقرہ گذشتہ کے لا = ط ع + د

اور ی = م ع + ص

اور فرض کرو کہ فصل مشترک سطح اول اور سیوم کا مساوات آیندہ سی تعبیر

ہوتا ہی لا = طَ ع + دَ

ی = مَ ع + صَ اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ دریافت کرنی تقاطع

ان دو خط کی بوسیلہ چار مساواتوں گذشتہ کے ہمین حاصل ہوگی قیمتین لا اور

ی اور ع اور یہہ موافق نقطہ تقاطع دو خط کی ہوگی اور ظاہر ہی کہ یہہ نقطہ فی

الحقیقت نقطہ تقاطع تین سطح مفروض کا ہوگا — اسیطور سے دریافت ہوسکتی ہی

نسبت درمیان امثال کی سطوح کے جو ملتی ہین ایک نقطہ پر

(۵۲۴) دریافت کرو نسبت درمیان امثال مساواتون چار سطح کے جبکہ وہ ملین ایک خط مستقیم پر۔ فرض کرو کہ مساواتین سطوح مفروض کی یہہ ہین

م لا + ن ی + ہ ع = ۱

م۱ لا + ن۱ ی + ہ۱ ع = ۱

م۲ لا + ن۲ ی + ہ۲ ع = ۱

م۳ لا + ن۳ ی + ہ۳ ع = ۱

تواب ظاہر ہی کہ سطح اول اور دویم تقاطع کرینگی ایک خط پر جسکی مساواتین یہہ ہونگی

لا = ط ع + د

ی = م ع + ص اور تقاطع کرنے سطح اول اور تیسرے سی حاصل ہونگی یہہ مساواتین

لا = ط۱ ع + د۱

ی = م۱ ع + ص۱ اور سطح اول اور چوتہی تقاطع کرینگی ایک خط پر جسکی مساواتین یہہ ہونگی لا = ط۲ ع + د۲

ی = م۲ ع + ص۲ اب ظاہر ہی کہ جب یہہ خطوط منطبق ہون ایک دوسرے پر تو ط = ط۱ = ط۲ اور م = م۱ = م۲ اور د = د۱ = د۲ اور ص = ص۱ = ص۲ اور قیمتین ط اور م اور د اور ص کی بجزای م اور ن اور ہ وغیرہ مین معلوم ہو سکتی ہین بوسیلہ فقرہ (۴۲۴) کی تواب ظاہر ہی کہ نسبت درمیان امثال کی دریافت ہو گئی ہے یہی نسبت درمیان امثال کی سطحون کے مساواتون

کی ہوگی جبکہ وہ ایک نقطہ پر ملین — ثۂ ثۂ ثۂ

(۴۲۶) دریافت کرو نسبت درمیان اشکال مساوات ایک خط اور ایک سطح کی جبکہ وہ عمود ایک دوسری پر ہون فرض کرو کہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) اوتار اوس نقطہ کی ہین جہانکہ سطح اور خط ملتی ہین تو اب ظاہر ہی کہ مساوات سطح کی یہہ ہوگی

م (لا − لا۱) + ن (ی − ی۱) + ہ (ع − ع۱) = ۰ (۱) اور مساواتین

خط کی یہہ ہونگی لا = طع + د
ی = حع + ص } ..... (۲) اور فرض کرو کہ مساواتین ایک

خط کی جو عمود (۲) پر اور نقطہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) مین جو (۲) مین ہے گذرتا ہی

یہہ ہین لا − لا۱ = طَ (ع − ع۱)
ی − ی۱ = حَ (ع − ع۱) } (۳) اور چونکہ یہہ خطوط عمود ایک دوسرے

پر ہین اسیواسطی جیب التمام اوس زاویہ کا جو درمیان انکی واقع ہی = ۰

∴ ططَ + ححَ + ۱ = ۰ موافق فقرہ (۴۰۲) کی اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ اس مساوات اور مساوات (۳) کے ہمکو نسبت درمیان اوتار لاَ اور یَ اور عَ کے دریافت ہوجاویگی اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ وہ نقطہ جسی یہہ اوتار تعلق رکھتی ہین اوس خط مین سی جو عمود خط معلوم پر ہی نہانسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر لکھین قیمتین طَ اور حَ کی مساوات گذشتہ مین تو ہمکو حاصل ہوگی ایک مساوات ایسی سطح کی جو لوکس تمام اون خطوط کا ہی جو عمود (۲) پر ہین اور وہ یہہ مساوات ہی

ط (لا − لا۱)/(ع − ع۱) + ح (ی − ی۱)/(ع − ع۱) + ۱ = ۰ یا

ط (لا - لا۱) + م (ی - ی۱) + (ع - ع۱) = ۰ (۴) اور چونکہ
لوکس مساوات (۴) کا لوکس (۲) پر منطبق ہونا چاہئیے اسی واسطے جبکہ لکھین امثال
دونوں مساواتوں کی مساوے ایک دوسری کی تو حاصل ہوگا یہہ ط = م/ہ
اور م = ن/ہ اور یہی شرطین مطلوب ہین —

(۴۲۷) یہان سے معلوم ہوتا ہی کہ اگر خط معلوم ہو تو مساوات اوس سطح کی جو عمود
اسپر ہی یہہ ہوگی ہ لا + م ی + ع = ۱/ہ اور اگر سطح معلوم ہو تو مساواتین
خط کی جو عمود اسپر ہی یہہ ہونگی لا = م/ہ ع + د اور ی = ن/ہ ع + ص
صورت مساوات سطح اور خط سی معلوم ہوتا ہی کہ نقش سطح کا عمود ہے خط مذکور کی
اوس خط نشانی پر جو اوسی سطح سے متقاطع علی القوایم پر کھینچا گیا ہی

(۴۲۸) اگر سطح نقطہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) مین سے گذری اور عمود اوس خط
معلوم پر ہو جسکی مساواتین یہہ ہین (لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص)
تو مساوات سطح مذکور کی یہہ ہوگی ط (لا - لا۱) + م (ی - ی۱) + ع - ع۱ = ۰

(۴۲۹) اگر خط مستقیم ایک نقطہ معلوم مین سے گذری اور عمود اس سطح پر ہو
(م لا + ن ی + ہ ع = ۱) تو مساواتین اوس خط کی یہہ ہونگی
لا - لا۱ = م/ہ (ع - ع۱) اور ی - ی۱ = ن/ہ (ع - ع۱) ۔

(۴۳۰) دریافت کرو طول ایک عمود کا جو کھینچا جاوے ایک نقطہ معلوم سے سطح معلوم پر
فرض کرو کہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) اوتار نقطہ معلوم کی ہین اور
م لا + ن ی + ہ ع = ۱ مساوات سطح معلوم کی ہی فقرہ (۴۱۳) مین ثابت

ہوا ہی کہ اگر ف طول اوس عمود کا ہو جو کھینچا جاوے نقطہ شروع سے اوس سطح پر جسکی
مساوات یہہ ہی $م لا + ن ی + ہ ع = ۱$ تو $ف = \frac{۱}{\sqrt{م^{۲} + ن^{۲} + ہ^{۲}}}$ اور ظاہر
ہی کہ مساوات اوس سطح کی جو متوازی سطح معلوم کی ہی اور نقطہ مفروض مین سے گذرتا ہی
یہہ ہی $م (لا - لا_{۱}) + ن (ی - ی_{۱}) + ہ (ع - ع_{۱}) = ۰$ (۴۱۸)
اسیواسطی فاصلہ $ف_{۱}$ نقطہ شروع کا اس سطح سی یہہ ہوگا
$ف_{۱} = \frac{م لا_{۱} + ن ی_{۱} + ہ ع_{۱}}{\sqrt{م^{۲} + ن^{۲} + ہ^{۲}}}$ لیکن ظاہر ہی کہ فاصلہ نقطہ مفروض کا سطح
معلوم سی یہہ ہی $= ف_{۱} - ف = \frac{م لا_{۱} + ن ی_{۱} + ہ ع_{۱} - ۱}{\sqrt{م^{۲} + ن^{۲} + ہ^{۲}}}$

(۴۳۱) دریافت کرو فاصلہ ایک نقطہ کا ایک خط مفروض سی فرض کرو کہ مساوات
خط مفروض کی یہہ ہی $لا = ط ع + د$ اور $ی = م ع + ص$ تو اب ظاہر ہی کہ
مساوات اوس سطح کی جو نقطہ معلوم ($لا_{۱}$ اور $ی_{۱}$ اور $ع_{۱}$) مین سے گذرتی عمود
خط مفروض پر ہو یہہ ہی $ط (لا - لا_{۱}) + م (ی - ی_{۱}) + ع - ع_{۱} = ۰$ اور اب
بوسیلہ مساواتون گذشتہ کی یہہ حاصل ہوگا $ع = \frac{ط (لا_{۱} - د) + م (ی_{۱} - ص) + ع_{۱}}{۱ + ط^{۲} + م^{۲}}$
فرض کرو کہ یہہ کسر $= \frac{ب}{ی}$ تو $ع = \frac{ب}{ی}$ اور $لا = ط \frac{ب}{ی} + د$ اور
$ی = م \frac{ب}{ی} + ص$ یہہ اوتار اوس نقطہ تقاطع کی ہین جو پیدا ہوا ہی تقاطع کرنے
خط معلوم اور سطح کی سی جو گذرتی ہی نقطہ معلوم مین سے اور عمود مطلوب (ک) فاصلہ
نقطہ معلوم کا اس نقطہ تقاطع سے ہی اسیواسطی $ک^{۲} = (لا_{۱} - لا)^{۲} + (ی_{۱} - ی)^{۲}$
$+ (ع - ع_{۱})^{۲} = (لا_{۱} - د - ط \frac{ب}{ی})^{۲} + (ی_{۱} - ص - م \frac{ب}{ی})^{۲} + (ی_{۱} - \frac{ب}{ی})^{۲}$
اور صورت اس مساوات کی بعد مجذور لینی اور اختصار کی یہہ حاصل ہوگی

$$ک^2 = (لا - د)^2 + (ی - ص)^2 + ع^2 - \frac{ب^2}{ن^2}$$

(۴۳۲) اگر نقطہ معلوم نقطہ شروع فرض کیا جاوے تو لا، اور ی، اور ع،

ہر واحد = ۰ ∴ $ک^2 = د^2 + ص^2 - \frac{(ط د + م ص)^2}{۱ + ط^2 + م^2}$

(۴۳۳) دریافت کرو زاویہ ر جو درمیان دو سطح معلوم کی واقع ہی - فرض

کرو کہ مساواتین سطوح معلوم کی یہہ ہین $م لا + ن ی + ہ ع = ۱$ (۱)

$م، لا + ن، ی + ہ، ع = ۱$ (۲)

اگر کھینچین ہم عمود نقطہ شروع سے ہر ایک سطح پر سطوح معلوم سی تو ظاہر ہی کہ زاویہ درمیان ان دو عمودون کے مساوی اوس زاویہ کی ہوگا جو مابین سطوح معلوم کے واقع ہی فرض کرو کہ مساواتین ان خطون کی یہہ ہین

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = ط ع \\ ی = ح ع \end{array} \right. \quad (۳)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = طَ ع \\ ی = حَ ع \end{array} \right. \quad (۴)$$

واسطی اسبات کی کہ (۳) عمود (۱) پر ہو جاوے ہمکو یہہ فرض کرنا چاہئی $ط = \frac{م}{ہ}$ اور $ح = \frac{ن}{ہ}$ موافق فقرہ (۴۲۶) کے اور اسیطرح سی $طَ = \frac{م،}{ہ،}$ اور $حَ = \frac{ن،}{ہ،}$ تو اب ظاہر ہی کہ زاویہ درمیان عمودون کی یعنی زاویہ جو مابین سطوح کے واقع ہی صورت آیندہ سی معلوم ہوجائیگا

$$جم ر = \frac{ط طَ + ح حَ + ۱}{\sqrt{(۱ + ط^2 + ح^2)} \sqrt{(۱ + طَ^2 + حَ^2)}} \quad (۴۰۳)$$ اسیواسطی

$$جم ر = \frac{م م، + ن ن، + ہ ہ،}{\sqrt{م^2 + ن^2 + ہ^2} \sqrt{م،^2 + ن،^2 + ہ،^2}}$$

(۴۳۴) واضح ہو کہ ہم اس قیمت ر کو ایک اور صورت مین بوسیلہ (۴۱۴) کے لکھہ سکتی ہین اور وہ یہہ ہی $جم ر = جم ک لا جم کَ لا + جم ک ی جم کَ ی + جم ک ع جم کَ ع$

یا جم ر = جم ک ی ع جم ک َ ی ع + جم ک لا ع جم ک َ لا ع + جم ک لا ی جم ک َ لا ی

(۴۳۵) اگر سطوح مفروض عمود ایک دوسری پر ہون تو ظاہر ہی کہ

جم ر = ۰ ∴ م م۱ + ن ن۱ + ہ ہ۱ = ۰ تو اب یہا نسی معلوم ہوا کہ اگر

مساوات کسی سطح کی یہہ ہو م لا + ن ی + ہ ع = ۱ تو مساوات اوس

سطح کی جو عمود اوس پر ہی یہہ ہوگی م۱ لا + ن۱ ی ـ (م م۱ + ن ن۱)/ہ ع = ۱

اور اسمین دو مقدار مقررہ غیر منقطع ہین —

(۴۳۶) اگر سطوح مفروض متوازی ہون تو جم ر = ۱ تو اب اگر لکھین جم ر

کی مساوی لہ/ہ ثو = اکی تو آخر کو یہہ حاصل ہوگا م/ن = م۱/ن۱ اور م/ہ = م۱/ہ۱

اور یہہ وہی نتیجہ ہی جو ہمنی ابہی متوازی سطوح مین حاصل کیا ہے

(۴۳۷) دریافت کرو ایک زاویہ جو درمیان ایک خط مستقیم اور ایک سطح کے

واقع ہی ظاہر ہی کہ یہہ زاویہ مساوی اوس زاویہ کی ہی جو کہ یہی خط بناتا ہی

سطح نشانی سطح مذکور کی سی اب اگر کہینچین ایک عمود کسی نقطہ خط مفروض سے

سطح مفروض پر تو زاویہ مطلوب تمامی اوس زاویہ کا ہوگا جو عمود مذکور خط مفروض

سی بناتا ہی فرض کرو کہ مساواتین سطح اور خط کی یہہ ہین م لا + ن ی + ہ ع = ۱

اور لا = ط ع + د اور ی = ح ع + ص اور مساواتین اوس عمود کی

جو کہینچا جاوے اس نقطہ (لا اور ی اور ع) سی جو خط مفروض مین واقع ہی سطح

معلوم پر یہہ ہوینگی لا = م/ہ (ع ـ ع۱) اور ی = ن/ہ (ع ـ ع۱)

موافق (۴۲۹) کے ∴ جم (ط/۲ ـ ر) = جس ر =

$$= \frac{ط\frac{ج}{ه} + ح\frac{ن}{ه} + ۱}{\sqrt{۱+ط^۲+ح^۲}\sqrt{۱+\frac{ج^۲}{ه^۲}+\frac{ن^۲}{ه^۲}}} = \frac{م ط + ن ح + ه}{\sqrt{۱+ط^۲+ح^۲}\sqrt{م^۲+ن^۲+ه^۲}}$$

باب چہارم

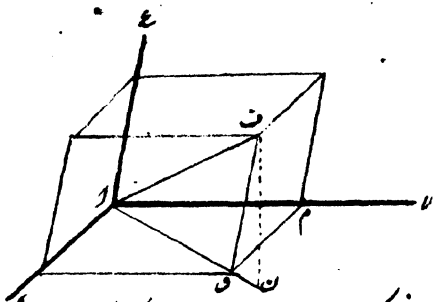
بیان نقطہ اور خط مستقیم اور سطح مین جبکہ محور ترچھی فرض کئے جاوین —

(۴۳۸) اگر محور متقاطع علی القوایم نہون اور وہ ایک خاص زاویہ بناوین تو انکو ترچھی محور کہتی ہین مساواتین نقطہ کی اس صورتین وہی ہونگی جو فقرہ (۳۸۱) مین ثابت ہوئی ہین مگر مقادیر ط اور ص اور س وغیرہ جنکو تعبیر کرتی تہین ان خطوط کو جو عمود سطوح متقاطع علی القوایم پر کہینچے گئے تہی لیکن اسجای تعبیر کرینگی ان خطوط کو جو متوازی ترچھی محوروں کی کہینچے جاوینگے —

(۴۳۹) دریافت کرو فاصلہ ایک نقطہ کا نقطہ شروع سے بلحاظ ترچھی محوروں کی فرض کرو کہ ا لا اور ا ی اور ا ع ترچھی محور ہین اور مان لو کہ لا اور ی اور ع اوس نقطہ ف کی ہین کہینچو خط ا ن کو اور قایم کرو اسپر عمود ف ن تو اب ظاہر ہے

مربع ا ف = مربع ا ن + مربع ف ن + دوچند سطح ا ن اور ق ن اور

ق ن = ف ق جم ف ق ن = ع جم ع ا ق اور ا ن جم ع ا ق = ا م جم ا ع + ی جم ی ا ع موافق فقرہ (۳۷۹) = لا جم لا ا ع + ی جم ی ا ع

∴ سطح ا ن اور ق ن = ع (لا جم لا ا ع + ی جم ی ا ع) اور مربع ا ن = لا^۲ + ی^۲ + ۲ لا ی جم ی ا لا ∴ ا ف^۲ = ف^۲ = لا^۲ + ی^۲ + ع^۲ + ۲ لا ی جم لا ا ی + ۲ لا ع جم لا ا ع + ۲ ی ع جم ی ا ع .

(۴۴۰) دریافت کرو فاصلہ درمیان دو نقطہ کے جبکہ محور ترچھی ہوں - فرض کرو لا اور ی اور ع ادنار ایک نقطہ کی ہیں اور لا۱ اور ی۱ اور ع۱ ادنار دوسری نقطہ کی ہیں - تو اب ظاہر ہے کہ فاصلہ درمیان ان نقاط کی قطر اوس مجسم کا ہے جسکے اضلاع مساوی ہیں حاصل تفریق متوازی اونار دو نقطہ کی موافق (۴۸۱) کے

$$\therefore \text{ف}^2 = (\text{لا}-\text{لا}_1)^2 + (\text{ی}-\text{ی}_1)^2 + (\text{ع}-\text{ع}_1)^2 + 2(\text{لا}-\text{لا}_1)(\text{ی}-\text{ی}_1)\,\text{جم لا ی}$$

$$+\,2(\text{لا}-\text{لا}_1)(\text{ع}-\text{ع}_1)\,\text{جم لا ع} + 2(\text{ی}-\text{ی}_1)(\text{ع}-\text{ع}_1)\,\text{جم ی ع}$$

(۴۴۱) دریافت کرو مساوات خط مستقیم کی بلحاظ ترچھی محوروں کی - ظاہر ہے کہ ایک خط مستقیم خیال کیا جا سکتا ہے کہ وہ پیدا ہوا ہے تقاطع کرنے دو سطح نن کی سے جو پیدا ہونگی بوسیلہ کھینچنی لانہایت خطوط کی نقاط خط مفروض سے متوازی سطوح لا ع اور ی ع کی اور چونکہ نقوش ان سطوح کے ویسی ہی ہیں جیسی سطوح متقاطع علی القوایم ہیں تھی تو اسیواسطے مساواتیں خط مستقیم کی یہہ ہونگی

لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص لیکن قیمت ط اور م کی کسی ایک زاویہ کی مماس کو تعبیر نہیں کرتی ہے وہ تعبیر کرتی ہے اوس نسبت کو جو جیب مستوی زاویونکی

جو ہر ایک نقطہ اپنی سطح مین محور سے بناتا ہی اور مقادیر د اور ص وہی ہین جو
صورت محور متقاطع علی القوایم مین ثابت ہوئی ہتین اسیواسطے وہ شکلین خط مستقیم
کی محورون کی زاویہ پر موقوف نہین ہین اس صورت مین اوسیطور سے ثابت ہوگی
جیسی محور متقاطع علی القوایم کی صورت مین ثابت ہوئی ہتین —

(۴۴۴) دریافت کرو زاویہ درمیان دو خط مستقیم کی جبکہ محور ترچہی فرض کیجاوین
ہم اسجای اوس ترکیب کو عمل مین لاوینگی جو فقرہ (۴۰۲) مین لکہی گئی تہی فرض کرو کہ
مساواتین اون خطوط کے جو کہینچے جاوین متوازی خطوط مفروض کے گذرتی ہوئی نقطہ
شروع مین سے یہہ ہین

$$\left.\begin{aligned} ل &= ط ع \\ ی &= م ع \end{aligned}\right\} (۱) \quad \text{اور} \quad \left.\begin{aligned} ل &= ط' ع \\ ی &= م' ع \end{aligned}\right\} (۲)$$

فرض کرو کہ ر فاصلہ ایک نقطہ (لا اور ی اور ع) (۱) کا نقطہ شروع سے ہی اور ر۱
فاصلہ نقطہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) (۲) کا نقطہ شروع سے ہی اب اگر ف فاصلہ
درمیان ان نقاط کی فرض کیا جاوے اور ہ زاویہ مطلوب تو ف۲ = ر۲ + ر۱۲ —

۲ ر ر۱ جم ہ = (لا — لا۱)۲ + (ی — ی۱)۲ + (ع — ع۱)۲ + ۲ (لا — لا۱)
(ی — ی۱) جم لا ا ی + ۲ (لا — لا۱) (ع — ع۱) جم لا ا ع + ۲ (ی — ی۱)
(ع — ع۱) جم ی ا ع = ر۲ + ر۱۲ — ۲ (لا لا۱ + ی ی۱ + ع ع۱)
— ۲ {(لا ی۱ + لا۱ ی) جم لا ا ی + (لا ع۱ + ع لا۱) جم لا ا ع +
(ی ع۱ + ی۱ ع) جم ی ا ع} ∴ ر ر۱ جم ہ = لا لا۱ + ی ی۱ + ع ع۱
+ {(لا ی۱ + لا۱ ی) جم لا ا ی + (لا ع۱ + ع لا۱) جم لا ا ع + (ی ع۱ + ی۱ ع) جم ی ا ع}

$\therefore$ جم ہ = (لا لا۱ + ی ی۱ + ع ع۱ + وغیرہ) / ...

طط' + مم' + ۱ + (ط'م + طم') جم لا ا ی + (ط' + ط) جم لا ا ع + (م' + م) جم ی ا ع

(۱ + ط² + م² + ۲ طم جم لا ا ی + ۲ ط جم لا ا ع + ۲ م جم ی ا ع)(۱ + ط'² + م'² + وغیرہ)

(۴۴۴) دریافت کرو مساوات ایک سطح جبکہ محور ترچھی فرض کئے جاوین —

ظاہر ہی کہ ایک سطح لوکس ہوگی تمام اون خطوط کی جو کھینچے جاوین عمود ایک خط مفروض پر گذرتی ہوئی ایک نقطہ مفروض مین سے جو خط معلوم پر واقع ہی۔ فرض کرو کہ مساواتین خط مفروض کی یہہ ہین لا = ط ع + د

ی = م ع + ص اور مساواتین اوس خط کی جو نقطہ مفروض (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) مین سے گذری یہہ ہونگی

(لا − لا۱) = ط' (ع − ع۱) اور (ی − ی۱) = م' (ع − ع۱) اور چونکہ یہہ خطوط عمود ایکدوسری پر ہین اسواسطے زاویہ جو درمیان ان خطوط کے واقع ہی = ۹۰° یا جم ہ = ۰ اسیواسطی بحکم شکل گذشتہ کے

طط' + مم' + ۱ + (ط'م + م'ط) جم لا ا ی + (ط' + ط) جم لا ا ع + (م + م') جم ی ا ع

= ۰ اور جبکہ دور کرین اسمین سے ط' اور م' کو اور لکھین قیمت انکی تو حاصل ہوگا یہہ

$\frac{لا - لا_۱}{ع - ع_۱}$ ط + م $\frac{ی - ی_۱}{ع - ع_۱}$ + ۱ + ($\frac{لا - لا_۱}{ع - ع_۱}$ م + $\frac{ی - ی_۱}{ع - ع_۱}$ ط) جم لا ا ی + ($\frac{لا - لا_۱}{ع - ع_۱}$ + ط) جم لا ا ع

+ ($\frac{ی - ی_۱}{ع - ع_۱}$ + م) جم ی ا ع = ۰ یا (ط + م جم لا ا ی + جم لا ا ع)(لا − لا۱)

+ (م + ط جم لا ا ی + جم ی ا ع) (ی − ی۱) + (۱ + ط جم لا ا ع + م جم ی ا ع) (ع − ع۱)

= ۰ اور یہہ مساوات جو لوکس تمام اون خطوط کی ہی جو کہ ملتی ہین خطوط مفروض سے ایک نقطہ مفروض پر اور اُسی نقطہ پر عمود ہین مساوات سطح کی کہلاتی ہی

(۴۴۴) دریافت کرو وہ شرطین جنکی موافق ایک خط مستقیم عمود ایک سطح پر ہو اور یہہ شرطین اوسی طرح سے دریافت ہونگی جیسی فقرہ (۴۲۶) مین بیان کی گئی ہین مساوات ایک سطح کی جو گذرتی اس نقطہ (لا۱ اور ی۱ اور ع۱) خط مفروض مین سے یہہ ہوگی م (لا − لا۱) + ن (ی − ی۱) + ہ (ع − ع۱) = ۰ اور مساوات خط مفروض کی یہہ ہونگی لا = ط ع + د اور ی = م ع + ص اور مساوات اوس سطح کی جو عمود اس خط پر ہی فقرہ گذشتہ مین لکہی ہوئی ہی اورجبکہ لکہین امثال مساوی قوای مقدار مجہول کو برابر ایک دوسری کے تو حاصل ہوگا یہہ

س = ط + م جم لا ی + جم لا ع اور ن = م + ط جم لا ی + جم ی ع

ہ = ۱ + ط جم لا ع + م جم ی ع ان مساواتون سے قیمتین س اور ن اور ہ کی یا قیمتین ط اور م کی اجزای س اور ن اور ہ مین دریافت ہوجاوینگی —

(۴۴۵) دریافت کرو زاویہ درمیان ایک سطح اور خط مستقیم کے — فرض کرو کہ مساواتین سطح اور خط کی یہہ ہین م لا + ن ی + ہ ع = ۱ (۱)

$$\left.\begin{array}{l} لا = ط ع + د \\ ی = ح ع + ص \end{array}\right\} (۲)$$

اور فرض کرو کہ مساواتین اوس خط کی جو عمود سطح مفروض پر ہی یہہ ہین

$$\left.\begin{array}{l} لا = ط' ع + د \\ ی = ح' ع + ص \end{array}\right\} (۳)$$

مقدار ط' اور ح' اجزای ط اور ح مین بوسیلہ فقرہ گذشتہ کی معلوم ہوجاوینگی اور زاویہ درمیان

(۲) اور (۳) کی بوسیلہ فقرہ (۲۴۴) کی معلوم ہوجاویگا اور چونکہ زاویہ جو واقع ہی درمیان سطح اور (۱) کے تمامی اوس زاویہ کی ہی جو درمیان (۲) اور (۳) کے واقع ہی اسیواسطی یہہ زاویہ بہی بآسانی تمام معلوم ہوجاویگا —

(۲۴۴) دریافت کرو وہ زاویہ جو واقع ہی درمیان دو سطح کے —
مساواتین اون خطوط کی جو عمود سطح مفروض پر ہین اور نقطہ شروع مین سی گذرتی ہین بوسیلہ (۲۴۴) کے معلوم ہوجاوینگی اور زاویہ درمیان ان خطوط کے جو فی الحقیقت زاویہ سطوح مفروض کا ہی فقرہ (۲۴۲) سی دریافت ہوجاویگا

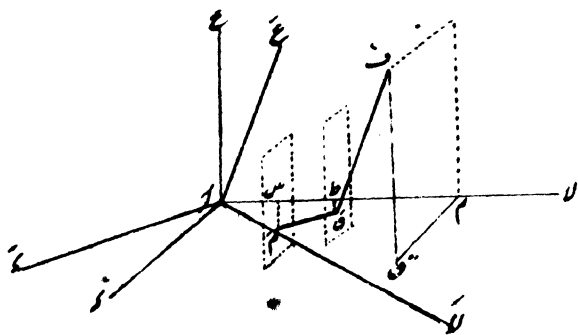
باب پنجم

تبدیلی اوتار کے بیان مین

(۲۴۷) تبدیل کرو ایک مساوات کو جسکا نقطہ شروع آ ہے اوس مساوات سی جسکا نقطہ شروع آ ہی محور صورت اخیر کے متوازی صورت اول کے محورون کی ہین اگر اوتار نئی نقطہ شروع کی ط اور ص اور س فرض کئے جاوین تو ظاہر ہی کہ اوتار ایک نقطہ کی بلحاظ نئی نقطہ شروع کے مساوی اصلی اوتار منہا نئی اوتار نقطہ شروع کے ہونگی یہانسی معلوم ہوا کہ اگر لا اور ی اور ع اصلی اوتار ایک نقطہ ف کے ہون اور لاَ اور یَ اور عَ نئی اوتار نقطہ مذکور کی فرض کئی جاوین تو لا = ط + لاَ اور ی = ص + یَ اور ع = س + عَ اگر لکھین ہم ان قیمتون لاَ اور یَ اور عَ کو ایک سطح کی مساوات مین تو مساوات اوسکی اجزای لاَ اور یَ اور عَ مین بلحاظ نقطہ شروع آ کے معلوم ہوجاویگی

(۳۴۸) تبدیل کرو ایک مساوات کو جسکے محور متقاطع علی القوایم ہین او س مساوات سی جسکے محور ترچھی فرض کئے جاوین اور نقطہ شروع دونو قسم کی محورونکا ایک ہی فرض کیا جاوے فرض کرو کہ ا لا اور ا ی اور ا ع اصلی محور ہین اور ا لاَ اور ا یَ اور ا عَ نئی محور ہین اور

ا م = لا ، م ق = ی ، ق ف = ع

ا مَ = لاَ ، مَ قَ = یَ ، قَ ف = عَ

کھینچو نقاط مَ اور قَ اور ف مین سی سطوح متوازی ی ا ع کی یعنی عمود ا لا پر جو ملین گے ا لا سی نقطہ س اور ط اور م پر (نقشہ از خطوط تعبیر کرتی ہین ان سطوح کو) اور اب ظاہر ہی کہ ا س اور س ط اور ط م خطوط نشانی ا مَ اور مَ قَ اور قَ ف کی خط ا لا پر ہین اور ظاہر ہی کہ

ا م = ا س + س ط + ط م

= ا مَ جم لاَ ا لا + مَ قَ جم یَ ا لا + قَ ف جم عَ ا لا موافق (۳۴۷)

∴ لا = لا جم لاَ ا لا + ی جم یَ ا لا + عَ جم عَ ا لا

یَ = لا جم لاَ ا ی + ی جم یَ ا ی + عَ جم عَ ا ی

ع = لا جم لاَ ا ع + ی جم یَ ا ع + عَ جم عَ ا ع

یا لا = م لاَ + م یَ + م ۲ عَ
ی = ن لاَ + ن ا یَ + ن ۲ عَ
عَ = ہ لاَ + ہ ا یَ + ہ ۲ عَ

ان مساواتون مین م بجای جم لاَ ا لا کے لکھا گیا ہی وغیرہ - اور فقرہ (۳۹۷) سی حاصل ہونگی مساواتین آئیندہ اون زاویون کے اجزا مین جو ا لاَ بناتا ہی محور لا اور ی اور ع سے
∴ (جم لاَ ا لا)^۲ + (جم لاَ ا ی)^۲ + (جم لاَ ا ع)^۲ = ا اور اب ہمالنی حاصل ہونگے مساواتین آئیندہ

م^۲ + ن^۲ + ہ^۲ = ا
م$_۱^۲$ + ن$_۱^۲$ + ہ$_۱^۲$ = ا (۲)
م$_۲^۲$ + ن$_۲^۲$ + ہ$_۲^۲$ = ا

(۴۳۴) اگر نئی محور محور متقاطع علے القوایم فرض کی جاوین تو ہمین مساواتین آئیندہ موافق فقرہ (۴۰۵) کی حاصل ہونگی اور اسنی معلوم ہوتا ہی کہ نئی محور عمود ایک دوسری پر ہین اور وہ یہہ مساواتین ہیں

م م$_۱$ + ن ن$_۱$ + ہ ہ$_۱$ = ۰
م م$_۲$ + ن ن$_۲$ + ہ ہ$_۲$ = ۰ (۳)
م$_۱$ م$_۲$ + ن$_۱$ ن$_۲$ + ہ$_۱$ ہ$_۲$ = ۰

یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ نو جیب التمام مین سے جو (۱) مین ہین تین جیب التمام (۲) سے اور (۳) سے دریافت ہو جاوینگی — اور تین باقی غیر منقطع رہین گی یعنی تین زاویے ایسے ہونگے کہ اونکی قیمت جو چاہین فرض کر سکتے ہین —

(۴۵۰) بجاے مساواتون گذشتہ کے مساواتین آئندہ کام مین آسکتی ہین

$$\left.\begin{aligned} \bar{لا} &= م\,لا + ن\,ی + ہ\,ع \\ \bar{ی} &= م_۱\,لا + ن_۱\,ی + ہ_۱\,ع \\ \bar{ع} &= م_۲\,لا + ن_۲\,ی + ہ_۲\,ع \end{aligned}\right\}\ (۴) \qquad \left.\begin{aligned} م^۲ + م_۱^۲ + م_۲^۲ &= ۱ \\ ن^۲ + ن_۱^۲ + ن_۲^۲ &= ۱ \\ ہ^۲ + ہ_۱^۲ + ہ_۲^۲ &= ۱ \end{aligned}\right\}\ (۵)$$

$$\left.\begin{aligned} م\,ن + م\,ہ + ن\,ہ &= ۰ \\ م_۱\,ن_۱ + م_۱\,ہ_۱ + ن_۱\,ہ_۱ &= ۰ \\ م_۲\,ن_۲ + م_۲\,ہ_۲ + ن_۲\,ہ_۲ &= ۰ \end{aligned}\right\}\ (۶)$$

اب اگر ضرب کرین قیمتون $\bar{لا}$ اور $\bar{ی}$ اور $\bar{ع}$ کو جو (۱) مین ہین $\bar{م}$ اور $\bar{ن}$ اور $\bar{ہ}$ سے علحدہ علحدہ یعنی $\bar{لا}$ کو $\bar{م}$ اور $\bar{ی}$ کو $\bar{ن}$ سے اور $\bar{ع}$ کو $\bar{ہ}$ سے اور بعد اسکی جمع کرکے مختصر کرین ان مساواتونکو بوسیلہ (۲) اور (۳) کے تو ہمین حاصل ہوگا یہہ $\bar{لا} = م\,لا + ن\,ی + ہ\,ع$ اور اگر اسیطرحسے عمل کرین بعد ضرب دینے کے مقادیر $\bar{م_۱}$ $\bar{ن_۱}$ $\bar{ہ_۱}$ اور $\bar{م_۲}$ $\bar{ن_۲}$ اور $\bar{ہ_۲}$ مین تو ہمین تمام مساواتین (۴) کی حاصل ہونگی اور چونکہ فاصلہ $\bar{ت}$ کا نقطہ شروع سے ایک ہی ہی تو ظاہر ہی کہ $لا^۲ + ی^۲ + ع^۲ = \bar{لا}^۲ + \bar{ی}^۲ + \bar{ع}^۲$ اگر لکھین قیمتین $\bar{لا}$ اور $\bar{ی}$ اور $\bar{ع}$ کے جو (۴) مین ہین اور لکھین امثال ہساوی قواے دونو طرف مساوات کو برابر ایک

دوسری سے تو ہمین حاصل ہونگی مساواتین (۵) اور (۶) کی جسوقت ہمین حاصل ہونگی مساواتین (۲) اور (۳) تو ظاہر ہی کہ ہم بجای اونکی (۵) اور (۶) کو استعمال مین لاسکتی ہین اور یہہ ثابت ہوسکتا ہی بغیر استعانت بدلنی اوتار کے جبکہ فرض کرین مقادیر م اور ن اور ہ وغیرہ متعلق ایک دوسری سے اسطرح جیسے ہین جیسی کہ (۱) مین ہین ۔

(۴۵۱) واضح ہو کہ ہم ترچھی محورونکو بدل سکتی ہین اور ترچھی محوروبنی بطور آینده کہ کھیچو شکل گذشتہ مین ایک عمود نقطہ م سے سطح م ع پر اور کھیچو خطوط نشانی لا اور لا اور ی اور ع کی اس عمود پر تو اب ظاہر ہی لا جس لا ی ع = لا جس لا ی ع + ی جس ی ی ع + ع جس ع ی ع اور اسیطرحسی حاصل ہوگا واسطے لا اور ی کی

ی جس ی لا ع = لا جس لا لا ع + ی جس ی لا ع + ع جس ع لا ع

ع جس ع لا ی = لا جس لا لا ی + ی جس ی لا ی + ع جس ع لا ی

(۴۵۲) ایک اور طریقہ واسطے بدلنی محور متقاطع علے القوایم کے اور محور متقاطع علی القوایم سی بہت فایدہ مند اور آسان ہے فرض کرو کہ

$$\left\{\begin{array}{l} لا = ط ع \\ ی = ح ع \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} لا = ط_۱ ع \\ ی = ح_۱ ع \end{array}\right.$$

مساواتین محورون لا اور ی اور ع کی یہہ ہین

$$\left\{\begin{array}{l} لا = ط_۲ ع \\ ی = ح_۲ ع \end{array}\right.$$

اور فرض کرو کہ $م = \frac{1}{\sqrt{1 + ط^2 + ح^2}}$ اور

$م_۱ = \frac{1}{\sqrt{1 + ط_۱^2 + ح_۱^2}}$ اور $م_۲ = \frac{1}{\sqrt{1 + ط_۲^2 + ح_۲^2}}$ تو اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ

فقرہ (۴۰۲) کے یہہ حاصل ہوگا جم لا لا = م ط اور جم لا ی = م ح اور جم لا ع = م اور وغیرہ اور اب اگر لکھین ان قیمتون کو صورت اول (۴۴۸) مین

جو واسطی تبدیل اونار کے لکھی گئی ہی تو

لا = م ط لاَ + م ا ط ا ءَ + م ۲ ط ۲ عَ

ء = م ح لاَ + م ا ح ا ءَ + م ۲ ح ۲ عَ

ع = م لاَ + م ا ءَ + م ۲ عَ اور بجای نو زاویہ کی جو (۱) مین

جہہ مقادیر ط اور ط ا اور ط ۲ اور ح اور ح ا اور ح ۲ لکھی گئے ہین

واضح ہو کہ بجای ان مساواتون کے ہم ایسی مساواتین حاصل کر سکتے ہین جسمین

صرف پانچ مقادیر مقررہ پائی جاوینگی مگر یہہ سب غیر منقطع ہونگی اور یہہ بوسیلہ

استعمال کرنے ترکیب آیندہ کے حاصل ہونگی فرض کرو کہ زاویہ مجسمہ جو پیدا ہوگا

سطوح متقاطع علی القوایم سے حرکت کرتا ہی گرد نقطہ شروع کے ایک نئی مقام

پر اور اسی فرض سے دعوی مذکور کو ثابت کرتے ہین اور بحث اس ترکیب کی لرگن صاحب

نی بہ تفصیل لکھی ہی

(۴۵۳) مرقومہ بالا سی معلوم ہوتا ہی کہ صرف تین مقدارون کی ایک مساوات

مین ضرورت ہوتی ہی اور اسیواسطے حاصل کر سکتے ہین ایک ایسی صورت واسطی تبدیل کرنے

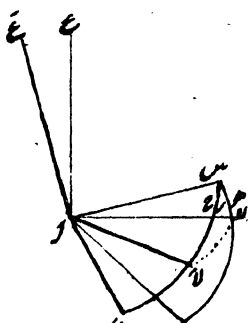
اونار کی جسمین تین زاویہ ہونگی ایسی صورتین یولر صاحب نی دریافت کی ہین اور چونکہ

بہت مفید ہین اسیواسطے ہم اونکو اس جای بیان کرینگے — فرض کرو کہ اس

فصل مشترک اصلی سطح لاء اور نئی سطح لاَ ءَ کا ہی اور فرض کرو کہ سطح س لاَ ءَ پر

اور پر سطح س لا ء کے واقع ہی اور فرض کرو کہ سطح کاغذ کی تعبیر کرتی ہی سطح اخیر کو

بناؤ ایک کرہ جسکا مرکز آ اور قطر عدد ایک ہی اور مان لو کہ یہہ قطع کرتا ہی محورونکو

لاَ اور ءَ اور عَ وغیرہ مین اور فرض کرو س لا = ھ اور س لاَ = ح اور زاویہ لاَ س لا جو واقع ہی درمیان سطح لاَ ء اور لاَ ء کے = ر اب ضرف ہم قیمت جیب التمام کی جو صورت (۱) فقرہ (۴۴۸) مین ہی

اجزای غیر منقطع ھ اور ح اور ر مین دریافت کرینگی اور یہہ بوسیلہ علم مثلث کروی کے معلوم ہوجاوینگی اور یہہ اوس شکل سے دریافت ہوگی جسکے وسیلہ سے ایک ضلع مثلث کروی کا اجزای باقی اضلاع اور انکی زاویہ مابین مین دریافت ہوتا ہی بوسیلہ مثلث س لاَ لا اور س ءَ لا کے ہمین یہہ حاصل ہوگا

جم لاَ لا = جم ر جس ح جس ھ + جم ح جم ھ

جم ءَ لا = جم ر جس (۹۰ + ح) جس ھ + جم (۹۰ + ح) جم ھ

= جم ر جم ح جس ھ - جس ح جم ھ

اسیطرحسی جم لاَ ء اور جم ءَ ء دریافت ہوسکتا ہی اور جبکہ ملاوین قوس کروی عَ لا اور عَ س کی تو ہمین بوسیلہ مثلث کروی عَ س لا کے یہہ حاصل ہوگا جم عَ لا = جم عَ س لا جس عَ س جس س لا + جم عَ س جم س لا = جم (۹۰ + ر) جس ۹۰ جس ھ + جم ۹۰ جم ھ = - جس ر جس ھ اور اسیطرحسی جم عَ ء اور جم لاَ ع اور ءَ ع دریافت ہوسکتی ہین اور جم عَ ع = جم ر تو اب ظاہر ہی کہ صورت (۱) یہہ ہوجاویگی

لا = لاَ (جم رجس ح جس ھ + جم ح جم ھ) + دَ (جم رجم ح جس ھ - جس ح جم ھ)
- عَ جس رجس ھ ء = لاَ (جم رجس ح جم ھ - جم ح جس ھ) + دَ (جم رجم ح جم ھ
+ جس ح جس ھ) - عَ جس رجم ھ ع = لاَ جس رجس ح + دَ جس رجم ح + عَ جم ر
اور ان صورتون کو لاپلاس صاحب نی بهی ایک اور طرحسی ثابت کیا ہی اور یہہ صورتین اکثر کتب انگریزی مین جو ریاضی کے باب مین لکہی گئی ہین پائی جاویگی مگر ایک تہوڑی سی تبدیلی علامت جبریہ اجزا مین ہوگی اور یہہ موقوف ہی مختلف مقامات اوس پر

بیان تقاطع سطح منحنی اور سطح مستوی کا

(۴۵۴) مساواتین مرقومہ بالا بہت فایدہ مند دریافت کرنے مین خاصیت تقاطع سطح منحنی اور سطح مستوی کے ہونگی اگر ہم چاہین قطع کرنا کسی ایک سطح منحنی کا مثلاً فرض کرو سطح مخروط کا بوسیلہ ایک سطح مستوی کی تو واسطی اس مطلب کے ہمین لازم ہی کہ دور کرین عَ کو مساواتون سطح منحنی اور سطح مستوی مین سے مگر اوسی ایک مساوات اونکی تقاطع کے نشان کی سطح لاَ ءَ پر حاصل ہوگی اور ہمین مساوات اونکے تقاطع کی دریافت کرنے منظور ہی اور یہہ اس سے حاصل ہونی محال ہے اور چونکہ نشان واسطی دریافت کرنے خاصیت ایک خط منحنی کے کافی نہین ہوگا اسیواسطے مساوات وسم خط منحنی کی جبکہ وہ کہیچا جاوے قطع کرنیوالی سطح مستوی پر دریافت کرنی چاہیے اور یہہ بوسیلہ تبدیل کرنے اوتار کے حاصل ہوسکتا ہی - فرض کرو کہ سطح مستوی قطع کرنیوالی سطح لاَ ءَ کی ہی اور فرض کرو کہ خط مُحور لاَ ہی تو اب ظاہر ہی کہ محور سطح کردی کے لاَ اور ءَ اور عَ ہین اور انہین سے محور لاَ اور ءَ قطع کرنیوالی سطح

مین ہین جبکہ لکہین ع = ۰ اوس مساوات مین جو موافق اس فرض کے حاصل ہوتی ہے
تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین ہمین تقاطع یعنی فصل مشترک سطح کروی اور سطح مستوی
لا۱ ز کا حاصل ہوگا اور یہہ تقاطع مطلوب تھا — اور چونکہ ہمین اسجگہ صرف دریافت کرنا
اوس خط منحنی کا جو تقاطع سے حاصل ہوتا ہی
مطلوب ہے اسیواسطی ہم پہلی ع = ۰ فرض کرینگے اور بعد اسکی تبدیل کرینگی ہم مساوات
کو اب فرض کرو ع = ۰ اور زاویہ س ا لا۱ یا ح = ۰ تو اب ظاہر ہی کہ صورت
فقرہ گذشتہ کی یہہ ہو جاویگی لا = لا۱ جم ھ + ز جس ھ جم ر اور ی = − لا۱ جس ھ
+ ز جم ھ جم ر اور ع = ز جس ر یہہ مساواتین بغیر استعانت مساواتون مرقوم
کہ بہی بآسانی حاصل ہو سکتی ہین چنانچہ یہہ طریقہ واسطے دریافت کرنی مساواتون مرقومہ
بالا کے کتاب فریکر صاحب اور پوئیسنٹ کی مین لکہا ہے

(۵۵۴) چونکہ خاص صورتون مین بوسیلہ استعمال کرنے مساواتون مرقومہ بالا کے
بڑی دقت ہوتی ہے اسیواسطی ہم ایک خاص ترکیب اس جاپی لکہینگے جس سے بڑی
آسانی اور کم محنت تبدیل کرنے مین مساواتون کے ہوگی مثلاً اکثر صورتون مین
ہم فرض کر سکتے ہین کہ سطح کاٹنے والی عمود سطح لا۱ ع پر ہی اور یہہ ظاہر ہی کہ اس فرض
سے کسی نوع کا فرق عمومیت مساوات مین نہین آویگا بلکہ وہ آسان ہو جاویگی
کیونکہ اس صورت مین خط ا س خط ا ز پر منطبق ہوگا یا جبکہ ا ز کو کہینچین تو اوس پر
منطبق ہو جاویگا اور اسیواسطے ھ = ۹۰ تو اب ظاہر ہی کہ صورت اون مساواتون
کی جو فقرہ گذشتہ کے اخیر مین لکہی ہوئی ہین یہہ ہو جاویگی لا = + ز جم ر اور

اور ی = - لا اور ع = ی جس ر واضح ہو کہ یہہ صورتین بتغیر استقامت کی بہی حاصل ہو سکتی ہین مثلاً شکل گذشتہ مین فرض کرو کہ جب اس اور الا اور ای کہینچے جاوین تو وہ منطبق ایک دوسری پر ہوتی ہین اور ھ = ۹۰ اور س ی = ۹۰ اور اب مستعمل کرو اصلی صورتون (۱) فقرہ (۴۴۸) کو تو موافق ان فرض کے صورتین مرقومہ بالا آسانی تمام حاصل ہونگی —

(۴۵۶) اگر صورتون مرقومہ بالا مین نقطہ شروع بہی تبدیل کیا جاوے تو ظاہر ہے کہ ہمین بائین طرف مساواتون مرقومہ بالا کے مقادیر ط اور ص اور س کو داخل کرنا چاہیئے

باب ششم

بیان کرہ اور اون مجسم مین جو گردش سطح منحنی سے پیدا ہوتی ہین —

(۴۵۷) اگر بحث کرنی سطح منحنی مثلاً کرہ کی منظور ہو تو ہم اس صورت مین وہی عمل کرینگے جو سطوح مستوی مین کیا تہا یعنی مساوات اوسکی بوسیلہ اوسکی چند خواص کے جو کہ معلوم ہین دریافت کرینگے اور اس عمل سے ہمین نسبت درمیان تین مقدار لا اور ی اور ع کی دریافت ہو جاویگی اور یہہ نسبت اس علامت سے تعبیر ہو سکتی ہی ح (لا اور ی اور ع) = ۰ یا ع = ح (لا اور ی) یہہ مساوات سطح منحنی کی کہلاتی ہے اور اسی نسبت تمام نقاط اوسکی سطح کے تعبیر ہو گی اور یہہ ایک ایسی مساوات ہی جو جامع کل یعنی تمام صورتون سطح منحنی مین صادق آتی ہی اور مانع غیر کی —

(۴۵۸) برعکس اسکے اگر ایک مساوات اس صورت کی ہو ح (لا اور ی اور ع) = ۰ ہمین لا اور ی اور ع اوس ایک نقطہ کے ہون تو یہہ مساوات سطح منحنی کی ہے

اور یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اس سے نسبت ایک مجسم کے نقاط کی تعبیر نہین ہوگی
اور طریقہ اثبات کی ثبوت کا یہہ ہی فرض کرو کہ دو مساوات اس صورت کی
ہین ح (لا اور ی اور ع) = ۰ اور ح َ (لا اور ی اور ع) = ۰ اور فرض
کرو کہ قیمتین لاَ اور یَ اور عَ کی دونو مساوات مین ایک ہی ہین اب اگر دور
کرین عَ کو دونون مساوات مین سی تو حاصل ہوگی ہمین مساوات اونکی تقاطع یعنی فصل
مشترک کی نشان کی سطح لاَ یَ پر اور یہہ مساوات اس صورت کی ہوگی ک (لا ی) = ۰
اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات خط مستقیم کی ہی اسیطرح یہی ثابت ہو سکتا ہی کہ نشان
تقاطع یعنی فصل مشترک کا باقی سطوح لاَ عَ اور عَ یَ پر خطوط مستقیم ہین
لیکن اگر نشان ایک لوکس کا تین سطح پر مستقیم ہو تو ظاہر ہی کہ لوکس خود خط مستقیم
ہوگا اور یہہ سطح ممکن کسی وجہ سے نہین ہو سکتا ہی چونکہ تقاطع یعنی فصل مشترک
ح (لا اور ی اور ع) = ۰ اور ح َ (لا اور ی اور ع) = ۰ خط مستقیم ہے
تو یہانسی معلوم ہوا کہ یہہ مساوات سطوح مسطحہ سی تعلق رکھتی ہین —
(۵۱۴) واضح ہو کہ سطوح اور خطوط مستقیم کو مختلف درجون مین تقسیم کیا ہے
در اصلی ترتیب سے رکھنی بڑی مفید اور عام خواص اور نتایج کو جو اس علم سی حاصل
ہوئی ہین اسیواسطی اوس سطح کو جو اول درجہ کی مساوات سی جسمین تین مقدار
مجہول پائی جاتی ہین حاصل ہوتی ہی سطح اول درجہ کی کہتی ہین اور لوکس اوس مساوات
کی جو دو درجہ سی تعلق رکھتی ہین اور جسمین تین مقدار مجہول پائی جاتی ہین سطح
دوسری درجہ کی کہلاتی ہی اور اسیطرح سی اور بہی حاصل ہو سکتی ہین ظاہر ہے کہ

اس حصہ ہندسہ عالیہ میں کسی نوع سا دقت اور مشکل واقع نہیں ہوتی ہی مگر شروع سے
طویل حساب اور عمل کرنے پڑتے ہیں اور سوا اسکی اسمیں ایک نوع کے دقت
معلوم ہوتی ہی اور اسی سبب سی ہم اکثر سوالات کو جسمیں صرف محنت عمل سکے
ہو کے چھوڑ دینگی اور صرف مشکل باتیں ان سوالات کی لکھہ دینگی اور خاصکر اس
حصہ دقت بسبب شکل کے واقع ہوتی ہی کیونکہ ان اشخاص کو جو عادی مجسمات سے
نہیں ہیں اور وہ انکو سمجھہ نہیں سکتی ہیں وہ مساواتیں جو موافق ان شکلونکی حاصل ہوتی ہیں سمجھہ
میں نہیں آوینگی مگر ہمنی اس مشکل کو بوسیلہ لکھنی بیان شکلونکی بہت آسان کر دیا ہے
اسواسطی ہماری غرض مطالعین سی یہہ ہی کہ وہ توجہ اور غور سی شکلونکو سمجھیں اور
بعد سمجھنے شکلونکے کسی نوع کے دقت ادنکی مساواتونکے سمجھنے میں نہیں ہوسکے
اب ہم یہیں بحث کرہ کے لکھیں گے +

بیان کرہ کا

(۳۶۰) دریافت کرو مساوات کرہ کی سطح کے ۔ فرض کرو کہ محور سطح مطلوب کے
متقاطع علی القوایم ہین اور یہہ بھی مان لو کہ لا ہر اور ع ہر سطح کا ایک نقطہ کے ہیں
اور ط ص اور س ہر مرکز کرہ کی ہین اور چونکہ سطح کرہ کی ایسی ہی کہ ہر ایک نقطہ اسکا
مساوی فاصلہ پر مرکز کرہ سی ہوتا ہی اور فرض کرو کہ یہہ مساوی ایک مقدار مقررہ نق کے ہے
جسکو نصف قطر کہتی ہیں تو اب ظاہر ہے کہ موافق فقرہ (۳۰۸) کے

$$(لا - ط)^2 + (ر - ص)^2 + (ع - س)^2 = نق^2$$

(۳۶۱) صورت اس مساوات کی مختلف ہوسکتی ہین موافق مختلف مقام مرکز کے

فرض کرو کہ مرکز سطح لاز میں واقع ہی ∴ س = ۰ تو اب ظاہر ہے کہ

(لا − ط)^۲ + (ز − ص)^۲ + ع^۲ = نق^۲ ۔ اب فرض کرو کہ مرکز محور ع پر واقع ہے

∴ ط = ۰ اور ص = ۰ ∴ لا^۲ + ز^۲ + (ع − س)^۲ = نق^۲

(۴۶۲) فرض کرو کہ مرکز نقطہ شروع ہی ∴ ط = ص = س = ۰ تو اب صورت مساوات کی یہہ ہو دیگی لا^۲ + ز^۲ + ع^۲ = نق^۲ اور یہہ مساوات سطح کرہ کی اکثر استعمال میں آتی ہے +

(۴۶۳) ظاہر ہی کہ مساوات عام سطح کرہ کی بعد پہیلا نے کی یہہ ہو جاویگی

لا^۲ + ز^۲ + ع^۲ − ۲ ط لا − ۲ ص ز − ۲ س ع + ط^۲ + ص^۲ + س^۲ − نق^۲ = ۰

یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ ہر ایک کرہ موافق اس صورت کی مساوات کی کہیچ سکتا ہی جیسا کہ ترکیب کہینچنی دایرہ کے فقرہ (۶۷) میں لکہے گئی ہے +

(۴۶۴) وہ تراشیں سطح کروی کے جو سطح اوناری یعنی سطح لاز یا لاع یا عز سی آئی ہونگی تراشہای عظیم کہلاتی ہین اور حدود ان تراشونکی نقوش سطح کروی کے سطح اوناری پر کہلاتی ہین ـ مساوات ایک نقش کے دریافت ہو سکتی بوسیلہ لکہنی اوس قدر کی جو عمود سطح نقش پر ہی = ۰ مساوات عام مین ـ مثلاً واسطی دریافت کرنی اوس خط منحنی کے جو تقاطع کرنی سطح کروی اور سطح لاز کی سی پیدا ہوتا ہی لکہو ع = ۰ اور اب اس فرض کے موافق ہمیں حاصل ہو کے مساوات اون نقاط کی جہان سطح کروی اور سطح لاز ملتی ہی اور وہ اس صورت میں یہہ ہی

(لا − ط)^۲ + (ز − ص)^۲ + س^۲ = نق^۲ یہاں سی ثابت ہوتا ہی کہ تراش سطح لاز پر دایرہ ہے

اور یہہ دایرہ ہی ہی جبتک میتین لا اور ر کی صحیح ہیں اور اسیطرحسی باقی تقویشن سے دایرہ ثابت ہو سکتی ہین۔ اور یہہ دعوی کہ تقاطع کرنی سطح کروی اور سطح مستوی سے دایرہ پیدا ہوتا ہی تحریر اقلیدس مین بخوبی ثابت کیا گیا ہے۔

(۵۲۶) دریافت کرو مساوات اوس سطح کے جو مماس کرہ کے ہو۔ فرض کرو کہ لا، اور ر، اور ع، اوتار اوس نقطہ کے ہین جسمین سے سطح مماس کی گذرتی ہی اور فرض کرو کہ مساوات سطح کروی کی یہہ ہی (لا − ط)^2 + (ر − ص)^2 + (ع − س)^2 = نق^2 تو اب ظاہر ہی کہ مساوات اوس سطح کی جو نقطہ (لا، اور ر، اور ع،) مین سے گذرتی ہے یہہ ہوسکے م (لا − لا،) + ن (ر − ر،) + ف (ع − ع،) = ۰ اور مساوات نصف قطر کی جو نقطہ (ط اور ص اور س) اور (لا، اور ر، اور ع،) میں سے گذرتا ہی یہہ ہونگی لا − لا، = $\frac{\text{لا، − ط}}{\text{ع، − س}}$ (ع − ع،)

اور ر − ر، = $\frac{\text{ر، − ص}}{\text{ع، − س}}$ (لا − لا،) چونکہ ہرایک خط سطح مماس کا یا خود سطح عمود ہی نصف قطر پر اور یہہ عمود نقطہ مماس پر ہی تو اب بوسیلہ مساوات سطح اور خط کی یہہ حاصل ہوگا $\frac{\text{م}}{\text{ف}}$ = $\frac{\text{لا، − ط}}{\text{ع، − س}}$ اور $\frac{\text{ن}}{\text{ف}}$ = $\frac{\text{ر، − ص}}{\text{ع، − س}}$ موافق (۴۲۶) کے اسیواسطی مساوات سطح مماس کے یہہ ہو جاوسیگی

$\frac{\text{لا، − ط}}{\text{ع، − س}}$ (لا − لا،) + $\frac{\text{ر، − ص}}{\text{ع، − س}}$ (ر − ر،) + (ع − ع،) = ۰

صورت اس مساوات کی موافق شرط آیندہ کی تبدیل ہو سکتی ہے

(لا، − ط)^2 + (ر، − ص)^2 + (ع، − س)^2 = نق^2 ــ یا

(لا − ط) (لا، − ط) + (ر، − ص) (ر، − ص) + (ع، − س) (ع، − س) = نق^2

جملہ جمع کرین اوس مساوات اور مساوات سطح مماس کو جسکو ابہی نکال اٹھی ہین تو ہمین حاصل ہوگا یہہ (لا۱ — ط) (لا — ط) + (ی۱ — ص) (ی — ص)

+ (ع۱ — س) (ع — س) = نق۲

(۴۶۶) اگر نقطہ شروع مرکز کرہ پر فرض کیا جاوی تو مساوات سطح مماس کی یہہ ہوجاویگی

لالا۱ + یی۱ + عع۱ = نق۲ اور یہہ مساوات بآسانی حاصل ہوسکتی ہی مساوات کرہ سی جو یہہ ہی لا۲ + ی۲ + ع۲ = نق۲ یا لالا + یی + عع = نق۲ بوسیلہ لکہنی لالا۱ اور یی۱ اور عع۱ کی بجای لالا اور یی اور عع کی وہ خط جو تقاطع سطح مماس اور ایک سطح اوتاری سی پیدا ہوگا معلوم ہوسکتا ہی بوسیلہ لکہنی وتر کی جو عمود اوس سطح پر ہی = ۰ اور وہ نقطہ جہان سطح مماس ملتا ہی کسی ایک محور سی دریافت ہوسکتا ہی بوسیلہ لکہنی ہر ایک اون دو مقدار غیر منقطع مین سی جو باقی محورون پر شمار کئی جاتی ہین = ۰

(۴۶۷) مساوات سطح کروی کی نسبت ترچہی محورون کے موافق فقرہ (۴۴۰) یہہ ہوگی (لا — ط)۲ + (ی — ص)۲ + (ع — س)۲ + ۲ (لا — ط) (ی — ص) جم لای

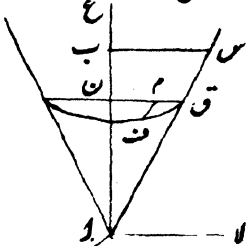
+ ۲ (لا — ط) (ع — س) جم لاع + ۲ (ی — ص) (ع — س) جم یع = نق۲

بیان اون مجسمات کا جو گردش سطح سی پیدا ہوتی ہین -

(۴۶۸) ایک مخروط پیدا ہوتا ہی بوسیلہ گردش کرنی وتر مثلث قایم الزاویہ کے گرد اوسکی ایک عمود کی دو عمودون مین سی - فرض کرو کہ اوس حرکت کرتا ہی گرد خط اب کے جو محور فرض کیا گیا ہی تو اب ظاہر ہی کہ ہر ایک تراش

ن ف جو عمود محور پر اسی دایرہ ہے اور مان لو کہ ا ک اور ک ی اور ا ع محو
متقاطع علی القوایم مخروط کی ہین اور نقطہ شروع راس مخروط پر ہی اور فرض کرو کہ

ان = ع
ن م = لا } او تار ایک نقطہ کی ہین جو سطح مخروط پر واقع ہے
م ف = ی

تو اب ظاہر ہی کہ مربع ن م + مربع م ف = مربع ن ف اور ن ف = ن ق

= ان جبس س ا ب اسیو اسلی
مساوات سطح مخروط کی یہہ ہوگی
$لا^2 + ی^2 = ی^2 ع^2$ یہان ی = مماس نصف
زاویہ راس مخروط کی

(۴۶۹) فرض کرو کہ ا س ایک خط منحنی ہے مثلاً فرض کرو کہ
قریب البیضوی ہی تو اس صورت مین وہ سطح منحنی پیدا ہو گی جو گردش قریب البیضوی
گرد اوسکی محور کی پیدا ہو سکتی ہی اور اسکو سطح منحنی مجسم قریب البیضوی لکے
کہتی ہین فرض کرو مساوات قریب البیضوی ا ق س کی یہہ ہی

ن ق = مان ع تو اب ظاہر ہی کہ $ن م^2 + م ف^2 = ن ف^2 = ن ق^2$

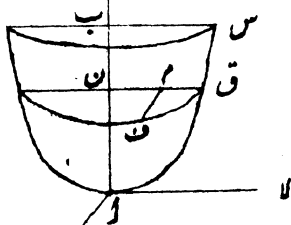
$\therefore لا^2 + ی^2 = ن ع$

(۴۷۰) فرض کرو کہ ا س بیضوی ہی اور مان لو کہ نقطہ ب مرکز ہی اور
یہی نقطہ شروع محوروں متقاطع علی القوایم کا ہی فرض کرو ب ن = ع
اور ن م = لا اور م ف = ی اور س ب = ص اور ب ا = ط تو اب

ظاہر ہی کہ ن م^۲ + م ف^۲ = ن ق^۲ اور ن ق دو ر مجیضوی ا ق س کا ہی جسکا

نصف محور کلان اور محور خورد ط اور ص ہی ∴ ن ق = $\frac{ص}{ط}$ $\sqrt{ط^۲ - ع^۲}$ ∴

مساوات سطح منحنی کے یہہ ہو گی لا^۲ + ی^۲ = $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ (ط^۲ − ع^۲)

یا لا^۲ + ی^۲ + $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ ع^۲ = ص^۲

فرض کرو کہ ط اور ص تبدیل ہو گئی ہین مساوات مین یعنی ط بجای محور خورد اور ص بجای محور کلان کے ہو گیا ہی اسیواسطی مساوات سطح منحنی کے جو حرکت کرنی سی گرد محور خورد کی حاصل ہوتی ہی یہہ ہو گی لا^۲ + ی^۲ + $\frac{ط^۲}{ص^۲}$ ع^۲ = ط^۲

پہلی کو پر بیت سفرویڈ اور دوسریکو اوبلیت سفرویڈ کہتی ہین

(۱۷۱) ظاہر ہی کہ مساوات اوس سطح منحنی کے جو حرکت بیدا لبیضوی سی گرد محور کلان کی پیدا ہوتی یہہ ہو گی لا^۲ + ی^۲ − $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ ع^۲ = − ص^۲ اور جب لکھین ہم بجای ص کی اور ص بجای ط تو ہمین حاصل ہو گی وہ سطح منحنی جو حرکت کرنی سی گرد قطر متجانس کی پیدا ہو سکے

(۲۷۲) عموماً مساوات تمام سطوح منحنی کی مساوات آیندہ ہو سکتی ہی

لا^۲ + ی^۲ = ح (ع) اگر ا ع وہ محور فرض کیا جاوی جسکی گرد پہرنی سی سطح منحنی پیدا ہوتی ہی یا ی^۲ + ع^۲ = ح (لا) اگر ا لا محور ہندکو. فرض کیا جاوی ۔ دریافت کرو

وه خط منحني جو تقاطع کرني ايک سطح مستوي اور سطح منحني سی پيدا هوتا هی

(٣٧٤) فرض کرو که تراش اوس سطح مستوي سی پيدا هوئي هي جو عمود سطح لاع پر هي اور ظاهر هی که خاصيت خط منحني کي وه هي رهي گی گو نقطه شروع کسي طرف کاٹني والي سطح کی فرض کيا جاوي - اب اس صورت مين فرض کرو که نقطه شروع سطح لاع پر واقع هی تو اب ظاهر هی که صورتين مساوات تبديل کرني محورونکي يهه هونگی

لا = ط + ي جم ر اور ي = - لا اور ع = س + ي جس ر يهانسی معلوم هوتا هی که اگر لکهين هم ان قيمتونکو مساوات سطح منحني مين تو هين وه خط منحني مطلوب معلوم هوگا جو تقاطع سی پيدا هوگا —

(٤٧٤) فرض کرو که وه سطح منحني يهه هی لا^2 + ي^2 = ن ع ::

(ط + ي جم ر)^2 + لا^2 = ن (س + ي جس ر) يا ي^2 (جم ر^2) + لا^2 + (٢ ط جم ر - ن جس ر) ي = . کيونکه ط^2 = ن س يهانسی معلوم هوتا هی که وه خط منحني جو تقاطع سی پيدا هوگا خط منحني دوسري درجه کا هوگا وه اگر خط منحني بيضوي هوگا موافق فقره (٤٦) کی اور وه دايره هی اگر ر = ٠ . اور قريب البيضوي مشابه اوس قريب البيضوي کی جو گردش کرتا هی هوگا جبکه ر = ٩٠

(٥٧٤) اب فرض کرو که سطح منحني مذکور يهه هی لا^2 + ي^2 + $\frac{ص^2}{ط^2}$ ع^2 = ص^2 جبکه لکهين هم اسمين قيمتين لا اور ي اور ع جو ابهي نکالي گئی هين تو حاصل هوگا

يهه ي^2 {(جم ر)^2 + $\frac{ص^2}{ط^2}$ (جس ر)^2} + لا^2 + ٢ ي {س $\frac{ص^2}{ط^2}$ جس ر - ط جم ر} = ٠

يهه مساوات حقيقت مين ايک بيضوي کي هی مگر وه دايره کی هو جاويگی جبکه ر = ٠

(۴۷۶) فرض کرو کہ سطح منحنی مذکورہ ہی جو گردش بعید البیضوی کی گرد اوسکی محور کلان کی پیدا ہوتی ہی اور جسکی مساوات یہہ ہی $لا^2 + ر^2 - \frac{ص}{ط} ع^2 = ص$ بعد امل او رفکر کے معلوم ہوجاویگا کہ تراشین اسکی موقوف ہین قیمت مس ر پر اگر مس ر کم ہو $\frac{ص}{ط}$ سی تو خط منحنی بیضوی ہوگا اگر وہ مساوی $\frac{ص}{ط}$ کی ہو تو خط منحنی قریب البیضوی ہوگا اور اگر مس زیادہ ہو $\frac{ص}{ط}$ سی تو وہ بعید البیضوی ہوگا اور اگر ر = ۰ تو خط منحنی مذکور دایرہ ہوگا۔

بیان سطوح منحنی دویم درجہ کا

(۴۷۷) مساوات عام سطوح منحنی دویم درجہ کی یہہ ہی

$$ا لا^2 + ب ر^2 + س ع^2 + ۲ د لا ر + ۲ ی لا ع + ۲ ف ر ع + ۲ گ لا + ۲ ہ ر + ۲ ح ع + کہ = ۰$$

واضح ہو کہ عدد ۲ اکثر اجزای مساوات مین صرف واسطی آسانی حساب کی لگایا گیا ہی اب ہم دور کرینگی اکثر قوای اس مساوات کو بوسیلہ تبدیل کرنی اوتار کی یعنی تبدیل کرینگی ہم مساوات گذشتہ کو ایک آسان مساوات سی واسطی بحث کرنی اس مساوات کی یعنی واسطی دریافت کرنی تمام اور خاصیت اون سطوح منحنی کے جنکو مساوات مرقومہ بالا تعبیر کرتی ہی تبدیل کرو نقطہ شروع کو بوسیلہ لکہنی $لا = لا' + م$ اور $ر = ر' + ن$ اور $ع = ع' + ق$ جب لکہین ہم ان قیمتونکو مساوات عام مین اور فرض کرین ہر ایک جز کو جسمین پہلی قوت غیر منقطع کی ہو ۰ = تو ہمین حاصل ہوگا یہہ

$$ا لا'^2 + ب ر'^2 + س ع'^2 + ۲ د لا' ر' + ۲ ی لا' ع' + ۲ ف ر' ع' + کہ' = ۰$$ اگر ہم

اگر ہم بدلین لا اور ی اور ع کو -لا اور -ی اور -ع سے تو صورت مساوات میں کسی طرح کا فرق نہین آویگا یہان سے ثابت ہوتا ہے کہ ہر ایک خط جو کھینچا جاوے گذرتا ہوا نقطہ شروع سے اور منتہی ہو دونو طرف سطح منحنی کی تنصیف کیا جاویگا نقطہ شروع پر اور اسی سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ شروع مرکز سطح منحنی کا ہے اور معنے اسکے ایسے سمجھنے چاہئے جیسے فقرہ (۸۱) مین معنی مرکز خطوط منحنی درجہ دویم کے سمجھے گئے تھے

(۴۷۸) قیمتین م اور ن اور ق کی مساوات آیندہ سے دریافت ہو سکتی ہے

ط م + د ن + ی ق + ک = ۰	اشتقاق لا کی ہین	
ب ن + د م + ف ق + ہ = ۰	ایضاً	ی ایضاً
س ق + ی م + ف ن + ح = ۰	ایضاً	ع ایضاً

دور کرو ق کو مساوات اول اور دویم سے اور اول اور سویم سے اور بعد اسکے جو دو مساوات حاصل ہونگی انمین سے دور کرو مقدار ن کو بعد اسکے جو مساوات حاصل ہو اسمین مقدار م پائی جاویگی اور اس مساوات سے قیمت م کی معلوم ہو جاویگی اور بعد اسکے بوسیلہ م کی قیمت ن اور ق کی دریافت ہو جاویگی مخرج م اور ن اور ق کی قیمتونکا یہہ دریافت ہوگا

ط ب س + ۲ د ی ف - ط ف۲ - ب ی۲ - س د۲ ظاہر ہے کہ اگر یہہ مقدار = ۰ تو قیمتین م اور ن اور ق لانہایت ہونگی یعنی اگر یہہ نسبت درمیان اشتقاق مساوات عام کی فرض کی جاوے تو مرکز سطح منحنی کا نہین ہوگا یہہ حال

قریب البیسنونیکا فقرہ (۴۸۱) مین بیان کیا گیا ہی —

(۴۷۹) اب ہم استعمال کرینگی واسطی دور کرنی اشکال لاءُ اور لاَعَ اور ءُعَ کی اوس طریقہ کو جو واسطی تبدیل کرنی اوتار کی لکہا گیا ہی جبکہ فرض کرین ہم اون صورتونکو جو فقرہ (۴۵۲) میں لکہی گئی ہی - تو —

لاَ = م لا″ + م۱ ا۱ ءُ″ + م۲ ا۲ ع″

ءُ = م ج لا″ + م۱ ج۱ ءُ″ + م۲ ج۲ ع″

عَ = م لا″ + م۱ ءُ″ + م۲ ع″

جبکہ لکہین ان قیمتونکو مساوات عام مین اور فرض کرین اشکال ہر واحد لا″ ءُ″ اور لا″ ع″ اور ءُ″ ع″ کو = ۰ تو ہمین تین مساوات ایندہ حاصل ہو سکینگی

(ط ا + د ج + ی) ا۱ + (د ا + ب ج + ف) ج۱ + ی ا + ف ج + س = ۰ اشکال لاَ ءُ کی ہی

(ط ا + د ج + ی) ا۲ + (د ا + ب ج + ف) ج۲ + ی ا + ف ج + س = ۰ ایضاً لاَ عَ ایضاً

(ط ا۲ + د ج۲ + ی) ا۱ + (د ا۲ + ب ج۲ + ف) ج۱ + ی ا۲ + ف ج۲ + س = ۰ ایضاً ءُ عَ ایضاً

اب ہم دریافت کرینگی کہ آیا یہہ تبدیلی اوتار کی ہر صورت مین عمل مین آسکتی ہی یا نہین یعنی دریافت کرینگی کہ قیمتین چہہ مجہول مقدارونکی جو تین مساوات گذشتہ مین ہین کس کس حالت مین ممکن ہین

(۴۸۰) مساواتین نئی محور ءُ″ کی یہہ ہین لا = ا۱ ع اور ءُ = ج۱ ع موافق فقرہ (۴۵۲) کی اسیواسطی جب کہ لکہین ہم ان قیمتونکو مساواتون گذشتہ کے مساوات اول مین تو حاصل ہوگا یہہ (ط ا + د ج + ی) لا + (د ا + ب ج + ف) ءُ + (ی ا + ف ج + س) ع

= ۰ یہہ مساوات اوس سطح کی ہی جو نقطہ شروع مین سی گذرتی ہی اب ظاہر ہی کہ اونار اس سطح کی ہر ایک نقطہ کی شرط ایندہ پورا کرتی مین اشمال لا ی = ۰ یعنی اوسی نسبت درمیان اور ح اکی معلوم ہوجاتی ہی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ اگر نیا محور ی کھنچا جاوی اس سطح مین تو بہی شرط مذکور پوری ہوجاویگی پس ہم کوئی ایک سمت محور لا کی فرض کرسکتی مین یعنی اوسکی سمت مقرر نہین ہی مگر سمت محور ی کی ایک خاص سطح معلوم مین ہی جو ابہی ثابت کی گئی ہی اور جز لا ی کا دور ہوکر ہی اسیطرح سی جبکہ دور کرین ہم ا اور ح کو اشمال لا ع مین سی اور مساوات ع سی جو یہہ ہین (لا = ا ع اور ی = ح ع) تو ہمین حاصل ہوگی ایک وہ مساوات جو پہلی حاصل ہوئی تہی اور یہہ مساوات اوس سطح کی جو نقطہ شروع مین سی گذرتی ہی اور جسکو ہمنی ابہی معلوم کیا ہی یہانسی ثابت ہوا کہ اگر ہم کھنچین محور ع کو اس سطح مین تو جز لا ع کا جاتا رہیگا جبکہ دریافت کیا ہمنی ا اور ح کو اسطرح پر تو ظاہر ہی کہ نسبت درمیان ا اور ح کی دریافت ہوسکتی ہی اشمال ی ع سی = مثلاً جبکہ مقرر کرین ہم مقام محور لا کا یعنی جبکہ فرض کرین کوئی ایک خاص قیمت ا اور ح کی تو ظاہر ہی کہ ہمین ایک سطح گذرتی ہوئی نقطہ شروع سی معلوم ہوجاویگی جس سطح مین کوئی سی دو خط اور کسی ایک مقام مین کھنچی گئی محور ی اور ع کی ہونگی اور جبکہ ع کو اسطرح کھنچین تو ظاہر ہی کہ مقدار ا اور ح کی ہمین معلوم ہوجاویگی اور اسیواسطی نسبت درمیان ا اور ح کی معلوم ہوجاویگی اشمال لا ی = ۰ سی - چونکہ نسبت درمیان

جو شرط کہ موافق اس عمل ہوئی اوسی ایک مساوات تیسری درجہ کی پیدا ہوئی جیسا
کہ شابہت مساوات سی معلوم ہوتا ہی اور اسی قیمت ح، کی معلوم ہو جاویگی اور
یہی حال محور ع کا ہوگا یہانتک بات ہوا کہ تین قیمتیں مساوات مرقومہ بالا تیسری درجہ
کی تین صحیح قیمتیں ح اور ح، اور ح، کی ہین ان تین مقادیر سی قیمتیں ا اور ا، اور
ا، کی دریافت ہو جاوینگی اور چونکہ ہر ایک مقدار کی صرف ایکہی قیمت ہی تو اسی معلوم
ہوتا ہی کہ صرف ایکہی صورت محور متقاطع علی القوایم ایسی ہو سکتی ہی کہ اگر مساوات سطح
منحنی نسبت اوسکی لی جاوی تو اوسمین سی اجزای حاصلضرب مقادیر غیر منقطع کی نہین ہونگی
(۲۸۲) جبکہ مرکز لوکس کا ہو تو صورت اوسکی مساوات کی بوسیلہ تبدیلی نمرہ ۵ بالا
کی بعد اختصار کی ہو جاویگی ط، لا + ب، ی + س، ع + ک، = ۰ جبکہ یہ تین قیمتین اشکال
کی اور دور کرین علامت مقادیر مجہول کو تو ل لا + م ی + ن ع = ۱ واضح ہو کہ
ہم ترتیب تبدیلی کے بدل سکتی ہین یعنی ہم پہلی دور کر سکتی حاصلضرب مقادیر غیر منقطع
کو جیسا کہ نقرہ گذشتہ مین کیا اور بعد اسکی دور کر سکتی ہین تین باقی جزونکو بوسیلہ تبدیلی
نقطہ شروع کی اور مساوات ایندہ بعد دو تبدیلی سے کے حاصل ہوتی ہے

ل لا + م ی + ن ع + ف لا ۰

(۲۸۳) وہ مساواتین جنکا لوکس مرکز رکھتا ہی تین قسم پر ہین اور یہہ صورتین
علامت مقادیر ل اور م اور ن پر موقوف ہین

(۱) علامت ان تینون کی مثبت ہو سکتی ہے

(۲) دو مثبت اور ایک سے منفی ہو سکتا ہے

(۴۳) ایک مثبت اور دو منفی ہو سکتی ہین

لیکن تینو مقدار منفی نہین ہو سکتی - جبکہ لکہین بجای ل اور م اور ن کی مقدار مقررہ

$\frac{1}{ط^2}$ اور $\frac{1}{ب^2}$ اور $\frac{1}{س^2}$ کو جنسین ط > ب اور ب > س تو صورتین مذکورہ بالا

سطح پر تعبیر ہونگی $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = 1$ اور $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2}$

$= 1$ اور $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = 1$ بہت آسان اور جلد طریقہ حاصل کرنی ان

سطوح منحنی کا بوسیلہ ان تراش کی ہوگا جو اوس سطح مین ہونگی جو متوازی سطح اوماری کی

ہی یا عمود سطح اوماری مین ہونگی لیکن صورت اخیر مین انکو تراش عظیم یا نقش کہتی ہین

بیان مجسم بیضوی کا

(۴۰۴) صورت (۱) $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = 1$

واسطی دریافت کرنی اوس نشان کی جو سطح لای پر ہو کا فرض کرو ع = ۰ ∴ $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ب^2} = 1$

ایضاً .... لاع پر .... ی = ۰ ∴ $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ع^2}{س^2} = 1$

ایضاً .... یع پر .... لا = ۰ ∴ $\frac{ی^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = 1$

یہانسی معلوم ہوا کہ تراشہای عظیم بیضوی ہین - فرض کرو کہ

ع = م ∴ تراش متوازی سطح لای کی یہ ہوگی $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ب^2} = 1 - \frac{م^2}{س^2}$

اور ی = ن ∴ تراش متوازی سطح لاع کی یہ ہوگی $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ع^2}{س^2} = 1 - \frac{ن^2}{س^2}$

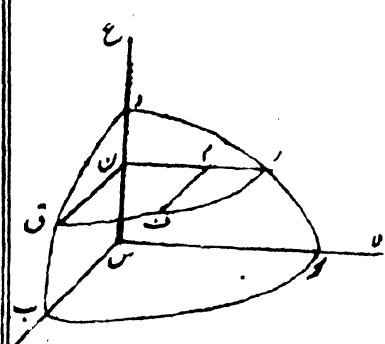
اور لا = ق ∴ .... یع .... $\frac{ی^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = 1 - \frac{ق^2}{س^2}$

اول مساوات ان مساواتو مین سی بیضوی کی ہی م یا ع = ۰ سی ع = س تک اور

جب ع = س تو خط منحنی ایک نقطہ ہو جاتا ہی اور جب ع بڑا ہو کا س سی تو

بیضوی ناممکن ہوجاویگا یہاں سے ثابت ہوتا ہی کہ سطح منحنی محدود دہی طرف سمت ع کی
اسیطور سی ثابت ہوسکتا ہی کہ باقی تراشین بہی بیضوی ہین سطح منحنی محدود دہی طرف سمت لا اور ر
کی اور چونکہ یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ تمام تراشین بیضوی ہین اور سطح منحنی تمام طرف سی محدود دہی
تو اسسی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ مساوات سطح منحنی مجسم بیضویکی ہی ۲ط اور ۲ب اور ۲س قطر
تراشہای عظیم کی ہین قطر مجسم بیضویکی کہلاتی ہین اور انجام ان اقطار کی راس مجسم بیضویکی کہلاتی ہین
اگر ب = ط تو صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی

$\frac{ع^2}{س^2} + \frac{ی^2}{ط^2} + \frac{ل^2}{ط^2} = 1$ اور یہہ مساوات اوس مجسم کرویکی ہی جو گردش کرنی سی
گرد محور ع کی پیدا ہوتا ہی اگر کوئی دو اور اشکال مساوی نہوں تو ان صورتوں مین بہی ہمین
مجسم مذکورہ بالا گرد باقی محوروں کی حاصل ہونگی اور اگر ط = ب = س فرض کیا جاوی
تو سطح منحنی کرہ کی ہوجاویگی —

(۵۰۸) نہم سطح بخوبی سمجہہ مین آنی اور تصور
بندہ نی اس سطح منحنی کے ہمنی اس جا ش من
یعنی آٹہوان حصہ مجسم بیضویکا لکہا ہی
ات ایک حصہ بیضویکا سطح لاور پری
او ایضاً لاع ایضاً

* واضح ہو کہ یہہ مساوات تعلق رکہتی ہی اوس شکل سی جو سطح لاو پر کہینچا جاویگا
مگر سطح لار متوازی سطح ع = م کی ہی اسسی معلوم ہوتا ہی کہ صورت شکل وہی سیجی
[illegible] جو تراش سی پیدا ہوا ہی —

ب د ایک حصہ بیضوی کا سطح ی ع پر ہی ۔

جو متوازی لا ی ہی

اور تراشش ق ف ر کی بھی بیضوی ہی اور سطح منحنی خیال کی جا سکتی ہی کہ وہ
پیدا ہوئی ہی بوسیلہ حرکت بیضوی س ا ب کے جو کم و بیش ہوتا ہی اور یہہ بیضوی اوپر
کی طرف متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور مرکز اسکا خط س ع مین واقع ہی
فرض کرو کہ ن ق ر ایک خاص مقام بیضوی مذکور کا ہی اور مان لو کہ

س ن = ع اور س ا = ط اور ن ر = لا،

ن م = لا اور س ب = ب اور ن ق = ی،

م ف = ی اور س د = س

تو اب بوسیلہ بیضوی ق ف ر کی یہہ حاصل ہوگا $\frac{لا^2}{لا_1^2}+\frac{ی^2}{ی_1^2}=1$

اور بوسیلہ بیضوی د ر ا اور د ق ب کی ہمیں حاصل ہوگا

$\frac{لا_1^2}{ط^2}+\frac{ع^2}{س^2}=1$ اور $\frac{ی_1^2}{ب^2}+\frac{ع^2}{س^2}=1$ اسواسطی $\frac{لا_1^2}{ط^2}=\frac{ی_1^2}{ب^2}$

جبکہ ضرب کریں پہلی مساوات کو ($\frac{لا_1^2}{ط^2}$) یا اسکی مساوی کہ ($\frac{ی_1^2}{ب^2}$) سی ہمین یہہ حاصل
ہوگا $\frac{لا^2}{ط^2}+\frac{ی^2}{ب^2}=\frac{لا_1^2}{ط^2}=1-\frac{ع^2}{س^2}$ ∴ $\frac{لا^2}{ط^2}+\frac{ی^2}{ب^2}+\frac{ع^2}{س^2}=1$

مجسم بعید البیضونکی بیانمین

(۴۸۶) صورت (۲) $\frac{لا^2}{ط^2}+\frac{ی^2}{ب^2}-\frac{ع^2}{س^2}=1$ تراشہای عظیم اسکی یہہ ہونگے

سطح لا ی پر $\frac{لا^2}{ط^2}+\frac{ی^2}{ب^2}=1$ .... (۱)

سطح لا ع پر $\frac{لا^2}{ط^2}-\frac{ع^2}{س^2}=1$ .... (۲)

سطح ی ع پر $\frac{ی^2}{ب^2}-\frac{ع^2}{س^2}=1$ .... (۳)

مساوات پہلی بیضویکی ہی جسکی محور ۲ط اور ۲ب ہین اور (۲) اور (۳) مساواتین بعید البیضویکی ہین جن دونوکا قطر متجانس ۲س ما - آ ہی اگر لاکم ط سی ہو یا کم ب سی ہو تو ع ناممکن ہوگا جبکہ فرض کرین ع اور کا اور لا کی قیمتین م اور ن اور ق تو ہمین تراشین متوازی لا کی بیضوی حاصل ہونگی اور متوازی ع اور لا ع کی بعید البیضوی حاصل ہونگی

(۴۸۷) شکل مرقومہ ذیل تعبیر کرتی ہی اٹھوان حصہ اس سطح منحنی کا اب بیضوی لا ر پر ہی اور ار بعید البیضوی لا ع پر ہی اور ب ق دوسرا بعید البیضوی ع پر ہی - یہہ سطح منحنی خیال کی جاسکتی ہی کہ وہ پیدا ہوئی ہی بوسیلہ حرکت بیضوی س اب کی جو کم و زیادہ ہوتا ہی اور یہہ بیضوی متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور مرکز اسکا س ع مین ہی فرض کرو ن ق ر مقام بیضوی موزہ بالا کا ہی اور فرض کرو -

س ن = ع اور س ا = ط اور ن ر = لا

ن م = لا اور س ب = ب اور ن ق = ی

م ف = ی اور س د = س

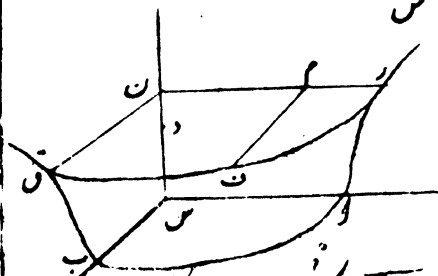
تو اب بوسیلہ بیضوی ف ق ر کی یہہ حاصل ہوگا

$$\frac{لا^2}{لا^2} + \frac{ی^2}{ی^2} = ۱$$ اور

بوسیلہ بعید البیضوی ار اور ب ق کی یہہ حاصل ہوگا -

$\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ۱$ اور $\frac{کو^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ۱$ اسیواسطی $\frac{لا^2}{ط^2} = \frac{کو^2}{ب^2}$ اورجبکہ ضرب کرین

مساوات اول کو $\frac{لا^2}{ط^2}$ سی یا اوسکی مساوی لہ $\frac{کو^2}{ب^2}$ سی تو

$$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{کو^2}{ب^2} = \frac{لا^2}{ط^2} = ۱ + \frac{ع^2}{س^2} \therefore \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{کو^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ۱$$

اس سطح کو مجسم بعید البیضوی ایک صفحہ کی کہتی ہین کیونکہ اوسمین ایک مسلسل سطح منحنی

پیدا ہوتی ہی مثل ایک صفحہ کی تنہی ہی اگر .... تو سطح منحنی اوس مجسم بعید البیضویکی

ہی گی جو حرکت کرنی سی گرد قطر متجانس کے پیدا ہوگی —

(۴۸۹) نقطہ شروع مین سی گذرتا ہوا کہنچو ایک خط جسکی مساواتین یہہ ہین —

$لا = لَع$ اور $کو = حَع$ اور جبکہ لکہین ان قیمتونکو مساوات آیندہ مین

$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{کو^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ۱$ .... تو ہمین یہہ حاصل ہوگا

$$\left(\frac{ل^2}{ط^2} + \frac{ح^2}{ب^2} - \frac{۱}{س^2}\right)ع^2 = ۱ \therefore ع = \pm \frac{ط\,ب\,س}{\sqrt{ب^2 س^2 ل^2 + ط^2 س^2 ح^2 - ط^2 ب^2}}$$

یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ خط ملیگا سطح منحنی سی جبتک کہ مخرج کسرکا مساوی ایک

مقدار صحیح اور محدود کی ہی فرض کرو کہ $ب^2 س^2 ل^2 + ط^2 س^2 ح^2 = ط^2 ب^2$ تو اب

ظاہر ہی کہ یہہ خط سطح منحنی سی فاصلہ لانہایت پر ملیگا یعنی یہہ خط سطح منحنی کا متفق

الملاقات ہی - مساوات مرقومہ بالاسی نسبت درمیان $ل$ اور $ح$ کی معلوم ہوگی

جبکہ خط انکا خط متفق الملاقات سطح منحنی کا ہو - اگر بجای $ل$ اور $ح$ کی لکہین

قیمتین اونکی $\frac{لا}{ع}$ اور $\frac{کو}{ع}$ کو تو ہمین حاصل ہوگی ایک مساوات جسمین مقادیر $لا$

اور $کو$ اور $ع$ کی پائی جاینگی اورجسکا لوکس شامل تمام خطوط متفق الملاقات سطح

منحنی سی ہوگا کیونکہ کوئی سا نقطہ اوسکا نسبت مرقومہ بالا رکہیگا —

مساوات اس سطح منحنی کے یہہ ہی —

$$ب^2 س^2 لا^2 + ط^2 س^2 ی^2 = ط^2 ب^2 ع^2 \quad یا \quad \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ب^2} = \frac{ع^2}{س^2}$$ ہم نقرہ

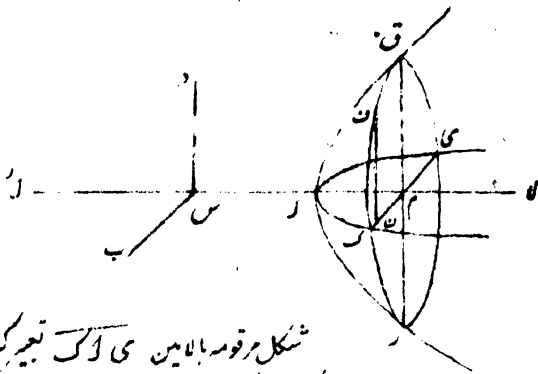
(۵۱۴) مین لکہین کے کہ یہہ مساوات اوس مخروط کی ہی جسکا راس نقطہ شروع پر ہی اور جسکا قاعدہ یا تراشش متوازی محور کی بیضوی ہی —

(۴۸۹) صورت (۳) $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = 1$

تراشہای عظیم اسکی سطح لای پر یہہ ہونگی $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ب^2} = 1$ ---- (۱)

ایضاً لاع ایضاً $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ع^2}{س^2} = 1$ ---- (۲)

ایضاً یع ایضاً $\frac{ی^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = -1$ ---- (۳)

مساوات (۱) مساوات بعید البیضوی کی ہی جسکی محور ۲ ط اور ۲ ب$\sqrt{-1}$ اور مساوات (۲) مساوات ایک ایسی بعید البیضو کی ہی جسکی محور ۲ ط اور ۲ س$\sqrt{-1}$ ہین اور مساوات (۳) کا لوکس ناممکن ہی اسواسطی سطح یع سطح منحنی سی کبہی نہین ملیگی اون تراشون سی جو متوازی سطح اوتاری کی ہین وہ جو متوازی لای اور لاع کی ہی بعید البیضوی ہونگی اور وہ جو متوازی یع کی ہی ایسی بیضوی ہی جسکی مساوات یہہ ہی $\frac{ی^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{س^2} = \frac{ق^2}{ط^2} - 1$ یہان سی ثابت ہوتا ہی کہ یہہ بیضوی ناممکن ہوگا اگر ق کا اکم ± ط سی ہو اسواسطی اگر دو سطح متوازی یع اور ± ط کی فاصلہ پر کہینچی جاوین تو کوئی حصہ سطح منحنی کا ان سطوح مین پایا نہین جاویگا —

شکل مرقومہ بالامین ی ل ک تعبیر کرتا ہی اوس تراش

بعید البیضویکو جو سطح لا ک پر کہینچی گئی ہی اور ق ل ر اوس تراش بعید البیضویکو جو سطح

لا ع پر کہینچی گئے ہی اور ی ل ک ر ایک تراش بیضوی متوازی ی ع کی ہی اور ایک

دوسری متوازی اور مقابل اسکی بعید البیضوی ایک صفحہ کی جسکی راس ل ہے یرہی ایسے اسطرح

سطح منحنی کو بعید البیضوی مجسم دو صفحہ کی کہتی ہین —

(۴۹۰) مساوات سطح منحنی کی بطور آیندہ کی شکل مرقومہ بالا سے حاصل ہو گی -

فرض کرو ل م = لا اور ن م = ی اور ن ک = ع اور ق م = ع، اور

م ک = ی، تو اب بوسیلہ تراش بیضوی ق ف ک ر کی مساوات آیندہ حاصل ہو نگی

$\frac{ع^2}{ع_1^2} + \frac{ی^2}{ی_1^2} = ۱$ اور بوسیلہ بعید البیضوی ی ل ک اور ق ل ر کی یہہ حاصل ہونگے

$\frac{ی_1^2}{ب^2} - \frac{لا^2}{ط^2} = -۱$ اور $\frac{ع_1^2}{س^2} - \frac{لا^2}{ط^2} = -۱$ ∴ $\frac{ی_1^2}{ب^2} = \frac{ع_1^2}{س^2}$ جملہ ضرب کرین

مساوات اول کو $\frac{ع_1^2}{س^2}$ سے یا اوسکی مساوی $\frac{ی_1^2}{ب^2}$ سے تو $\frac{ع^2}{س^2} + \frac{ی^2}{ب^2} = \frac{ع_1^2}{س^2} = \frac{لا^2}{ط^2} - ۱$

∴ $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ۱$

(۴۹۱) $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ب^2} - \frac{ع^2}{س^2} = ۰$ مساوات متفرالالتقات مخروطی کی ہے

یہاں سی ثابت ہوتا ہی کہ صورت (۲) اور (۳) مین ہین منفرا ملاقات محو دطی حاصل ہوتی جبکہ دور کرین گی ہم اوس مقدار مقررہ کو جو کہ مساواتون مین پائی جاتی ہین ہی —

بیان اون سطوح منحنی کا جو مرکز نہین رکہتی ہین

(۲۹۴) واضح ہو کہ اس صورتین مساوات عام مین سی وہ اجزا دور ہو سکتی ہین جو حاصل ضرب مقادیر غیر منقطع سی حاصل ہوتی ہین جیسا کہ (۲۷۹) مین ہوئی ہین اس صورت مین مساوات یہہ ہو جاویگی ط لا² + ب ی² + س ع² + ۲ ک لا + ۲ ہ ی + ۲ ج ع + کہ = ۰

واسطی دور کرنی تین اوس جزونکی فرض کرو لا = م + لا' اور ی = ن + ی' اور ع = ق + ع' ∴ ط لا'² + ب ی'² + س ع'² + ۲ (ط م + ک) لا' + ۲ (ب ن + ہ) ی' + ۲ (س ق + ج) ع' + کہ' = ۰ فرض کرو امثال لا' اور ی' اور ع' = ۰ ∴ م = − ک/ط اور ن = − ہ/ب اور ق = − ج/س اور چونکہ اس قسم کی سطوح منحنی مین مرکز نہین ہوتا ہی اسواسطی قیمتین بعض یا تمام مقدار م اور ن اور ق کی لانہایت ہونی چاہئی اسی سبب سی دو یا تین امثال ط اور ب اور س مین سی = ۰ کی ہونا چاہئی پس یہان سی ثابت ہوا کہ جب اجزا لا لا اور لا ع اور ی ع دور ہو گئی تہی اوس وقت ایک یا دو امثال لا² اور ی² اور ع² کی بہی جاتی رہی ہین یہہ صورت مطابق نقرہ (۹۲) کی ہی اب ظاہر ہی کہ تینون امثال = ۰ کی نہین ہو سکتی ہین کیونکہ اس صورتین ہمین مساوات عام مساوات سطح مستوی ہو جاویگی یہان سی ظاہر ہوتا ہی کہ اس مساوات کی دو صورتین حاصل ہو سکتی ہین اول جبکہ ط جاتا رہی اور دوم جب ط اور ب دونو جاتی رہین —

(۲۹۳) فرض کرو ط = ۰ اور چونکہ ہمکو مقدار م اور ن اور ق دریافت کرنی ہین

تواب ہم فرض کرسکتی ہین کہ ـــ ۰ اور اشال لاَ اور عَ کو = ۰ اسیواسطی صورت مساوات

کی یہہ ہوجاویگی ب یٗ^۲ + س ع^۲ + ۲ ک لاٗ = ۰ یا (ب/۲ک) یٗ^۲ + (س/۲ک) ع^۲ = لاٗ

اس کی دو صورتین ہوسکتی ہین جو موقوف ہین علامت ب/۲ک اور س/۲ک پر ـــ

(۱) صورت (۱) فرض کرو کہ علامتین یٗ^۲ اور ع^۲ ایکسی اور نسبت ہین

اور اگر منفی ہون تو ہمین علامت لاٗ کی بدلنی چاہئی تاکہ صورت مساوات کی یہی ہوجاوی

لکہو ۱/ل بجای ب/۲ک اور ۱/لٗ بجای س/۲ک اور دور کرکی علامت لاَعَ اور کر

جنکی جگہہ صورت نہین ہی صورت مساوات کی یہہ ہوجاویگی یٗ^۲/ل + ع^۲/لٗ = لا

اور تراشہای عظیم سطح لایٗ پر یہہ ہوگی ـــ یٗ^۲ = ل لا .... (۱)

ایضاً .... لاَعَ ایضاً ـــ ع^۲ = لٗ لا .... (۲)

ایضاً .... یٗعَ ایضاً ـــ لٗ یٗ^۲ + ل ع^۲ = ۰ .... (۳)

مساواتین (۱) اور (۲) توکسی اُن قریب البیضوی کی ہین جو لاَ کی مثبت سمت کی طرف کہینچی

گئی ہین اور (۳) مساوات نقطہ کی ہی جو نقطہ شروع خود ہی

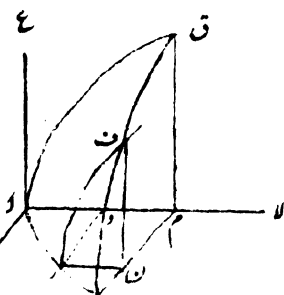
واسطی دریافت کرنی اون تراشو نکی جو متوازی

لایٗ کی فرض کرو ع = ق ∴ یٗ^۲/ل = لا − ق^۲/لٗ .... (۱)

ایضاً لاَعَ کی فرض کرو ی = ن ∴ ع^۲/لٗ = لا − ن^۲/ل .... (۲)

ایضاً یٗعَ کی ہو فرض کرو لا = م ∴ یٗ^۲/ل + ع^۲/لٗ = م .... (۳)

مساوات (۱) اور (۲) مساوات قریب البیضوی کی ہین اور یہہ مساوی

تراشہای عظیم کی ہین اور انین صرف مقدار مقررہ کا فرق ہی اور اسی

معلوم ہوتا ہی کہ نقطہ شروع مختلف مقام پر ہی بلحاظ خط منحنی کی اور (۳) بیضوی ہی —

(۴۹۵) شکل مرقومہ بالا مین اق اور ار حصہ قریب البیضوی کی سطح لاع اور لای پر ہین اور سطح منحنی حرکت قریب البیضوی اق سی پیدا ہوتی ہی اور یہہ قریب البیضوی حرکت متوازی اپنی کرتا ہی اور راس اسکا قریب البیضوی ار کی ساتھہ حرکت کرتا ہی فرض کرو کہ ف رن ایک خاص مقام قریب البیضوی متحرک کا ہی اور مان لو کہ ام = لا اور م ن = ی اور ل ف = ع اور کھینچو رو متوازی اد یا م ن کی تو اب بوسیلہ قریب البیضوی رف کی یہہ حاصل ہوگا

$$ع^2 = لَ رن = لَ (ام - او) = لَ (لا - \frac{ی^2}{ل}) \therefore \frac{ع^2}{لَ} + \frac{ی^2}{ل} = لا$$

اس سطح منحنی کو مجسم قریب البیضوی دار کہتی ہین — اور یہہ مرکب ایک تمام صفحہ ہی مثل گردش مجسم قریب البیضوی کی —

(۴۹۶) صورت (۲) فرض کرو کہ علامت $ی^2$ اور $لا^2$ کی مختلف ایک دوسری مین ہین

$\therefore \frac{ی^2}{ل} - \frac{ع^2}{لَ} =$ لا تراشہہای عظیم اسکی سطح لای پر $ی^2 = ل لا$ (۱)

ایضاً ...... لاع پر $ع^2 = - لَ لا$ (۲)

ایضاً ...... یع پر $لَ ی^2 - ل ع^2 = ۰$ (۳)

مساوات (۱) اور (۲) قريب البيضوي هين اول مطابق نسبت لا كي هي اور دوسري مطابق منفي لا كي هي اور (۳) مساوات اون دو خطوطكي هي جو نقطه شروع سي گذرتي هين تراشين اون سطحون پر جو متوازي لا و اور لا ع كي هين قريب البيضوي هين اور وه جو متوازي م ع كي هي بعيد البيضوي هين

(۴۹۷) ل ق قريب البيضوي سطح لا ع پر هي اور ل ر قريب البيضوي سطح لا و پر هي اور سطح منحني حركت قريب البيضوي ل ق سي پيدا هوتي هي جو متوازي اپني حركت كرتا هي اور راس اسكا قريب البيضوي ل ر كي ساتهه حركت كرتا هي فرض كرو ر ق ن ايك خاص مقام اس متحرك قريب البيضوي كا هي اور مان لو ل م = لا اور م ن = و اور ن ق = ع اور كهينچو ر و متوازي م ن كي تو بوسيله قريب البيضوي ر ق كي هين يهه حاصل هوگا —

ع۲ = ل ر ن = ل (ل و − ل م) = ل (و۲/ل − لا) = و۲ − ل لا

اس سطح منحني كو بعيد البيضوي دار مجسم قريب البيضوي كهتي هين —

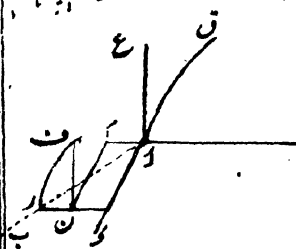
(۴۹۸) مساوات بيضوي دار اور بعيد البيضوي دار مجسم قريب البيضوي كي حاصل هو سكتي هي مجسم بيضوي اور مجسم بعيد البيضوي ايك صفحه سي جسطرح سي كه مساوات قريب البيضوي كي مساوات بيضوي سي حاصل هوئي تهي فقره (۲۲۸) مين بوسيله اس فرض كي كه مركز لا نهايت فاصله پر هي تبديل كرو نقطه شروع كو اس سطح منحني پر بوسيله لكهني لا − ط كي بجاي لا كي تو اب ظاهر هي كه مساوات مجسم بيضوي

اور مجسم بعید البیضوی کی یہہ ہوگی $\frac{(لا-ط)^۲}{ط^۲}+\frac{ی^۲}{ب^۲}\pm\frac{ع^۲}{س^۲}=۱$ فرض کرو کہ
م اور مَ فاصلہ راس نقاط انتہی سے یا اون راسون سے ہے جو سطح لا ی پر لا ع
پر کھینچے جاوینگی ∴ $ب^۲=ط^۲-(ط-م)^۲=۲ط م-م^۲$ اور
$س^۲=۲ط مَ-مَ^۲$ جبکہ لکھین ان قیمتون کو اس مساوات مین $\frac{لا^۲}{ط^۲}-\frac{۲لا}{ط}+۱+\frac{ی^۲}{ب^۲}\pm\frac{ع^۲}{س^۲}$
$=۱$ تو یہہ حاصل ہوگا $\frac{لا^۲}{ط^۲}-\frac{۲لا}{ط}+\frac{ی^۲}{۲ط م-م^۲}\pm\frac{ع^۲}{۲ط مَ-مَ^۲}=۰$
یا $\frac{لا^۲}{ط}-۲لا+\frac{ی^۲}{۲م-\frac{م^۲}{ط}}\pm\frac{ع^۲}{۲مَ-\frac{مَ^۲}{ط}}=۰$ یا $\frac{ی^۲}{۲م}\pm\frac{ع^۲}{۲مَ}-۲لا=۰$
جبکہ ط لانہایت فرض کیا جاوے — یہان سے معلوم ہوتا ہے کہ وہ مساوات جو حاصل
ہوگی واسطے مجسم بیضوی اور مجسم بعید البیضوی کی وہ صادق ہوگی واسطے مجسم قریب
البیضوی کی بعد لکھنے قیمتون مذکورہ بالا کے —

(۴۹۹) ہمنے فقرہ (۴۹۲) مین بیان کیا ہی کہ دو نو ط اور ب دور ہو سکتی ہین اور
اس صورت مین صورت مساوات کی یہہ ہو جاویگی —
$س ع^۲+۲ک لا+۲ ہ ی+۲ ج ع+ کہ=۰$ بوسیلہ اوس طریقہ تبدیلی کی جو
فقرہ (۴۹۲) مین لکھا گیا ہی ہم اشکال لا اور ی کو دور نہین کر سکتی ہین مگر
اشکال ع اور مقدار مقررہ کہ دور ہو سکتا ہی یہان سے ثابت ہوتا ہی کہ صورت
مساوات کی بعد تبدیلی کے یہہ ہو جاویگی $س ع^۲+۲ک لا+۲ ہ ی=۰$ یا
$ع^۲=ل لا+لَ ی$ اگر $-\frac{۲ک}{س}=ل$ اور $-\frac{۲ہ}{س}=لَ$ فرض کیا جاوے
(۵۰۰) یہان سے ظاہر ہوتا ہی کہ دو صورتین موافق علامت ل اور لَ کی ہو سکتی ہین
جو دونو مثبت یا ایک منفی اور ایک مثبت ہوگی صورت اول فرض کرو کہ ل اور لَ

دونون نسبت مین تو اب ظاہر ہی کہ تراش سطح لاک پر یہہ ہوگی ل لا + ل‌َ ک = ۰ (۱)

اور تراش سطح لاع پر یہہ ہوگی ع^۲ = ل لا (۲) اور سطح کع پر یہہ ہوسے گی

ع^۲ = ل‌َ ک (۳) مساوات (۱) خط مستقیم اب کی اور (۲) مساوات قریب البعضوی

اق کی ہی اور (۳) بہی مساوات قریب البعضوی کی ہی کہ شکل مین کہنچا ہوا ہین

ہی اور تراشین اون سطوح پر جو متوازی سطحون مذکورہ بالا کی ہین مشابہ ہر ایک صورت مین ہین اور سطح منحنی حرکت قریب البعضوی اق سی پیدا ہوگی جبکہ یہہ قریب البعضوی

متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور راس اسکا خط اب بناتا ہی فرض کرو کہ ف ن ایک خاص مقام اس قریب البعضو یکا ہی اور مان لو ام = لا اور م ن = ک

اور ن ف = ع تو ع^۲ = ل . ب ن = ل (ل‌َ/ل ک + لا) = ل‌َ ک + ل لا

چونکہ یہہ سطح منحنی ایک استواہ ہی جسکا قاعدہ قریب البعضوی ہی اسیواسطی اسکو اکثر سطوح منحنی دویم درجہ نہین لکہتی ہین — صورت (۲) اگر علامت ل اور ل‌َ کی مختلف ہون تو بہی یہی سطح منحنی پیدا ہوگی مگر مختلف مقام پر ہوگی —

باب ہشتم (۸)

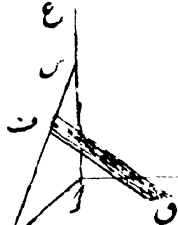
سطوح منحنی استوانی اور مخروطی کے بیان مین

(۵۰۱) واضح ہو کہ اگر ہم خواص سطوح منحنی کی عموماً طور سی بیان کرین تو بیشمار سطوح منحنی ہوسکتی ہین اور یہہ اوسوقت ہوگا جبکہ حدود داد نکی موافق اونکی خاص

ترکیب پیدا کرنی سطوح منحنی سے لکھی جاوے اور بعد اسکی اونہیں ایک خاص صورت جریہ مین لکھین مثلاً تحریر اقلیدس مین تعریف استوانہ کی یہہ کئی گئی ہی استوانہ ایک سطح منحنی ہی جو پیدا ہوتا ہی گردش ایک خط مستقیم سے گرد ایک دایرہ مفروض کے جبکہ خط مذکور متوازی ایک خط مفروض کے ہو اور اگر قاعدہ استوانہ مذکور کا دایرہ نہو بلکہ کوئی اور خط منحنی ہو مثلاً فرض کرو کہ قطع البیضوی ہی تو ظاہر ہی کہ اس صورتمین بھی ہمین ایک ایسی سطح منحنی حاصل ہو جسمین خواص ضروری استوانہ کی پائی جاوین کی اور اب ظاہر ہی کہ بہت سی سطح پر تعریف استوانہ کی صادق آویگی اسیطرحسی تعریف سطح منحنی مخروطی وغیرہ کی ہو سکتی ہی — بعد بیان کرنی ترکیب پیدا ہونی سطح منحنی یا اوس قاعدہ کی موافق جسکی خطوط حرکت کرتی ہین مساوات ان سطوح منحنی کی دریافت کرنی چاہئی یعنی مساوات اونکی نسبت اوتار لا اور ی اور ع کی جو وتر ایک نقطہ سطح منحنی کے ہین معلوم کرنی چاہئی اور ظاہر ہی کہ یہہ مساوات عام ہوگی اور یہہ موافق خاص فرضونکی مساوات خاص سطح منحنی کے ہو جاویگی —

سطح منحنی کے بیانمین

(۵۰۲) واضح ہو کہ ہم پہلی ایک آسان اور فایدہ مند مثال لکھین کے تاکہ طالب علم کو مثال لینی آیندہ آسان ہو جاوین — دریافت کرو وہ سطح جو حرکت ایک خط مستقیم سے پیدا ہوتی اور یہہ خط متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور ایک خاص خط

مستقیم مین سے گذرتا ہی فرضکرو لہ لا اور لا اور لا ع محور متقاطع علی القوایم مین
اور یہان لو کہ مساواتین خط مستقیم ب س یہہ ہین (اور یہہ واسطی آسانی کی سطح لا ع
مین فرضکیا گیا ہی) لا ی + ق ع = ا
لا = ۰ (۱)

اور فرضکرو کہ مساواتین خط متحرک ق ف کی
ایک خاص مقام پر یہہ ہے
لا = ک ع + ط
ی = ح ع + ص (۲)
ظاہر ہی کہ ک اور ح مماس اون زاویو
ہین جو کہ نشان ق ف کا محور لا اور
ی سے بناتا ہی اور چونکہ ق ف متوازی اپنے حرکت کرتا ہی اسواسطی
نشان اسکے بہی متوازی اپنے ہونگے یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ ک اور ح مقدار معین ہے
اور معلوم ہین اور چونکہ ط اور ص اوتار اوس نقطہ کی ہین جہان ق ف قطع کرتا ہے
سطح لا ی کو تو ظاہر ہی کہ یہہ مقادیر بدلینگے موافق ہر ایک تبدیلی مقام ق ف کی
اور چونکہ یہہ غیر منقطع ہین اسواسطی یہہ مقدارین مساوات سطح مین جو انجام مین حاصل
ہوگی نہین پائی جاوینگے اب ظاہر ہی کہ مقدار ط اور ص مقادیر لا اور ی
اور ع مین تعبیر ہو سکتی ہین۔ نقطہ ف پر جہان ف ق ملتا ہی
ب س سے یہہ مساواتین بوسیلہ (۱) اور (۲) کی حاصل ہونگی
لا = لا = ۰ اور ع = ع = - ط/ک اور ی = ی = - ط ح/ک + ص
لیکن چونکہ (۱) واسطی ہر ایک قیمت لا اور ی اور ع کی صادق آتی ہے

اسیواسطی بوسیلہ لکھنی قیمتونکی مساوات (۱) مین ہمین مساوات آئندہ حاصل ہوگی ن (− طح/د + ص) + ق (− ط/ح) = ۱ اوراس مساوات سی تعلق درمیان ط اور ص کی معلوم ہوتا ہی یا اسکی نسبت درمیان مقادیر غیر منقطع ط اور ص کی معلوم ہوتی ہی یا اوس نسبت کو تعبیر کرتی ہی جوکہ مقادیر مساوی مقدار ط اور ص کی اسمین رکھتی ہین یعنی جبکہ لکھین بجای ط اور ص کی مقادیر لا − اع اور ی − حع کو جو (۲) سی حاصل ہوتی ہین تو ہمین حاصل ہوگی ایک مساوات جسی نسبت درمیان مقادیر لا ی اور ع کی معلوم ہوگی اور اس مساوات کو مساوات سطح منحنی کے کہتی ہین :- ن ح/د (لا − اح) + ن (ی − حع) − ق/د (لا − اع) = ۱ یا − (نح + ق)/د لا + ن ی + ق ع = ۱

یہہ مساوات ایک سطح مستویکی ہی اور یہہ ایک عام طریقہ واسطی دریافت کرنی مساوات ایک سطح مستویکی ہی کیونکہ اسطورسی یہہ مساوات ہر ایک قسم کی محورونکی صورتمین معلوم ہوسکتی ہی اور یہہ مساوات ایک آسان خاصیت سطح مستوسی دریافت کی گئی ہی اب ہم بحث اسی سطوح منحنی کے کرینگی جو حرکت ایک خط مستقیم سی پیدا ہوتی ہین جبکہ خط مذکور موافق ایک قاعدہ مفروض کی حرکت کرتا ہے *

بیان استوانی سطوح منحنی کا

(۵۰۳) حد ایک استوانی سطح منحنی پیدا ہوتی ہی گردش ایک خط مستقیم سی جو حرکت متوازی اپنی کرتا ہی سطح جو … مین اور … اوسکا ایک خط منحنی مفروض بناتا ہی خط مستقیم کو جو حرکت کرتا ہی جنریٹرکس یعنی خط متحرک اور خط منحنی

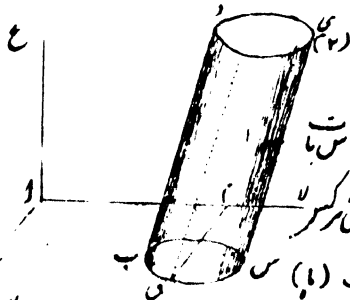
کو جو اسکی سریکی حرکت سی پیدا ہوتا ہی ڈائی ریکٹرکس کہتی ہین دریافت کرو مساوات سطح منحنی کے ۔ فرض کرو کہ مساواتین خط متحرک کی ایک خاص مقام پر یہہ ہین لا = الف ع + ط اور ی = ح ع + ص اور چونکہ یہہ خط متوازی اپنی حرکت کرتا ہی تو ظاہر ہی کہ مقادیر الف اور ح مین کسی نوع کا فرق نہین آویگا اور ہر مقام خط متحرک پر قیمت انکی یہہ ہی رہیگی مگر قیمت ط اور ص کی جو اوتار اوس نقطہ کی ہین جہان خط متحرک سطح لا ی سی ملتا ہی ایک خاص مقام پر یہی رہیگی اور قیمت انکی بدلیگی جبکہ مقام خط متحرک کا بدلیگا مثلاً جبکہ ایک نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی جای کو بغیر علیحدہ ہونی کی خط متحرک سی یعنی جبکہ صرف اسی خط پر حرکت کرتا ہی تو ظاہر ہی کہ ط اور ص مین کسیطرحکا فرق نہین اویگا اور جبکہ نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی جا کو ایک خط متحرک سی دوسری خط متحرک پر تو ظاہر ہی کہ ط اور ص غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونگی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ یہہ دونو مقدار مقررہ ایکہی وقت مین اور غیر منقطع یعنی ایکہی وقت مین ہوتی ہین تو ظاہر ہی کہ یہہ دونون ایک دوسری پر موقوف ہونگی اور اسکو اسطرح پر تعبیر کرتی ہین ایک مقدار جملہ دوسریکا ہی ۔

مثلاً ص = ک (ط) یعنی جملہ (ط) ہی اور جبکہ لکھین ہم قیمتین ط اور ص کی جو مساوات گذشتہ سی حاصل ہونگی تو ی ۔ ح ع = ک (لا ۔ الف ع) اور یہی مساوات سطح منحنی استوانیکی ہی ۔

(۵۰۸) ضورت جملہ ک کی خاصیت سطح منحنی پر جبکہ وہ ایک خاص مقام پر ہی موقوف ہوگی فرضکرو مساواتین ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی سکے یہہ ہین ۔

ح (لا اور ی اور ع) = ۰ اور ح' (لا اور ی اور ع) = ۰ چونکہ خط
منحنی ہر ایک مقام پر خط متحرک سے ملتا ہی تو ظاہر ہی کہ مساواتین اون دونوں کی
ہر ایک نقطہ تقاطع پر حاصل ہونگی اور اب ظاہر ہی کہ مقادیر لا اور ی اور ع
چار مساواتون خطوط مذکورہ بالا سے دور ہو سکتی ہین اور بعد اس تبدیلی کے
ہمین ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین صرف مقدار ط اور ص اور مقدار
مقررہ پائی جاوینگی اور ایسی صورت جملہ کی دریافت ہو جاویگی
جبکہ لکھین ہم بجائی ط اور ص کی اونکی قیمتین لا − اع اور ی − ح ع
تو ظاہر ہی کہ ہمین مساوات اسطوانہ مطلوب کی حاصل ہوئیگی ۔

(۵۰۵) مثال اول ۔ فرض کرو ڈائرکٹرکس یعنی خط منحنی دایرہ ب ق س
سطح لا ی مین ہی اور مانو کہ لا، اور ی، اوتار اوسکی مرکز کی ہین تو ظاہر ہی کہ
مساوات اوسکی یہہ ہوگی $\left.\begin{array}{l}(لا - لا_1)^2 + (ی - ی_1)^2 = ن^2 \\ ع = ۰\end{array}\right\}$ (۱) اور فرض کرو
ب اور ق ر اور س کی مختلف مقام جنریٹرکس یعنی خط متحرک کی ہین جسکی مساواتین

یہہ ہین $\left.\begin{array}{l}لا = اع + ط \\ ی = ح ع + ص\end{array}\right\}$ (۲)

اور اب ظاہر ہی کہ واسطی تعبیر کرنی اس بات کی کہ نقطہ ق پر دایرہ اور جنریٹرکس یعنی خط متحرک ملتا ہی مساوات (۱)

اور (۲) ایکسی ہونی چاہئی یعنے قیمتین لا اور ی اور ع کی اس مقام پر ایکسی ہونگی

∴ ع' — ع = ۰
∴ لا' — لا = ط
∴ ی' — ی = ص

جبکہ لکھین کے ان قیمتونکو مساوات (۱) مین تو یہہ حاصل ہوگا

$(ط - لا_۱)^۲ + (ص - ی_۱)^۲ = نق^۲$ (۳)

تو اب ظاہر ہی کہ صورت جملہ کی دریافت ہوگئی ہی جبکہ لکھین قیمتین ط اور ص کی جو (۲) میں ہین تو $(لا - لا ع - لا_۱)^۲ + (ی - ح ع - ی_۱)^۲ = نق^۲$

اور یہہ مساوات ترچھی استوانہ کی ہے جسکا قاعدہ دایرہ ہی اور یہہ سطح لا ی مین ہے

(۵۰۶) فرضکرو کہ مرکز دایرہ کا نقطہ شروع پر ہی —

∴ لا۱ = ۰ اور ی۱ = ۰ ∴ $(لا - لا ع)^۲ + (ی - ح ع)^۲ = نق^۲$

اور اگر نقطہ شروع الجام قطر پر جو متوازی محور لا کی ہی فرض کیا جاوی

تو $(لا - لا ع)^۲ + (ی - ح ع)^۲ = ۲ نق (لا - لا ع)$ —

(۵۰۷) فرضکرو کہ محور استوانہ کا متوازی محور ع کی ہی تو اب لا اور ح ہر واحد = ۰ کیونکہ یہہ مماس اون زاویونکی ہین جو نشان خط متحرک کا سطح لا ع اور ی ع مین لا ع سی بناتا ہي ∴ $(لا - لا_۱)^۲ + (ی - ی_۱)^۲ = نق^۲$ اور اگر محور لا ع سی منطبق ہوجاوي تو $لا^۲ + ی^۲ = نق^۲$ اور ع = ۰ ان صورتونمین استوانہ کو سیدھا استوانہ کہتی ہین اور اسکی اور خط متحرک کے مساوات ایکہی ہی اگر ڈائی ریکٹر یعنی خط منحنی ایک دایرہ سطح لا ع پر فرضکیا جاوي تو اس صورتمین مساوات سیدھے استوانہ کی یہہ ہوگی $لا^۲ + ع^۲ = نق^۲$ —

(۵۰۸) فرض کرو کہ ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی ایک قطع البیضوی سطح

لاک پر ہی اور راس اسکا نقطہ شروع پر اور محور اسکا منطبق محور لا پر ہی تو اس صورت مین مساواتین ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی اور خط متحرک کی یہہ ہونگی

$$\left.\begin{matrix} ى^2 = ق\,لا \\ ع = ٠ \end{matrix}\right\} \cdots (١)\ \text{اور}\ \left.\begin{matrix} لا = لع + ط \\ ى = ح ع + ص \end{matrix}\right\} \cdots (٢)$$

اور اب ظاہر ہی کہ مساواتین انکی نقطہ تقاطع پر یہہ ہونگی

ع = ع = ٠ اور لا = لا = ط اور ى = ى = ص جبکہ لکھین ہم ان قیمتوں کو

مساوات (١) مین تو حاصل ہوگا یہہ $ص^2 = ق\,ط$ ∴ $(ى - ح ع)^2 = ق(لا - لع)$

اور یہہ مساوات ایک ترچھی استوانہ کی ہی جسکا قاعدہ قریب البیضوی سطح لاى پر ہی

(٥٠٩) فرضکرو کہ ڈائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی قریب البیضوی سطح لاع پر ہی اور محور اسکا الا اور نقطہ شروع ا ہی - اور فرضکرو کہ جنریٹرکس یعنی خط متحرک متوازی سطح لاى کی ہی تو اب ظاہر کہ مساواتین یہہ ہونگے

$$\left.\begin{matrix} ع^2 = ق\,لا \\ ى = ٠ \end{matrix}\right\} \cdots (١)\qquad \left.\begin{matrix} ى + لا = ط \\ ع = ص \end{matrix}\right\} \cdots (٢)$$

تو اب مساوات سطح منحنی کے یہہ ہوگی $ع^2 = \frac{ق}{ا} ى + ق\,لا$ دیکھو واسطے اسکی ثبوت کی فقرہ (٤٩٩) کو -

بیان سطوح منحنی مخروطیکا

(٥١٠) حد - سطح منحنی مخروطی پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم سی جسکا ایک سرا ہمیشہ گذرتا ہی ایک نقطہ مفروض مین سی جبکہ دوسرا سرا ایک خط منحنی

مفروض کا بناتا ہی ۔ نقطہ مفروض کو مرکز سطح منحنی کا اور خط مستقیم کو جنریٹرکس یعنی خط متحرک اور خط منحنی مفروض کو ڈائی ریکٹرکس کہتے ہین ۔ فرضکرو ط اور ص اور س اونار مرکز کی ہین تو اب ظاہر ہی کہ مساواتین خط متحرک کی یہہ ہونگے

لا − ط = ک (ع − س)
ی − ص = ح (ع − س)

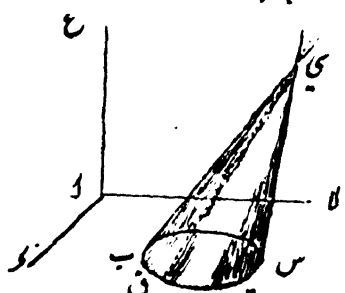
جبکہ ایک نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی جگہہ کو بغیر چھوڑنے خط متحرک کی یعنی جبکہ وہ اسی خط پر حرکت کرتا ہی تو ظاہر ہی کہ مقادیر ک اور ح مقدار مقررہ ہونگی مگر جبکہ وہ نقطہ اُترتا بھی ایک خط متحرک سی دوسری پر تو یہہ دونو غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونگی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ مقدار ک اور ح ایکہی وقت مین مقدار مقررہ ہوتی ہین اور ایکہی وقت مین غیر منقطع تو صاف ظاہر ہی کہ وہ جملہ ایک دوسری کی ہونگی ∴ ح = ک (ک) اور جبکہ لکھین ہم قیمت ح اور ک کی تو حاصل ہوگا یہہ ۔

(ی − ص) / (ع − س) = ک ((لا − ط) / (ع − س)) اور یہی مساوات عام سطح منحنی مخروطی کی ہی

(۵۱۱) صورت جملہ ک کی خاصیت ڈائی ریکٹرکس یعنی خط متحرک کی خاص صورت پر موقوف ہوگی بوسیلہ مساواتون ڈائی ریکٹرکس اور جنریٹرکس کے ہم مقادیر لا اور ی اور ع کو دور کرینگی ایک خاص صورتمین جیسا کہ صورت سیوا مین کیا تھا تو اب ظاہر ہی کہ ہمکو بعد اس تبدیلی کے ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین مقدار ک اور ح کی پائی جاویگی اور ایسی صورت جملہ ک کی دریافت ہو جاویگی اور جبکہ لکھین ہم قیمت ک اور ح کی (لا − ط) / (ع − س) اور (ی − ص) / (ع − س) تو ہمکو مساوات مخروط مطلوب کی ایک خاص صورتمین

حاصل ہوسکے

(۵۱۲) مثال — فرض کرو کہ ڈائی ریکٹرکس دایرہ ب ق س سطح لا ی مین ہی تو مساوات اسکی یہہ ہوگی (لا َ − لا۱)۲ + (یَ − ی۱)۲ = نق۲ ⎫ (۱)
ع َ = ۰ ⎭

اور مساوات جنریٹرکس ب ی یا ق ی کی جو نقطہ ی (ط اور ب اور س) مین سی گذرتا ہی یہہ ہونگی لا − ط = ا (ع − س) ⎫ (۲)
ی − ص = ح (ع − س) ⎭
واسطی تعبیر کرنی اس بات کی کہ جنریٹرکس دایرہ سی ملتا ہی ظاہر ہی کہ مساوات (۱) اور (۲) ایک ہی ہونی چاہئی ٭

ع َ = ع = ۰

لا َ = لا = ط − ا س

ی َ = ی = ص − ح س

اب اگر لکھین ان قیمتون کو مساوات (۱) مین تو (ط − ا س − لا۱)۲ + (ص − ح س − ی۱)۲ = نق۲ (۳) جبکہ لکھکر قیمتین ا اور ح جو (۲) مین ہین مختصر کرین اس مساوات کو تو حاصل ہوگا یہہ —

$$\left(\frac{ط ع - س لا}{ع - س} - لا_1\right)^2 + \left(\frac{ص ع - س ی}{ع - س} - ی_1\right)^2 = نق^2$$

یہہ مساوات اسی ترچھی مخروطی کی ہی جسکا قاعدہ دایرہ ہی اور مقیم سطح لا ی مین ہی — فرضکرو مرکز دایرہ کا نقطہ شروع پر ہی ٭

(ط ع − س لا)۲ + (ص ع − س ی)۲ = نق۲ (ع − س)۲

(۵۱۳) فرض کرو محور مخروط کا متوازی محور ع کی ہی ؛ ط = لا، اور ص = ی، اور صورت مساوات عام کی یہہ ہو جاویگی $\left(\frac{لا - ط}{ع - س}\right)^2 + \left(\frac{ی - ص}{ع - س}\right)^2 = \frac{ق^2}{س^2}$

اِس صورت مین مخروط کو سیدھا مخروط کہتی اور اگر اِس صورتمین نقطہ شروع مرکز دایرہ پر فرض کیا جاوی تو ط = ۰ اور ص = ۰

$\therefore لا^2 + ی^2 = \frac{ق^2}{س^2}(ع - س)^2$

(۵۱۴) اگر دائی ریکرکس ایک بیضوی سطح لا ی مین فرض کیا جاوی جسکا مرکز نقطہ شروع ہو اور مرکز مخروط کا محور ع مین فرض کیا جاوی تو مساوات مخروط کی یہہ ہو جاویگی $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} = \left(\frac{ع - س}{س}\right)^2$

لکہو اسمین ع بجای ع - س کی یعنی جبکہ شمار کرین مرکز مخروط سی تو $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} = \frac{ع^2}{س^2}$ اس صورتمین مساوات سطح منحنی کے بطور فقرہ (۴۷۸) کی دریافت ہو سکتی ہی اسی فقرہ کے شکل مین فرض کرو کہ ہر ایک تراشش مثل ق ق کی بیضوی ہی جسکا محور لا، اور ی، ہمیشہ متناسب محور ط اور ص ایک ایسی بیضوی کی ہین جسکا مرکز و ع مین فاصلہ س پر و سی ہے تو اب مساوات ق ق کی یہہ ہوگی —

$\frac{لا^2}{لا_1^2} + \frac{ی^2}{ی_1^2} = 1$ لیکن $ی_1 = \frac{ص}{ط} لا_1$ اور $لا_1 = \frac{ط}{س} ع$

$\therefore \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} = \frac{ع^2}{س^2}$ —

(۵۱۵) فرض کرو کہ دائی ریکٹرکس ایک قریب البیضوی متوازی سطح لا ی کی ہی اور راس اسکا محور ع مین ہی اور اب ظاہر ہی کہ مساواتین

دائی رکٹرکس اور جنریٹر کسکی یہہ ہین —

$$\left.\begin{array}{l} ی^{۲} = ق لا \\ ع = د \end{array}\right\} (۱) \text{ اور } \left\{\begin{array}{l} لا - ط = ا (ع - س) \\ ی - ص = ح (ع - س) \end{array}\right. (۲)$$

نقطہ تقاطع پر ع = عً = د اور لا = لاً = ط + ا (د - س)

اور ی = یً = ص + ح (د - س) جبکہ لکھین ان قیمتونکو مساوات (۱) مین اور لکھین اسمین قیمتین ح اور ا کی جو (۲) سی حاصل ہوے

تو $\left\{ ص + \frac{یً - ص}{عً - س} (د - س) \right\}^{۲} = ق \left\{ ط + \frac{لاً - ط}{عً - س} (د - س) \right\}$

(۵۱۶) فرض کرو کہ راس یا مرکز مخروط کا نقطہ شروع پر ہی —

∴ ط = ص = س = ۰ اور مساوات مخروط کی جسکا دائی رکٹرکس یہہ ھے

{ی^۲ = ق لا اور ع = د} اور جسکا راس نقطہ شروع پر ہی یہہ ہوگی

د ی^۲ = ق لا ع

(۵۱۷) طریقہ ابتدا واسطی دریافت کرنی مساوات سیدہی مخروط کی جسکا راس نقطہ شروع پر ہی بہت مفید معلوم ہوتا ہی ۔ فرض کرو کہ طول محور مخروط کا که ہی اور یہہ بہی مان لو کہ یہہ نقطہ شروع بن سی گذرتی ہی ہو ایک ایسی سطح فروض یا قاعدہ پر ہی جسکی مساوات یہہ ہی —

ا لا + ح ی + ن ع = که اور اسمین تعداد ا اور ح اور ن جیب التمام اون زاویونکی مین جو که محور لا اور محور ی اور ع سی بناتا ہی موافق (۴۱۰) کی اور یہہ بہی فرض کرو لا اور ی اور ع اوتار ایک نقطہ کی بن

جو محیط قاعدہ پر ہی اور مان لو کہ ر وہ زاویہ ہی جو جبر پر کسی یا خط متحرک
مخروط کا بناتا ہی محور مخروط سی تو اب موافق خاصیت مثلث قایم الزاویہ کی
کہ $= (لا^2 + ی^2 + ع^2)$ (جم ر) اب اگر لکھین دونو مساوی نہ کہ کو
برابر ایک دوسری کی تو $(ل لا + م ی + ن ع)^2 = (لا^2 + ی^2 + ع^2)(جم ر)^2$
اور یہہ مساوات ہر ایک نقطہ سطح منحنی پر صادق آویگی کیونکہ ل اور م اور ن
ایکسی رہینگے یعنی اونکی قیمت نہین بدلیگی اوس سطح کی صورت مین جو متوازی ہی
قاعدہ کی اور نقطہ (لا اور ی اور ع) کی سطح منحنی مین سی گذرتی ہی
اگر محور مخروط کا منطبق ہوی محور ع پر تو ل $=$ م $= ۰$ اور ن $= ۱$

$$ع^2 = (لا^2 + ی^2 + ع^2)(جم ر)^2$$

(۵۱۸) دریافت کرو خط منحنی جو تقاطع کرنی ایک سطح مستوی اور ترچھی مخروط
کے سی حاصل ہوگا ہم یہان فرض کرسکتی ہین کہ سطح مذکور نقطہ شروع اوتارین سی
گذرتی ہی اور اس فرض سی عمومیت مساوات مین کسی نوع کا خلل نہو اونکا
جبکہ لکھین بجای لا اور ی اور ع کی مساوات مین اونکی قیمتین جو (۵۰۴) مین
ہین توہمکو معلوم ہوگا کہ اونہین خطوط دوم درجہ کی اور اونکی اختلاف کی ہونگے

سطح منحنی گونو اڈل کی بیان مین

(۵۱۹) حد۔ سطح منحنی گونو اڈل سے پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم
سی جو ہمیشہ حرکت کرتا ہی متوازی ایک سطح کی اور جسکا ایک سرا حرکت
کرتا ہی ایک خط مستقیم پر جبکہ دوسرا ایک منحنی معروض بناتا ہی جیسے

پہلی ہم ایک آسان مثال اس قسم کی سطح منحنی کی لکہین گے فرض کرو کہ محور
ع ایک ڈائی رکٹرکس ہی اور فرض کرو کہ جنیریٹرکس متوازی سطح لاد کی ہی تو اب
ظاہر ہی کہ مساواتین جنیریٹرکس کے ایک خاص مقام پر یہہ ہونگی ع = ک / ص = لا } ....
اب ظاہر ہی کہ جب ایک نقطہ حرکت کرتا ہی سطح منحنی پر بغیر علحدہ ہونے کی
جنیریٹرکس یا خط متحرک سی یعنی صرف اسی خط پر سیر کرتا ہی تو ک اور ص
مقدار مقررہ ہونگی اور جبکہ یہہ نقطہ ایک مقام خط متحرک سی اوسکی دوسری مقام پر جاتا ہی تو
ک اور ص مقدار غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونگی یہاں سی ثابت ہوا کہ یہہ دونو مقدارین مقرر ایکہی
وقت مین ہوتی ہین اور غیر مقررہ بہی ایکہی وقتین یعنی ہین اسواسطے ایکمقدار انہین سی جملہ دوسری کا ہوگی
یعنی ص = ک (ی) جبکہ لکہین ایکی قیمتون کو تو ع = ک (لا / ع) اور یہی مساوات
عام تمام سطوح منحنی کو نوائڈل کے ہوگی —

(۵۲۰) صورت جملہ ک کی ڈائی رکٹرکس دوم پر موقوف ہی تو پہلے
مساواتون ڈائی رکٹرکس اور جنیریٹرکس کے مقدار لا اور ی اور ع
کی دور ہو سکتی ہی جیسا کہ پہلی دور کئی گئی ہین بعد اسکی ہمین ایک ایسی مساوات
حاصل ہوگی جسمین ک اور ص پائی جاوینگی اور جبکہ لکہین گے ہم اس مساوات مین قیمت
ص اور ک کی جو ع اور لا / ع ہی تو ظاہر ہی کہ ہمکو مساوات ایک خاص سطح
منحنی کونوائڈل کے حاصل ہوسکے —

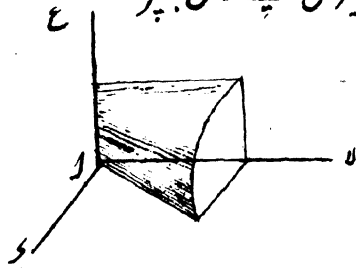
(۵۲۱) فرض کرو ڈائی رکٹرکس دوم ایک دایرہ متوازی سطح لاع کی
ہی اور مرکز اسکا محور لا مین ہی اسیواسطے مساوات اسکی یہہ ہوگی

ع² + ی² = ق² } (۱) تو اب ظاہر ہے جہانکہ یہہ ڈائی رکٹرکس ملتا ہی
لا = ط } جنریٹرکس سے اُوس جا پر —

ع = عَ = ص

لا = لاَ = ط

ی = یَ = اط

∴ ص² + اَ²ط² = ق²

یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ مساوات مطلوب یہہ ہی ع² + ط² ی²/لا² = ق² چونکہ یہہ سطح منحنی مرکب مخروط اور میخ سے ہی ایسو اسطے اسکو والس صاحب نے کونو کیونی اُس نام رکہا تہا جسنے اسکی بہت سی خواص دریافت کی تہی —

اگر محور لا ایک ڈائی رکٹرکس اور دوسرا ایک دایرہ متوازی سطح لاع کی فرضکیا جاوے اور جنریٹرکس متوازی محور ع کی تو اس صورتین مساوات یہہ ہوسے گے

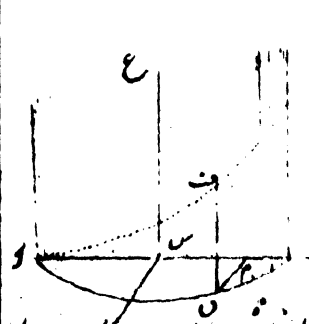
لا² + ط²ع²/ی² = ق² —

(۵۲۲) فرضکرو کہ محور ع ایک ڈائی رکٹرکس ہی اور ایک خط مستقیم دوسرا اور مان لو کہ جنریٹرکس حرکت کرتا ہی متوازی سطح لالا کی تو اب ظاہر ہی کہ مساوات تین دوسرا ڈائی رکٹرکس کے یہہ ہونگی لا = دع + م ، ی = ہع + ن اور جونکہ مساواتین جنریٹرکس کی یہہ ہین ی = الا اور ع = ص کی تو اوس نقطہ پر جہانکہ یہہ ملینگے یہہ حاصل ہو گا

ع = عَ = ص اور ی = یَ = ہص + ن اور لا = لاَ = (ہص + ن)/ا

∴ (ہص + ن)/ا = دص + م ∴ (ہص + ن) لا/ی = دع + م

یا ہ ع لا – ر ع ک + ن لا – م ک = ۰

(۵۲۳) فرض کرو کہ محور ع ایک دائی رکٹرکس ہی اور مان لو کہ دوسرا دائی رکٹرکس ڈورا ایک پیچ کا ہی جسکا محور منطبق ہی محور ع پر – واضح ہو کہ ڈورا پیچ کا یا خط منحنی ہیلکس بنتا ہی بوسیلہ لپٹنی ایک ڈوری کی گرد ایک سیدہی استوانہ کی اسطح پر کہ ڈورہ مذکور ایکہی زاویہ بناتا ہی محور سی یا اگر قاعدہ ایک مثلث قایم الزاویہ کا منطبق ہوی قاعدہ استوانہ پر اور مثلث لپیٹا جاوی گرد استوانہ مذکور کے تو وتر قایم الزاویہ کا ہیلکس اف بناویگا – دریافت کرو مساواتین ہیلکس کے – فرض کرو کہ مرکز استوانہ کا نقطہ شروع محوروں متقاطع علی القوایم کا ہی اور مان لو کہ س م = لا اور م ق = ک اور ف ق = ع اور نصف قطر استوانہ کا = ط اب ظاہر ہی کہ ف ق ایک نسبت مقررہ رکہتا ہی اق سی یعنی بلندی قاعدہ کی قاعدہ مثلث سی نسبت مقررہ رکہتی ہی ∴ ف ق = ی اق اور اق مساوی اُس قوس کے ہی جسکی جیب مستوی ک او نصف قطر ط ہی اسواسطی $ع = ی ط \, جیب^{-1} \frac{ک}{ط}$ یا $ع = ی ط \, جم^{-1} \frac{لا}{ط}$ اور $لا^2 + ک^2 = ط^2$

اور یہی مساواتین ہیلکس کے نسبتا کی ہونگی اسی کل مطلوب بیان کرینگی جو یہہ ہی دریافت کرو سطح منحنی جو بنتی ہی ایک خط مستقیم سی جو حرکت کرتا ہی متوازی قاعدہ استوانہ کی اور کہ کاٹتا ہی محور ہیں سی اور مس کرتا ہی ہیلکس پر – مساواتین دائی رکٹرکس (اگر فاصلہ درمیان ڈوروں پیچ کے

= ا (ع − ص۱) ∴ ا = (ع − ط۱)/(ع − ص۱) ∴ ع/ی = لا/ی − ع

= (ط۱ ع − ص۱ لا)/(لا − ط۱) اور (ن ا − م ح)/ی = (ا (ی − ح ع) − ح (لا − ا ع))/ی

= (ا ی − ح لا)/ی = ی − ح لا/ی = (ص لا − ط ی)/(لا − ط) یہان سی ظاہر ہی کہ

اخر کو یہہ مساوات حاصل ہو سکتی ہی

(ص۱ لا − ط۱ ع)/(لا − ط۱) = ح ((ص لا − ط ی)/(لا − ط))

(۵۲۵) دعوی ایندہ بہی اسیطور پر بہت آسانی سی حل ہو سکتا ہی
دریافت کرو مساوات ایک سطح منحنی کے جو پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم
سی جو سرکتا ہی متوازی سطح لا ع کی جبکہ دونو سری اسکی دو خط منحنی معروضہ
پر ہون جو یہہ ہین ع = ح (ی) سطح ی ع پر اور لا = ک (ی)
سطح ی لا پر تو اب ظاہر ہی کہ مساوات مطلوب یہہ ہوسکے

ع/ح (ی) + لا/ک (ی) = ۱

(۵۲۶) اس قسم کی سوالونمین تہوڑی ہوشیاری ضرور ہی واسطی مقرر
کرنی مقام محوروں اور سطوح اتاری کی اسطرح پر کہ مساواتین معلوم
اور وہ جو دریافت کرنی منظور ہون ایک بہت آسان صورت جبریہ سی
تعبیر ہو جاوین مثلاً دریافت کرو ایک سطح منحنی کو جو پیدا ہوتی ہی حرکت
ایک خط مستقیم سی جو ہمیشہ گذرتا ہی تین خط معروضہ مین سی - فرض کرو
تینون خط متوازی خطوط محوروں کی ہین اسیواسطی مساواتین تینون ڈائی
رکٹرکس کے یہہ ہو سکینگے

لاٗ = ط۱ ، ی = ص۱ } اور لا = ط۲ ، ع = س۲ } اور ی = ص۳ ، ع = س۳ } اور

مساواتین خط متحرک کی یہہ ہین لاً = ا ع + ط ، یً = ح ع + ص اسیواسطے

یً = ح/ا لاً + س اور یہان س = ص − ح/ا ط چونکہ یہہ خط

تینون خطوط معلوم سے ملتا ہی تو ظاہر ہی کہ ہمین یہہ مساواتین حاصل ہونگی

ص۱ = ح/ا ط۱ + س اور ط۲ = ا س۲ + ط اور ص۳ = ح س۳

+ ص − اب ہمکو مقدار ط اور ص اور ا اور ح کی بوسیلہ ان مساواتون

اور مساوات جغرشر کس سے دور کرنی چاہئی اسیواسطی بعد تفریق کی ہمکو

یہہ حاصل ہوگا ی − س۱ = ح/ا (لا − ط۱) اور لا − ط۲

= ا (ع − س۲) اور ی − ص۳ = ح (ع − س۳) یہانسی

معلوم ہوتا ہی کہ جب دور کرین ہم ا اور ح کو تو ہمکو مساوات مطلوب

یہہ حاصل ہوگی (لا − ط۱) (ی − ص۳) (ع − س۲) = (لا − ط۲)

(ی − ص) (ع − س۳) اور یہہ مساوات دویم درجہ کی ہی کیونکہ جز لا ی ع

جاتا رہیگا دیکھو واسطی تفصیل اس باب کی ہائی مر صاحب کی ہندسہ بابر

باب نہم

بیان اون خطوط منحنی مین جو دو خم رکھتی مین

(۵۲۷) حد − ایک خط منحنی دو چند خمدار پیدا ہوتا ہی حرکت ایک ایسی نقطہ

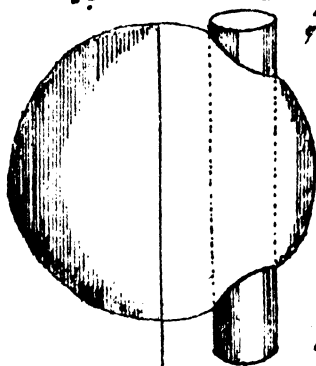
سے جو صرف سمت اپنی حرکت کی ہی نہین بدلتا ہی جیسا کہ سطح منحنی مین

ہوتا ہی وہ سوای اسکی اوس سطح کو بہی بدلتا ہی جسمین وہ حرکت کرتا ہی
- اگر ایک دایرہ ایک صفحہ کاغذ پر کہنچا جاوی تو ظاہر ہی کہ وہ خط منحنی سطح کہلاویگا
اور جبکہ صفحہ کاغذ کو صورت استوانہ مین لپیٹی تو ظاہر ہی کہ اس صورت مین دایرہ
دو خم حاصل کریگا ایک وہ جو دایرہ مذکور بسبب مدور ہونی کے رکہتا ہے
اور دوسرا وہ جو اوسنی بسبب لپیٹنی کاغذ کی حاصل کیا ہی ایسی اسطلاح اس
صورت مین اسکو خط منحنی دو چند خمدار کہتی ہین -

(۵۲۸) خطوط منحنی دو چند خمدار پیدا ہوتی ہین بوسیلہ تقاطع کرنی دو سطح منحنی کے
مثلاً قایم کرو ایک سرا پرکار کا ایک سطح استوانہ پر اور متحرک کرو دوسری سرے کو
اس طرح پر کہ سرا اخیر وقت حرکت کی ہمیشہ سطح استوانہ کو مس کری اسسی ایک خط
منحنی دو چند خمدار پیدا ہوگا اور گو یہہ خط دایرہ نہین ہی پہر بہی ہر ایک نقطہ اسکی
خط منحنی کا مساوی فاصلہ پر اوس سری پرکار سی ہی جو قایم ہی -
یہہ خط منحنی ایک حصہ اوس کرہ کا ہی جسکا نصف قطر مساوی ہی اوس خط کی ہی
جو واقع ہی درمیان دو سرون پرکار کی اور اب یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی
مذکور پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنی اس کرہ اور استوانہ کیسی -

(۵۲۹) واضح ہو کہ بوسیلہ مساوات دو سطح منحنی کے مساوات اونکی تقاطع
کی دریافت ہوسکتی ہی جو فی الواقع مساوات خط منحنی دو چند خمدار کی ہوسکے
بوسیلہ دور کرنی مقادیر غیر منقطع کی دو مساوات ہین سی نشان خط منحنی
کی سطوح اوتاری پر حاصل ہونگی - وہ نشان انہین سی کافی ہونگی

واسطی معلوم کرنی خط منحنی دو چند حدار کی — کیونکہ ہم دو استوانہ دو نشان خط منحنی مین سی گذار سکتی ہین جو عمود ایک دوسری پر اور سطوح اوتاری پر ہونگی تو ابظاہر ہی کہ وہ خط منحنی جو تقاطع کرنی ان استوانون کیسی پیدا ہوگا وہ خط منحنی مطلوب ہوگا — یہہ ثبوت مشابہ اوس ترکیب کی ہی جسکی وسیلہ سی ہمنی مساوات خط مستقیم کے دریافت کی تہی کیونکہ خط مستقیم بہی تقاطع کرنی دو سطح مستوی سی پیدا ہو سکتا ہی — اب ہم بیان کرینگی جواص خطوط منحنی دو چند حدار کی جو تقاطع کرنی دو سطح منحنی کیسی پیدا ہوتی ہین

(۵۳۰) فرضکرو کہ خط منحنی مذکور پیدا ہوا ہی تقاطع کرنی ایک استوانہ اور کرہ کیسی اور مان لو کہ نقطہ شروع مرکز کرہ کا ہی اور محور استوانہ کا سطح لاع مین واقع ہی اور متوازی محور ع کی ہی فرضکرو کہ فاصلہ درمیان مرکز کرہ اور مرکز استوانہ کے = س تو ابظاہر ہی کہ مساوات کرہ کی یہہ ہوگی $لا^2 + ی^2 + ع^2 = ط^2$ اور مساوات استوانہ کی یہہ ہوگی $(لا - س)^2 + ی^2 = ص^2$ موافق (۵۰۷) کے جبکہ دور کرین ہم ی کو تو

یہہ حاصل ہوگا ع۲ = ط۲ + س۲ – ص۲ – ۲ س لا (۱) اور جبکہ دور کرین لا
کو تو حاصل ہوگا یہہ ع۲ = ط۲ – ص۲ – س۲ ∓ ۲ س √(ص۲ – ی۲) (۲)
(۱) سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان خط منحنی کا سطح لاع پر ایک حصہ قریب البیضوی
ب س کا ہی جبکہ اس س ہی اور اس = (ط۲ + س۲ – ص۲) / ۲ س اور
اب = √(ط۲ + س۲ – ص۲) اور (۲) سے معلوم ہوتا ہی کہ نشان خط منحنی کا سطح کی ع پر مشتمل
دو بیضوی صورتون پر ہی مقام جنکا بوسیلہ قیمتون ع کی دریافت ہوجایگا —

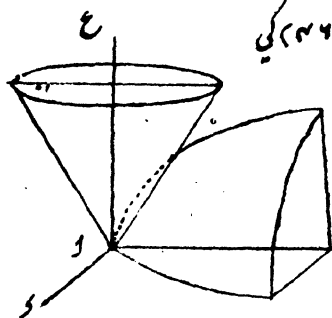
ا ز = ± √(ط۲ – (ص – س)۲)

ا ی = ± √(ط۲ – (ص + س)۲)

جیساکہ س زیادہ ہوتا ہی یعنی جسقدر استوانہ دور ہوتا جاتا ہی نقطہ ا کے
سے اوسیقدر ا ی کم ہوتا ہی اور صورتین بیضوی قریب ایک دوسرے کی آتی ہین
جیساکہ شکل (۱) مین ہی (۱) (۲) (۳) (۴)
اور جبکہ س = ط – ص تو
ا ی = ۰ اور بیضوی صورتین ایک دوسرے ملین گی شکل (۲) جیساکہ
س بڑہتا ہی ہمین شکل (۳) حاصل ہوگی اور یہہ باہستگی اخر کو شکل
(۴) ہو جاتی ہی اور اخر جبکہ س = ط تو اوس صورتین بیضوی بالکل
جاتی رہتی ہی — مختلف قیمتین ہم س اور ط/۲ وغیرہ ص کی فرض کرسکتے
ہین اور اس صورتین ہمین نشان معلوم ہوجاوینگی اور انکی دریافت کرنی مین
کسیطرح کی مشکل واقع نہین ہوتی ہی لیکن ہم اسکا بخوبی امتحان کرینگی

کیونکہ اگر ہم ایک مثال کو بخوبی توضیح سے حل کرین تو اور مثالونکے حل کرنےمین بڑی آسانی ہو جاویگی —

(۱۳۵۴) مثال (۲) فرض کرو کہ خط منحنی دو چند خمدار پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنی ایک مخروط اور مجسم قریب البیضوی سے جنکا راس ایک دوسری پر منطبق ہی اور محور مخروط کا عمود محور مجسم قریب البیضوی پر ہی مساوات مخروط کی یہہ ہے

$لا^۲ + ی^۲ = ی^۲ ع^۲$ موافق (۴۶۸) کی

اور مساوات مجسم قریب البیضوی کی یہہ ہو $ی^۲ + ع^۲ = ن لا$ (۴۶۹)

یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ نشان سطح لاع پر یہہ ہے

$لا^۲ + ن لا = (۱ + ی^۲) ع^۲$ اور یہہ مساوات بعید البیضوی کی ہی جسکی محور $\overline{ن}$ اور $\frac{ن}{\sqrt{۱ + ی^۲}}$ ہین موافق فقرہ (۱۵۷) کی اور ظاہر ہی کہ

$لا^۲ + ی^۲ = ی^۲ (ن لا - ی^۲)$ ∴ $(۱ + ی^۲) ی^۲ = ی^۲ ن لا - لا^۲$

یہانسے ثابت ہوا کہ نشان سطح لای پر ایسی بیضوی ہے جسکا راس آ ہی اور محور $\overline{ی^۲ ن}$ اور $\frac{ی^۲ ن}{\sqrt{۱ + ی^۲}}$ موافق (۱۰۳) اور مساوات اوس نشان کی جو سطح یع پر ہو گا یہہ ہی $(ی^۲ + ع^۲)^۲ + ن^۲ ی^۲ = ی^۲ ن^۲ ع^۲$ اور یہہ مساوات لمنسکیٹا کی ہی اور یہی مساوات اوس لمنسکیٹا کی ہوگی جو برنولی صاحب نے ایجاد کیا ہی جبکہ $ی = ۱$

یعنی جبکہ مخروط قایمۃ الزاویہ ہی موافق (۳۱۴) کی

(۵۳۲) دریافت کردہ خط منحنی جو تقاطع کرنی دو سطح منحنی کیسی پیدا ہوتا ہے — پہلی اس سی ہمنی مقادیر غیر منقطع کو دور کرکی مساواتین نشانونکی سطوح اوناپر حاصل کی تہین برعکس اسکی اگر ملادین ان مساواتونکو بوسیلہ جمع کرنی یا ضرب کرنی وغیرہ کی تو ظاہر ہی کہ اس عملسی ہمکو ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جسمین تین مقدار مجہول یا غیر منقطع پائی جاوینگی اور ایسی ایک ایسی سطح منحنی حاصل ہوگی جسپر ہم ایک خط منحنی دو چند خدار کہینچ سکتی ہین ۔ اس سطح منحنی پر لانہایت خطوط منحنی خمدار کہینچ سکتی ہین اور مساوات سطح منحنی کے ہر ایک خط پر ان خطوط منحنی سی صادق اویکی — نتایج مذکورہ بالا جو ملانی مساواتون کیسی حاصل ہوتی ہین بہت فایدہ مند اور دلچسپ ہین اسیواسطی ہم اسجا چند مثال اونکی لکہینگے مثلاً فرضکرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہی تقاطع کرنے قریب البیضوی دار استوانہ (اور یہہ لاے پر واقع ہی) اور دایرہ دار استوانہ سی جو لاع پر ہی اور نقطہ شروع زاس قریب البیضوی پر ہی اور مرکز دایرہ کا محور قریب البیضوی پر واقع ہی اور یہہ محور لا کا بہی ہی فرضکرو $ی^۲ = ۲ن لا$ مساوات قریب البیضوی ا ف کی لای پر ہی اور $(لا - ط)^۲ + ع^۲ = نق^۲$ مساوات دایرہ کی سطح لاع پر ہی جبکہ ملادین ہم ان مساواتون کو بوسیلہ جمع کرنی کی تو حاصل ہوگا یہہ $(لا - ط)^۲ - ۲ن لا + ی^۲ + ع^۲ = نق^۲$ .... یا

$(ا - ط - ن)^2 + ی^2 + ع^2 = ن^2 + ن^2 + ۲ ط ن$ یہہ مساوات ایک کرہ کی ہی جسکا مرکز نقطہ شروع آ سے فاصلہ اک (= ط + ن) پر واقع ہی اور یہہ خط محور آلا پر شمار کیا گیا ہی اور ظاہر ہی کہ ن تعبیر کرتا ہی خط پائین س ک نقطہ ف کو اور ف س وہ وتر جو ملتا ہی نقطہ س پر موافق (۲۴۲) کی یہاں سے ثابت ہوا کہ تمام نقطہ منحنی دوچند خمدار کی واقع ہین اوس سطح کرہ پر جسکا مرکز ایک سرا خط پائین ایک خاص نقطہ ایسے قریب البیضوی کا ہی جسکا وتر مرکز دایرہ مفروض ہین سے گذرتا ہی

(۵۳۳) واضح ہو کہ تقاطع کرنی سطوح منحنی سے ہمیشہ خطوط منحنی دوچند خمدار پیدا نہین ہوتی ہین واکثر خطوط منحنی مسطح پیدا ہوتی ہین — اب ہم بیان کرینگی ایک ایسی ترکیب کو جسکی وسیلہ سے مساوات اون خطوط منحنی مسطح کی دریافت ہوجاویگی جو تقاطع کرنی سطوح منحنی سے پیدا ہوتی ہین اور جن صورتوں مین خطوط منحنی دوچند خمدار حاصل نہین ہوتی ہین — پوشیدہ نہ ہی کہ جب ایک خط مستقیم نشان کسی خط کا ہوتا ہی تو وہ خط منحنی دوچند خمدار نہین ہوتا ہی

مثال — فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہی تقاطع کرنی دو قریب البیضوی دار استوانوں سے جنکی مساوات یہہ ہین $لا^2 = ط ع$ اور $ص ی = لا^2$

جبکہ دور کرین لا کو ان دونون مساواتون سی تو حاصل ہوگا یہہ ص ی = طع
یہان سی معلوم ہوتا ہی کہ نشان اسکا سطح ی ع پر ایک خط مستقیم ہی
اور چونکہ ہم ابہی لکہہ آئی ہین کہ خط مستقیم نشان خط منحنی دو چند درجہ کا نہین
ہوتا ہی تو اس سی معلوم ہوا کہ فصل مشترک یعنی وہ خط منحنی جو تقاطع
کرنی استوانون مذکور سی پیدا ہوا ہی خط منحنی مسطح ہی —

(۵۳۴) اور اگر ہم مساواتین نشانونکی اسطرح پر ملا دین کہ ان سی ایک
مساوات سطح کی حاصل ہو تو خط منحنی جسکا نشان اوس سطح پر
کہینچا گیا ہی ایک خط منحنی مسطح ہوگا —

مثال فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہی تقاطع کرنی دو قریب البیضوی
استوانونسی جنکی مساواتین یہہ ہین لا^{2} = طع اور
ص ی = لا^{2} + س لا جبکہ لکہین ہم مساوات دویم مین طع بجای
لا^{2} کی تو حاصل ہوگا یہہ ص ی = طع + س لا اور چونکہ یہہ مساوات
ایک سطح کی ہی تو ظاہر ہی کہ خط منحنی ایک خط منحنی مسطح ہوگا

(۵۳۵) واضح ہو واسطی دریافت کرنی خطوط منحنی مسطح کی ایک اور طریقہ
آسان ہی مثلاً جبکہ دور کرین ہم دو مساوات سطوح منحنی مین سی ایک
مقدار غیر منقطع مثلاً ع کو تو ظاہر ہی کہ ہمکو حاصل ہوگی ایک
مساوات جسکی صورت یہہ ہوگی 7 (لا اور ی) = ۰ اب اگر خط منحنی
ایک سطح ہو تو ظاہر ہی کہ وہ پیدا ہوسکی تقاطع کرنی ایک سطح منحنی کی

(دو سطح منحنی مین سی) اور ایک ایسی سطح مستوی کی جسکی مساوات
یہہ ہی ع = م لا + ن ی + ف دور کرو مقدار ع کو بوسیلہ اس مساوات
اور مساوات ایک سطح منحنی کے تو ظاہر ہی کہ اس عمل سی یہہ مساوات
حاصل ہوگی ک (لا اور ی) = ۰ اور یہہ مشابہ اس صورت کی ہوگی
ح (لا اور ی) = ۰ اسواسطی بوسیلہ مقابلہ کرنی ان دونون جملونکی
ہمین حاصل ہونگی مختلف مساواتین جنکی ذریعہ سی ہمکو قیمتین مقادیر م
اور ن اور ف کی دریافت ہو جاوینگی اور ظاہر ہی کہ یہہ مقادیر کو پورا
کرنیکی شرطین اُن مساواتونکی ضمن یہہ پائی جاوینگی اور اگر وہ شرائط مذکور کو
پورا کرین تو خط منحنی مطلوب خط منحنی دو چند حدار ہوگا — مثلاً فرضکرو کہ ایک
کرہ اور ایک استوانہ تقاطع کرتی ہین ایک دوسری سی جبا کہ (٣٠ ف) مین ہی
تو اب ظاہر ہی کہ مساوات کرہ کی یہہ ہوگی لا^٢ + ی^٢ + ع^٢ = ط^٢ ....(١)
اور مساوات استوانہ کی یہہ ہی (لا − س)^٢ + ی^٢ = ص^٢ ....(٢)
اور مساوات سطح مستوی کی یہہ ہی ع = م لا + ن ی + ف ....(٣)
جبکہ دور کیا ہمنی ع کو مساوات (١) اور (٣) مین سی تو
ک (لا اور ی) = ۰ یہہ ہو جاوی گا
(م^٢ + ١) لا^٢ + (ن^٢ + ١) ی^٢ + ٢ م ن لا ی + ٢ م ف لا + ٢ ن ف ی + ف^٢ − ط^٢
= ۰ (٤) بوسیلہ مقابلہ کرنی (٢) اور (٤) کی ہمین یہہ حاصل ہوتا ہی
م = ۰ اور ن = ۰ یہہ امثال لا^٢ اور ی^٢ سی حاصل ہوتا ہی

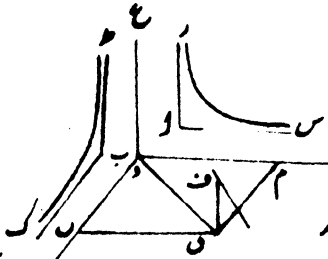
لیکن شرط م = ۰ سے امثال لا کا (۴) مین جاتا رہتا ہی اور اسی معلوم ہوتا ہی کہ مساوات (۴) مشابہ (۲) کی نہین ہوسکتی ہی تو اب ثابت ہوا کہ خط منحنی مطلوب خط منحنی دو چند خدار ہی ــ

اب فرض کرو کہ مساوات استوانہ کی یہہ ہی $لا^۲ + ی^۲ = ص^۲$ تو اب م = ۰ اور ن = ۰ سے مساوات (۲) مشابہ (۲) سے کی ہوجاتی ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی ایک خط منحنی سطح مقیم اوس سطح مین ہوگا جسکی مساوات یہہ ہی $ع = \sqrt{ط^۲ - ص^۲}$ اور یہہ ہندسہ سے بہی معلوم ہوتی ہی

(۵۳۶) دریافت کرو دو خط منحنی جو مساواتون آیندہ سے تعبیر ہوتا ہی

$$\frac{ط}{لا} + \frac{س}{ع} = ۱ \text{ اور } \frac{ص}{ی} + \frac{س}{ع} = ۱$$

یہہ دو مساواتین دو بعید البیضوی دار استوانونکی ہین قاعدہ ایک کا انہین سے سطح لاع مین واقع ہی اور دوسریکا سطح ی ع مین ہی موافق فقرہ (۲۰۹) کی مثال (۳) کی شکل مرقومہ ذیل مین بعید البیضوی اس سطح لاع مین واقع ہی اور مرکز اسکا ۤد پر ہی اور بعید البیضوی ط ک سطح ی ع مین واقع ہی اور مرکز اسکا نقطہ ب پر ہی اور

$\frac{ط}{لا} = \frac{ص}{ی}$ یا $ی = \frac{ص}{ط} لا$ یہانسے معلوم ہوتا ہی کہ ان استوانونکا مذکور کا سطح لا ی پر ایک خط مستقیم ق د ہی تو اب ظاہر کہ خط منحنی مطلو

خط منحنی سطح ہوگا اور یہہ تقسیم ہوگا سطح ع د ن مین جو عمود لاکر بر ہی

(۵۳۷) چونکہ ہمکو بخوبی حال خط منحنی کا بوسیلہ معلوم ہونی دو بعد البیضوی اور

استوانونکی ظاہر نہین ہوگا اسیواسطی ہم مساوات خط منحنی کے سطح

ع د ق یعنی اوسیکی سطح مین دریافت کرنیکی فرض کرو کہ ق ایک نقطہ

خط منحنی کا ہی اور د م = لا اور م ق = ی اور ف ق = ع

تواب واسطی معلوم کرنی اوس نسبت کی جو درمیان د ق (= ن)

اور ق ف = ع کی ہی ہم معلوم کرنیکی قیمتین د م اور د ن کی اجزاے

د ق مین اور بعد اسکی لکہین گے ہم اسکو مساواتون مفروض مین ظاہر ہی

کہ مساوات د ق کی یہہ ہی

ی = $\frac{ص}{ط}$ لا = لا مس ر (اگر $\frac{ص}{ط}$ = مس ر کی فرض کیا جاوی)

د م = د ق جم ر اور د ن = د ق جیب ر اسیواسطی صورت اس

مساوات کی $\frac{ط}{لا}$ + $\frac{س}{ع}$ = ۱ یہہ ہوجاویگی $\frac{ط}{ن جم ر}$ + $\frac{س}{ع}$ = ۱

اور صورت اس مساواتکی $\frac{ص}{ی}$ + $\frac{س}{ع}$ = ۱ یہہ ہوجاویگی

$\frac{ص}{ن جیب ر}$ + $\frac{س}{ع}$ = ۱ چونکہ ص = ط مس ر اور ص جم ر = ط جیب ر

ان دو مساواتین مساوی ایک دوسرےکی ہین اور ہر ایک ان مساواتو

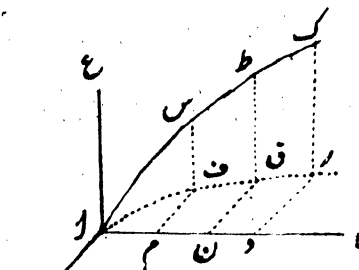
مین سی خط منحنی مطلوب سی تعلق رکہتی ہی یہانسی معلوم ہوتا ہی کہ

خط منحنی بعد البیضوی ہی اور مساوات اوسکی جبکہ مرکز نقطہ شروع

فرض کیا جاوی یہہ ہوگی ن ع = $\frac{ط س}{جم ر}$ = $\frac{ص س}{جیب ر}$ موافق (۲۰۹) کے

(۵۳۸) کھینچو خط منحنی دو چند خمدار کو بوسیلہ اوسکی نقاط کی فرض کرو

ح (لا اور ی) = ۰ اور

ک (لا اور ع) = ۰ دو

نشان خط منحنی مذکور کی ہین

کھینچو خط منحنی ا ف ق ر

سطح لا ی پر جسکی مساوات

یہہ ہی ح (لا اور ی) = ۰ واسطی ہر ایک قیمت لا یا ا م کی ہمکو

ایک قیمت م ف یا ی دریافت ہو جاویگا اور اسیطرح مساوات

ک (لا اور ع) = ۰ سی ہمکو قیمت ع کی دریافت ہو جاویگی اب کھینچو

نقطہ ف سی ف س عمود سطح لا ی پر اور قطع کرو اسکو مساوی ع

کی تو نقطہ س ایک نقطہ خط منحنی مطلوب کا ہوگا اسیطرح عمل کرنیسی

ہمکو مختلف نقاط س اور ط اور ک وغیرہ دریافت ہو جاوینگی

یہہ ظاہر ہی کہ اگر کسی ایک خاص قیمت لا اور ی سی قیمت ع کی

ناممکن ہو جاوی تو ظاہر ہی کہ کوئی حصہ خط منحنی کا موافق ایسی قیمتون

لا اور ی کی معلوم نہین ہوگا اور اگر ع منفی ہہ تو ف س نیچی سطح لا ی

کی کھینچا چاہئی —

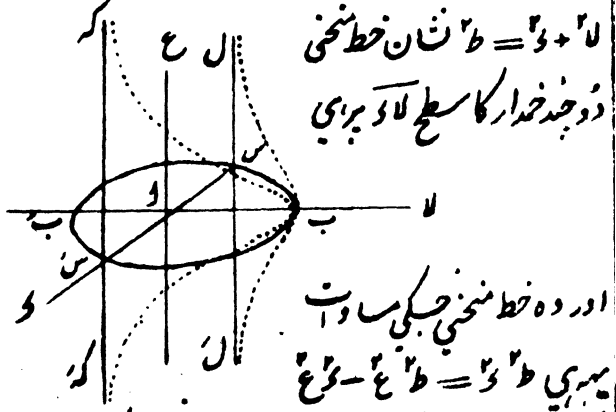
(۵۳۹) فرضکرو کہ خط منحنی پیدا ہوتا ہی اتقاطع کرنی قریب البیضوی دار

استوانہ سی جو سطح لا ی مین واقع ہی اور دایرہ دار استوانہ سی

جو سطح ی ع میں واقع ہی اور محور عمود ایک دوسری پر ہیں اور راس
قریب البیضوی کا اور مرکز دایرہ کا نقطہ سر ع پر ہی
فرضکرو $ی^2 = ط لا$ مساوات قریب البیضوی
د ا دَ کی ہی اور
$ی^2 + ع^2 = ط^2$
مساوات دایرہ ی ب کی ہی اور
$ع^2 + ط لا = ط^2$ وہ قریب البیضوی ہی جو سطح لا ع میں
واقع ہی فرضکرو ا ب = ط اور ا س = ط اور مان لو کہ د س دَ = ط
اب ظاہر ہی کہ واسطی کھینچنے خط منحنی کی ہمین تین مساواتین سطوح اوتاری پر
حاصل ہونگی $ع = \pm \sqrt{ط (ط - لا)}$ اور $ع = \pm \sqrt{ط^2 - ی^2}$ اور
$ی = \pm \sqrt{ط لا}$ اگر لا = ۰ تو ی = ۰ اور ع = ط ∴ خط منحنی نقطہ
ب میں سی گذریگا اور جیسا کہ لا زیادہ ہوگا اوسیقدر ی زیادہ ہوگا اور ع
کم ہوگا اور جب لا = ط تو ی = ط اور ع = ۰ اسی معلوم ہوتا ہی کہ
خط منحنی بلندی میں کم ہوتا جاتا ہی نقطہ ب سی حتی کہ وہ ملتا ہی قریب
البیضوی سی نقطہ د پر اسی نقطہ دار شاخ ب د معلوم ہوتی ہی اگر
لا زیادہ ہو ط سی تو ظاہر ہی کہ ع ناممکن ہو جاویگا اسی معلوم ہوتا ہی
کہ خط منحنی پرے نقطہ د کی نہین پھیلتا ہی چونکہ $ع = \pm \sqrt{ط (ط - لا)}$
تو اسی معلوم ہوتا ہی کہ سوای اوس وتر کے جو حاصل ہوتا ہی بوسیلہ

فرضکرنی قیمت لاَ کی درمیان ہ اور طَ کی ایک اور وتر ہی جو مقابل وتر مذکور کی ہی اور ایسی ظاہر ہوتا ہی کہ سوای شاخ ب د کی ایک اور شاخ ب د خط منحنی کے ہی مگر نیچی سطح لا ی کی واقع ہی — اور چونکہ بوسیلہ فرض کرنی منفی قیمت ی کی قیمت ع مین کسی نوع کا فرق نہین آتا ہی تو ایسی معلوم ہوتا ہی کہ ب ذ ب ایک اور شاخ منحنی کی ہی اور یہہ مشابہ شاخ ب د د کی ہی — اب ثابت ہوا کہ خط منحنی مرکب ہی چار شاخ ب د اور ذ ب اور ب د اور ب د جو مساوی ایکدوسری کی ہین اور یہہ کھنچا کیا ہی سطح قریب البیضوی دار استوانہ پر جسکا قاعدہ د ا د ہی یہہ شاخین حقیقت مین ایک شکل مثل ایسی بیضوی کی بناتی ہین جسکی سطح جھکی ہوئی واسطی ملنی استوانہ کی ہی —

(۵۰۴) مثال (۲) فرضکرو کہ وہ دایرہ جسکی مساوات یہہ ہی $لا^۲ + ی^۲ = ط^۲$ نشان خط منحنی دو چند خمدار کا سطح لا ی پر ہی

اور وہ خط منحنی جسکی مساوات یہہ ہی $ط^۲ ی^۲ = ط^۲ ع^۲ - ی^۲ ع^۲$

ایک نشان سطح ی ع پر واقع ہی — اب دریافت کیا چاہتی ہین ہم

خط منحنی انکا — فرض کرو ب س ب س ایک دایره سطح لا ی پر ہی جسکی مساوات یہہ ہی لا^۲ + ی^۲ = ط^۲ اور چونکہ مساوات سطح ی ع پر یہہ ہی ط^۲ ی^۲ = لا^۲ ع^۲ − ی^۲ ع^۲ تو مساوات لا ع پر یہہ ہوگی

لا^۲ ع^۲ = ط^۴ − ط^۲ لا^۲ ∴ ع = ± ط/لا √(ط^۲ − لا^۲)

یا ع = ± (ط ی)/√(ط^۲ − لا^۲) اور ی = ± √(ط^۲ − لا^۲)

اگر لا = ۰ تو ی = ط اور لا = لانہایت — اسی معلوم ہوتا ہی کہ خط س ل جو نقطہ س میں سی گذرتا ہی خط متنفر الملاقات خط منحنی کا ہی اور جب اگر لا زیادہ ہوتا ہی اوسیقدر ی گھٹتا ہی اور ع بہی کم ہوتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی پاس آتا ہی سطح لا ی کی اور اگر لا = ط تو ی = ۰ اور ع = ۰ اسی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ ب میں سی گذرتا ہی اور اگر لا زیادہ ہو ط سی تو ی اور ع ہر واحد ناممکن ہونگی اسی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی حصہ خط منحنی کا پری نقطہ ب کی واقع نہیں ہی اور چونکہ واسطی ہر ایک قیمت ی کی دو قیمتیں ع کی حاصل ہوتی ہین تو اسی ثابت ہوتا ہی کہ بوسیلہ تمام قیمتوں ی کی جو ربع دایره ا س ب میں ہین دو مساوی شاخین ل ب اور ب ل حاصل ہونگی اور یہہ مقابل ایک دوسریکی ہونگی اسیطرحسی دو مساوی شاخین ک ب اور ب ک ربع دایره ب ا س میں حاصل ہونگی اور چونکہ ایسی ہی قیمتیں ی اور ع

کی حاصل ہونگی جبکہ لا منفی فرض کیا جاوی تو اسی چار مساوی شاخین
حاصل ہونگی اور یہہ مقابل اونکی ہونگی جو ابہی ہمنی کہینچی ہین اور یہہ
شاخین بوسیلہ نصف دایرہ س ب س َ کی حاصل ہونگی —
واضح ہو کہ یہہ دو مثالین کلیبرٹ صاحب کی اوس رسالہ سی لی گئی
ہین جو اوسنی خطوط منحنی ودجنبدار کے بیان مین لکہا ہی اور اس رسالہ
مین بہت سی مثالین اس قسم کی ہین اور بہت سی خواص ان
خطوط منحنی کے بہی بیان کئے گئی ہین — فقط —

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴	۹	ط س	ط ص
۵	۴	ط اور س	ط اور ص
=	۷	ط + ط	ط × ط
=	=	= ط	= ط^{۲}
=	۱۶	ط + ص × س	ط × ص × س
=	۱۷	ط + ص × س	ط × ص × س
=	۱۸	یعنے خطوں	خطوط
۶	۱۰	م ر دن تک	م تک
۷	۱۰	حد بہی	خط بہی
=	۱۳	جسم	قسم
=	۱۴	تو جسم اصغر رکہی جسم آسی	جو قسم اطول رکہی قسم اصغر سے
۸	۱۱	= ص ب	= ص
۸	۱۳	نسبت مین	نسبت
۱۲	۹	قبل ازین	قبل از
۱۳	۲	تو عمود مساوی نصف قطر	تو وہ عمود مساوی نصف قطر
=	۱۸	ہندسی کے	ہندسی سے
۱۴	۱۵	م ک	م کہ
۱۵	۹	ف اور س	ف اور ہ
=	۱۸	= ص^{۲}	= − ص^{۲}

صفحہ (۱۶) کی شکل مین بجای ک کے ق اور بجای ق کے گ لکہو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۶	۱۵	$\sqrt{}$ط^{۲} ل^{۲}	$\sqrt{}$ط^{۲} + ل^{۲}
۱۷	۴	ب ت سے	ب ت ح کے
۱۸	۱۲	بطور اول جز فقرہ	بطور اول فقرہ
۱۹	۱۸	نکلتے	نکلتے تو وہ
۲۰	۸	فرض کرو کہ ح	فرض کرو کہ ط
۲۳	۱۸	(ا − ص)^{۲} (ل − ط)^{۲} = ۰	(ا − ص)^{۲} + (ل − ط)^{۲}
۲۴	۳	کی الیسی پوری	کی ایسی پوری

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۴	۹	اور آیندہ	تو آیندہ
۲۵	۲	ایک خاص سیدہ یا نشان	یک خاص نقطہ پر نشان عظیم کرین
〃	۱۶ و ۱۷	شروع صفر	شروع سفر
۲۶	۳	نقطہ آر	نقطہ آر سے
〃	۸	م - ن سے	م سے
〃	۱۵	آر طرف	آر سے طرف
۲۸	۳	لا + ی۲ = ۰	لا۲ + ی۲ = ۰
〃	۱۴	فاصلہ ق	فاصلہ ف
۲۹	۱۰	اور ط ر	اور ق ر
۳۱	۸	کریگی وسطی	کرینگی بر عکس اسکی وسطی
۳۵	۲	خط ی ب	خط د ب
〃	۵	اوس سمت جسمین	اوس سمت مین جسمین
〃	۶	ی = لا = ۰	ی - لا = ۰
〃	۱۳	ی ب = ۲	ی پ = ۲
〃	۱۴	آ لور ب	آ اور ب
۳۶	۱۳	ایسی بہی	ایسی نہین
۳۷	۴	کہ سوال	کہ شرائط سوال
〃	۱۲	ہم ہیہ	ہم ہمیشہ
〃	〃	کام مین بہی	کام مین نہین
〃	〃	لاسکتے ہین	لاسکتے ہین مثل لا۲/ق۲ + ی۲/ب۲ = ۱
〃	۱۸	∴ ص = ی - ط لا ۱	∴ ص = ی۱ - ط لا ۱
۳۹	۱۴	ی = ک/لا	ی = ک/لا لا
۴۰	۲	ی - ۲ر =	ی - ی۳ =

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴۰	۱۱	مفروضہ سے	مفروضہ
۴۳	۲	— مم د س لا	— مم ا س لا
=	۱۸	عمود د و ی	عمود و ا ی
=	=	فرض کرو کہ ب = د و	فرض کرو کہ ب = ا و
=	=	اوتار نقطہ و	اوتار نقطہ ا
۴۴	۱۸	ہر ایک نقطہ س و ب	ہر ایک نقطہ س ا ب
۴۵	۱	س و ب	س ا ب
=	۲	اور اب د و = دی جس دی و	اور اب د ا = دی جس د ق ا
=	۳	اور جس دی و	اور جس د ق ا
=	۴	∴ د و	∴ د ا
=	۷	خط مفروض د و	خط مفروض س ا
=	۱۱	تو اب د و = دی $\frac{\text{جس دی و}}{\text{جس د و ی}}$	تو اب د ا = $\frac{\text{جس دی ا}}{\text{جس د ا ی}}$
۴۶	۹	لا ا لا − لا لا۲ =	لا ا لا − لا ا لا۲ =
۴۷	۱۰	ی = ط + ص	ی = ط لا + ص
۴۸	۱۲	لا۲ اور ی۲ .... س	لا۲ اور ی۲ اوتار نقطہ س کی ہیں
۴۹	۳	ی − ی۱ = $\frac{\text{ی۱}}{\text{لا۱}}$ لا	ی − ی۱ = $\frac{-\text{ی۱}}{\text{لا۱}}$ لا
۵۰	۱۵	اوتار نقطہ شروع د کے ہیں	اوتار نقطہ شروع ا کے ہیں
۵۱	۱۲	+ ف لا ×	+ ف لا ×
=	=	+ ی	+ یَ
=	۱۴	+ ی	+ یَ
۵۲	۱	+ یَ جم ر	+ یَ جس ر
=	۲	یا ر = ۹۰	یا ک = ۹۰
=	=	ی = لا جس ر + جس ر	∴ ی = لاَ جس ر + یَ جس ر
=	=	لا = لا جم ر + ا جم ر	لا = لاَ جم ر − یَ جس ر
=	۲	+ یَ جس ی ا لا	+ یَ جس یَ ا لا
=	۷	+ یَ جس یَ ا ی × $\frac{1}{\text{جس لا ا ی}}$	+ یَ جس یَ ا ی } $\frac{1}{\text{جس لا ا ی}}$
=	۱۳	اور اگر نسیلی	اور اگر نیا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۹۱	۶۱	صرف دو ہی	صرف ایک ہی سے

فقرہ (۸۸) پر یہ نشان * کرنا چاہئے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۹۲	۱۱	ری +	ری۲ +
۹۴	۱۷	ہ لا	ہ لا۲
"	۱۸	+ ی م	+ ی ص
۹۵	۴	- ۱۲ لا = ۰	- ۱۲ لا - ۱۲ ر = ۰
"	۱۰	اور ص = ۱ = ۰	اور ص - ۱ = ۰
"	۱۱	اور فَ = + ۹	اور فَ = - ۹

فقرہ (۹۰) پر یہ نشان کرنا چاہئے *

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۹۸	۱۶	+ ۲ جب ر م ر	+ ۲ جب ر جم ر
۱۰۰	۹	(د√ج - ی√س) / (ج + س)	(د√ج - ی√س) / √(ج + س)
"	"	یَ = (د√س + ی√ج) / (س + ج)	یَ = (د√س + ی√ج) / √(س + ج)
"	۱۵	ج ءَ۲ + سَ لاَ۲ + دَ ءَ	ج ءَ۲ + دَ ءَ
۱۰۱	۱	کر دو یا تین	کر دو یا تین لکھ جائے

اور صفحہ (۱۰۱) کے شکل (۳) کی راس قریب الصفر پر حرف ا؟

فقرہ (۹۶) پر یہ علامت لکھنی چاہئے *

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰۲	۱۸	جو قوت	جو قیمت
۱۰۴	۹	۱ / جم۲ کہ	۱ / جب۲ کر
"	۱۷	الیفَ	الیفُ
"	۱۹	اس سطر میں قیمت دَ میں سے جز + ی√س جب ا کو دور کرنا چاہئے	
۱۰۶	۱۶	∴ ر = ± √(۱/ق)	∴ ر = ± √(۱/ن)
۱۰۷	۲	صَ کے	صَ سے
"	۴	= ط۲ + ص۲	= ط۲ × ص۲
"	۶	مساوات گذشتہ	مساوات گذشتہ سے
"	۷	ط۲ - ل۲	√(ط۲ - ل۲)
"	۸	ص۲ - ر۲	√(ص۲ - ر۲)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح

صفحہ (۱۰۸) کی سطر (۱۰) میں تمام مساوی کہ ص ن پر علامت جذر کی کرنی چاہئیے یعنی

$$\text{ص ن} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ی}^2} = \sqrt{\text{لا}^2 + \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)} = \sqrt{\text{ص}^2 + \frac{(\text{ط}^2 - \text{ص}^2)\,\text{لا}^2}{\text{ط}^2}}$$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰۹	۹	: مربع ا ط	: مربع ا ص
=	۱۰	: ا ط²	: ا ص²
=	۱۱	دو خطوں	دو حصوں
۱۱۰	۳	وتر العرض	وتر
۱۱۱	۷	ایک نقطہ پر ایک دو	ایک نقطہ پر دو
=	=	ایک وتر العرض	ایک وتر
=	۸	شکل ل س ن	شکل ل س ل
=	۱۳	لو $\frac{\text{ط}^2 - \text{ص}}{\text{ط}}$	تو $\frac{\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}}{\text{ط}}$

صفحہ (۱۱۱) کی شکل بیضوی میں بجای ق کے ن لکھو اور دست راست کی ا کو ا' کرنا چاہئیے۔

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۱۲	۳	ص ن = ق	ص ن = ن
=	۱۸	۱۵ سے	۵ سے
۱۱۳	۴	$(\text{ص} - \text{لا}^2)^2 + \text{ی}^2$	$\sqrt{(\text{ص} - \text{لا})^2 + \text{ی}^2}$
=	۶	ی² ۴ ط	ی² = ۴ ط²
=	۱۳	لوکس اسکا بیضوی میں جسکا	لوکس اسکا بیضوی جسکا
۱۱۵	۹	چھوٹا ہی ط	چھوٹا ہی ط سے
۱۱۶	۱۲	+ د ی	+ ص ی
۱۱۸	۲	جبکہ − ی	جبکہ − ی

صفحہ (۱۱۹) کی شکل میں حرف ص مرکز بیضوی پر لکھنا چاہئیے یعنی درمیان نقطہ س اور م کے حرف ص لکھو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۲۰	۲	ی − ح لا د	ی۱ − ح لا۱
=	۵	اور لا۱ = − ط کے	اور لا۱ = − ط ی
=	۸	ع = $-\frac{\text{ص}^2\,\text{لا}}{\text{ط}^2\,\text{ی}}$ ط ی	ع = $-\frac{\text{ص}^2\,\text{لا}}{\text{ط}^2\,\text{ی}}$ ط ی

صحیح	غلط	سطر	صفحہ
(طا۲ - صا۲)	(طا۲ - صا۲)	۲	۱۴۴
اقطار متجانس کا	کا اقطار متجانس کا	۶	=
{جس (رَ - ر)}۲	{جس (رَ - ر)}	۱۵	=
ص نَ = لا	ص ن = لا	۱۴	۱۴۵
د نَ = دَ	د ن = د	=	=
- مثلث ن ص م اور مثلث د ص نَ}	- مثلث ن ص م} اور مثلث د ص نَ	۱۷	=
ط۲ د۲	ط۲ د۲	۴	۱۴۶

اس صفحہ کی شکل میں اس جگہ جہاں کہ ص طَ قطع کرتا ہے بیضوی کو وہاں حرف دَ لکھنا چاہیے اور جہاں عمود ن فَ قطع کرتا ہے محور اَ اَ کو وہاں حرف کَ لکھنا چاہیے

صحیح	غلط	سطر	صفحہ
ہو سکتے ہیں	ہو سکتے	۱۲	۱۴۶
قطر متجانس کسی قطر کا ایسا خط ہی جو کہ مرکز	قطر متجانس کے کسی قطر کا ایسا خط ہی کہ مرکز سے	۵	۱۴۷
مماسوں سے ہیں	مماسوں کے ہیں	۱۷	=
مربع اور ہر قطر متجانس	مربع اور قطر متجانس	۴	۱۴۸
اب اگر بیضوی کے	اب اگر بیضوی	۱۴	=
وتر نَ رَ کے ہیں	وتر نَ کے ہیں	۱۵	=
$= -\frac{ص^2}{ط^2}$	$= \frac{ص^2}{ط^2}$	۱۰	۱۴۹
$-\frac{ص^2}{ط^2}$	$-\frac{ص^2}{ط^2}$ صَ	۱۱	=
اس عمل سے	اس عمل کی	۱۸	=
ایک سی ہیں	ایک سی نہیں ہیں	۴	۱۴۰
اندر اور اس	اور اس	۱۷	=
بڑی سی بڑا ہی	بڑی سی بڑا ہی	۴	۱۴۱
ہئے یہہ	ہمنی نیلہ	۱۲	=
عَ اور رَ کے	عَ اور دَ کے	۱۲	۱۴۲

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۷۳	۱۴	۲ ا مس ر + مس ر	۲ ا مس ر - مس ر
۱۷۴	۱	$\frac{ا}{\sqrt{(ا-س) + ب^2}}$	$\frac{ا}{\sqrt{(ا-س)^2 + ب^2}}$
=	۲	$\frac{ا}{\sqrt{(ا-س) + ب^2}}$	$\frac{ا}{\sqrt{(ا-س)^2 + ب^2}}$
=	۳	$\frac{ب^2 - ۴ ا س}{\sqrt{(ا-س) + ب^2}}$	$\frac{ب^2 - ۴ ا س}{\sqrt{(ا-س)^2 + ب^2}}$
=	۴	$\frac{ب^2 - ۴ ا س}{\sqrt{(ط-س)^2 + ب^2}}$	$\frac{ب^2 - ۴ ا س}{\sqrt{(ا-س)^2 + ب^2}}$
۱۷۶	۳	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
=	۱۵	- جیب ر جیب (ک - ر)	- جیب ر جم (ک - ر)
۱۷۸	۱۷	قیمت (مس ر)² کے	قیمت (مس ر²) کی
۱۸۰	۷	دوگنا خط	دوگنا وتر خط
۱۸۳	۱۴	اگر $\frac{ب}{۲}$	اگر $\frac{ب}{۲}$
=	=	نوق = $\frac{ب}{۲}$	نوس = $\frac{ب}{۲}$
=	۱۶	$\frac{ب}{۲}$ ف ق	$\frac{ب}{۲}$ ف ق
۱۸۴	۳	ط ی²	ط² ی²
۱۸۶	۱	فرض کرو کہ = $\frac{ی}{ط ر}$ = ن	فرض کرو کہ $\frac{ی^2}{ط^2}$ = ن
۱۸۷	۱۴	محور کلاں بیضوی	اگر محور کلاں بیضوی

صفحہ (۱۹۱) کی شکل میں بجائے ی کے ع لکھو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۹۲	۱۴	س ی	س ع
۱۹۳	۱	س ی	س ع
=	۳	س ی² =	س ع² =
=	۴	توکس ی کا	توکس ع کا
=	۶	خط س ی	خط س ع
۱۹۷	۱۲	ی = $\frac{ط}{۲ ص}$	ی = $\frac{ن}{۲ ط}$
۱۹۸	۲	+ ص	+ ص²
۱۹۹	۶	شروع فقط ہی	شروع فقط یہی

صفحہ (۲۰۰) کی شکل میں خط ف د کے انجام پر لا اور قوس ل ا کے انجام پر لا لکھو۔

۲۰۰	۲	ف د = لا	ف د = لا
۲۰۱	۴	کھینچا جاوے تو اب	کھینچا جاوے اور عمود ا ق س پر ہو تو اب
۲۰۲	۷	کیونکہ ط = ۱ اور ط = -۱	(کیونکہ ط = ۱ اور ط = -۱)
۲۰۳	۷	د ی = ۰	د ی = ۰
ایضاً	۱۷	س ف = ن/۲	س ف = ن/۲
۲۰۶	۱	اور خط ک ف د	اور خط ک م د
ایضاً	۹	فرض کرو کہ زاویہ ا م = ل	فرض کرو کہ ا م = ل
۲۰۸	۱۳	تو اب م = ½ ا ی	تو اب ع م = ½ ا ی
ایضاً	۱۷	زاویہ ی ا ی کہ	زاویہ ی ا کہ
ایضاً	۱۸	خط بنیادی	وتر آتشی اعظم
۲۰۹	۱۱	تو ا کر خط بنیادی	تو ا کر وتر آتشی اعظم
ایضاً	۱۳	خط ا ن قریب البیضوی	خط ا ن کو قریب البیضوی
۲۱۰	۳	خط بنیادی	وتر آتشی اعظم
ایضاً	۶	ا م ط کی	ا م ا کی
ایضاً	۸	ط = ۰	ا = ۰
۲۱۰	۱۶	خطو مستعیم	خطوط مستقیم

صفحہ (۲۱۴) کے فقرہ (۲۶۸) کی شکل میں لکھو ع بجای اوس نقطہ ف کے جو پیدا ہوا ہے تقاطع س ف اور ک ق سے

صفحہ (۲۱۵) کی شکل میں انجام خط ہ ف کا ک لکھا جائے

۲۱۷	۱۱	نقطہ خط بیضوی پر	نقطہ خط بیضوی پر ی
۲۱۸	۱	ملاؤ خطوط ب ا اور ب د	ملاؤ خطوط ب ا اور ب ۲
۲۱۹	۲	د ک اور لو	د ک لو
ایضاً	۳	اور ب د کو	اور ا د کو
۲۲۰	۴	خط ص ف	خط ص د
۲۲۱	۱۶	ک ا ف	ع ا ف
۲۲۸	۱	قطر ط س ہو اتقاطع کرتا ہو	قطر ط س ہو تقاطع کرتا ہوا

صفحہ (۲۲۸) کی فقرہ (۲۹۰) کی شکل غلطی سے فقرہ (۲۹۲) مین چھاپی گئی ہے اور اس فقرہ کی شکل فقرہ (۲۹۰) مین طبع ہوئی ہے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۳۱	۱۱	سطح وف و اور وق : سطح وق اور وف	سطح ق و اور وق : سطح وف اور دف
۲۳۲	۷	اول دو مقام	اون دو مقام

صفحہ (۲۳۷) کی شکل مین بجای حرف ص کی س لکھو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۴۲	۱۱	$(ق+ی)^۲$	$(ق-ی)^۲$

صفحہ (۲۴۳) کی شکل (۲) مین اوس نقطہ پر جو پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنے خط ب ک اور ر ق سے ع کو لکھنا چاہیے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۴۶	۲	ط ب ی	ط ب ی
"	۳	ط (س + لا) س ص	ط (س + لا) : س ص
۲۴۷	۱۰	اور ب س = ½ ب س = ½ ب ک	اور ب س = ½ ب ی
۲۴۸	۸	اور یہ اور نام اسکا	اور نام اسکا
۲۴۹	۲	اوس شکل کو ثابت	اس شکل کو ثابت کیا
"	۳	فرض کرد کہ یہ	فرض کرو یہ

صفحہ (۲۵۰) کی شکل مین ط ذ ایک خط درمیان نقاط س اور ق سے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۵۱	۲	آتا جاویگا	آتی جاویگی
"	۱۰	جبکہ نقاط ق اور ق	جبکہ نقطہ ق
"	۱۱	اور قریب البعضوی سے اسطح کی جاوین	اور قریب البیضوی پر اسطح لیناجاوی
"	۱۲	سے واقع ہون	سے واقع ہو
۲۵۳	۱۶	توجبکہ خط س ر	توجبکہ خط س ی

صفحہ (۲۵۴) کی جدول مین بجای ٹ ط ∠ س کے ٹ ط ∠ ص لکھو قیمت لا کی ساتوین خانہ مین س وضع کرو ـ

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۵۸	۴	لا^۳ + لا^۲ +	لا^۳ + م لا^۲ +
"	۵	لا^۴ + م لا^۳ + ن لا^۲	لا^۴ + م لا^۳ + ن لا^۲ + ف لا +
۲۶۰	۱۴	تو ق قیمت کی	تو قیمت لا کی

صفحہ (۲۶۷) کی شکل (۱) مین حرف ف نہین لکہا ہی اور یہہ اوس جائی پر لکہا جانا چاہیے جہان کہ نقطہ اتار خط منحنی کی کاٹتی ہی خط م ق کو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۶۷	۹	$ط^2(ی-ط)^2=(ا-ط)^2-(ا-ہ)^2(۲طہ-ہ^2)$	$ط^2(ی-ط)^2-(ا-ط)^2(۲طا-ہا)$
=	۱۳	دریافت ہوکس نقطہ ف کا	دریافت کرو کہ کس نقطہ ف کا
۲۶۸	۱۴	خط ا ب کو ایک	خط ا ب ایک
۲۶۹	۱۸	سمجھہ مین آتا ہی	سمجھہ مین نہین آتا ہی
۲۷۰	۱۲	س ہ اور ہ ف	س ف اور ق ف
۲۷۱	۲	$(ر^2+ل^2+ط^2)$	$(ر^2+ل^2+ط^2)^2$
۲۷۲	۱۴	$ر^3+ع^3ی^3$	$ر^2+ع^2ی^2$

صفحہ (۲۷۶) کی شکل مین بجای ا ر کی ی ر لکہو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۷۶	۹	نقطہ ب کی	نقطہ ب پر
=	۱۱	نقطہ س کی یہہ ہی	نقطہ س پر یہہ ہی
۲۷۹	۵	دریافت نہین ہوسکتی ہی مثال	بخوبی دریافت نہین ہوسکتی ہی مگر مثال
=	۶	ہندسہ بالجبر سی بخوبی اٹھا	ہندسہ بالجبر سی ہی کچھہ اٹھا
=	۷	ان اوتار کی خط منحنی کی	ان اوتار خط منحنی کی
=	۸	خط منحنی طرف محور کے	خط منحنی کی طرف محور کی ہی
=	۱۰	جونکہ یہہ ہی	جونکہ یہہ
۲۸۰	۹	$\frac{(ن+۲)(ن+۳)}{۲}$	$\frac{(ن+۲)(ن+۱)}{۲}$
۲۸۱	۴	بہت طایل ہوگا	بہت طویل ہوگا
=	۱۶	اور ف = س لا ۱ لا ۱	اور ف = س لا ۱ لا ۲
۲۸۲	۱	$\frac{ی}{ا کو ۲}$ لا ی	$\frac{ب}{ا کو ۲}$ لا ی
=	۴	بعض نقص	بعض شرایط
=	۴	دو نقطون سے زیادہ	دو سے زیادہ
=	۱۶	دور ہوسکتی ہین کیونکہ ایسی	دور ہوسکتے ہین ایسی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۵۳	۱	لاگر یا للاڈنر	لاگرانڈر یا لارڈنر
۳	۹	لوکس ق مرتبہ کا ہوتا ہی	لوکس ان آن مرتبہ کا منحنی ہوتا ہی

صفحہ (۲۸۶) کی شکل مین لکھو بجای ے آ کی ر

صفحہ (۲۹۱) کی شکل مین بیضوی سے داہنی طرف ایک حرف ق کا لکھ دو مگر یہ نقطہ خط وتر پر ہو اور خارج بیضوی کے ہو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۹۷	۱۵	$ط ا = + \frac{ط^2 - ص^2}{۲}$	$ط ا + \frac{ط^2 - ص^2}{۲}$
۳۰۰	۱۰	پہلے دور کرنی	پہلے دور کرکی
"	۱۱	اگر ضرورت پڑی اور ضرب کرلو	اگر ضرورت پڑی ضرب کرو
۳۰۲	۱۲	یا ط اور ن م	یا ط اور ن ف
۳۰۶	۱۰	اور ی = ط ا	اور ی = ط ا
۳۱۲	۱۴	چونکہ نقطہ شروع سے	چونکہ نقطہ ع سے
۳۱۴	۱۱	ب ف	ب کہ
"	۱۲	تو خط ب ف	تو خط ب کہ

صفحہ (۳۱۷) کی شکل (۲) مین لکھو بجای ع کے آ اور بجای اسکے ع اور جس جای کہ نصف قطر د ق قطع کرتا ہی اندرونی دایرہ اص کو اوس جگہ حرف ز کا درج کرنا چاہئے ۔

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۱۹	۲	مذکور پر ہو	مذکور پر ہو
"	۱۴	ہر ایک نقطہ د ق	ہر ایک نقطہ د کہ
"	۱۵	اسیواسطے د ق = ط ر	د کہ = ط ر
"	"	اور زاویہ د ب ق	اور زاویہ د ب کہ

صفحہ (۳۲۲) کی شکل مین لکھو حرف ق اوس جای پر جہان نقطہ ار خط کھینچا گیا مرکز ص سے قطع کرتا ہی الزوپیوٹ کو

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۲۱	۴	چوتھی ربع دایرہ مین	تیسرے ربع دایرہ مین
۳۲۵	۱۷	سطح ق ف ا بر	سطح ف ق ا ر بر
۳۲۷	۱۲	خط ا ی پر سے	خط ا ع پر سے

لکھو صفحہ (۳۲۸) کی شکل مین حرف ق اوس مقام پر جہان عمود کھینچا گیا نقطہ س سے قطع کرتا ہی ح ب کو

صفحہ (۳۴۹) کی شکل میں درج کرو حرف ن اوس مقام پر جہاں خطوط من ق اور ق ن قطع ہیں خط ل ء پر

۳۴۲	۱۵	− (لا، لا۲ + .	−۲ (لا، لا۲
۳۴۳	۱۴	اور ن ل	اور ح ل
۳۴۵	۴	خط ا ل سے یعنی ط = ا ک ہ	خط ا لا سے یعنی د = ا ک ہ
"	۵	ا د مس ا ک ر = − ا د مس ع اور	ا ہ مس ا ہ ک = − ا ہ مس ع ہ ر
"	۶	مساوات مستقیم سے	مساوات خط مستقیم سے
"	۱۸	سطح ل ء	سطح ل ع
۳۴۶	۲	سطح ل ء پر	سطح ل ع پر
۳۵۶	۱۸	اپنی مطلب فرض کئے جاوین	اپنی مطلب سے فرض کئے جاوین
۳۵۸	۱۲	فرض کرو کہ نقطہ سطح کا	فرض کرو لفظ سطح کا
۳۵۹	۲	= ہ جم ک ع	= ہ جیس ک ع
"	۴	+ ء جس کہ ء	+ ء جیس ک ء
"	۶	اور جونکہ کہ ا ب	اور جوکہ و ا ب
"	۱۵	+ $\frac{ء}{ص}$ $\frac{ع}{ہ}$ = ۱	$\frac{ء}{ص}$ + $\frac{ع}{ہ}$ = ۱
۳۶۰	۶	... + جم ک ۰ لا ء = ف	.... + ع جم ک ۰ لا ء = ف
۳۶۱	۹	− (لالا ا +	−۲ (لالا ا
۳۶۴	۱۵	متوازی منطبق ہون	متوازی یا منطبق ہون
۳۶۶	۵	− (د َ − ط)	− (د َ − د)
"	۶	د ص َ − ء ص	ذ ص َ − ذ ص
۳۶۹	۱۵	خط مین سے	خط مین ہے
"	۱۷	ان خطوط کا ہی	ان خطوط کی ہی
۳۷۲	۱	+ ع ۲	+ ع ۲ ۱
۳۷۶	۱	بناتا ہی	بنا تا ہی رکھتی ہی
"	۳	کا محورون کی	کی جو محورون کی